Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Paul-André Meyer

Formule d'Itô généralisée pour le mouvement brownien linéaire, d'après Föllmer Protter, Shiryaev

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 31 (1997), p. 252-255

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1997__31__252_0>

Formule d'Ito généralisée pour le mouvement brownien linéaire

D'après Föllmer, Protter et Shiryaev [1], par P.A. Meyer*.

On a du mal à croire que l'on puisse encore découvrir des résultats simples sur le mouvement brownien. C'est pourtant le cas avec ce remarquable article.

Soit (X_t) le mouvement brownien linéaire issu de 0. Considérons une fonction $F(x)$ de classe C^2, et posons $f(x) = F'(x)$. Alors

$$F(X_t) = F(0) + \int_0^t f(X_s)\,dX_s + A_t ,$$

où A_t est le processus à variation finie $\frac{1}{2}\int_0^t f'(X_s)\,ds$. De plus, en utilisant comme d'habitude des subdivisions dyadiques de $[0,t]$,

$$\int_0^t f(X_s)\,dX_s = \lim \sum_i f(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \tag{2}$$

$$A_t = \lim \sum_i (f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i}))\,(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) ; \tag{3}$$

(A_t) est la covariation $[f(X), X]_t$. On sait depuis longtemps que l'hypothèse de classe C^2 est trop forte : si F est de classe C^1 (*i.e.* si f est continue), les résultats ci-dessus restent vrais, avec la seule différence que (A_t) n'est plus l'intégrale (maintenant dépourvue de sens) de $f'(X_s)$, et qu'au lieu d'être à variation finie il est seulement continu à variation quadratique nulle.

Le problème traité par les trois auteurs consiste à étendre ces derniers résultats au cas où f est seulement *localement de carré intégrable.* La démonstration exige que l'on travaille, non seulement sur le mouvement brownien (X_t), mais sur le pont brownien (Y_t), nul aux deux extrémités de l'intervalle $[0,1]$. Rappelons que $\mathbb{E}[Y_s^2] = s(1-s)$, et que

$$Y_t = W_t - \int_0^t \frac{Y_s}{1-s}\,ds , \tag{4}$$

où (W_t) est un mouvement brownien.

1. Approximations d'intégrales stochastiques. Nous allons établir ici le principal résultat technique de l'article — d'ailleurs simple et intéressant. Soit $f(t,x)$ une fonction borélienne telle que :

i) $f(t,\cdot)$ appartienne à $L^2(\mathbb{R})$ pour tout $t > 0$;

ii) l'application $t \longmapsto f(t,\cdot)$ à valeurs dans $L^2(\mathbb{R})$ soit fortement continue sur $]0,\infty[$, et bornée au voisinage de 0.

Alors l'intégrale stochastique $I_t = \int_0^t f(s, X_s)\,dX_s$ existe pour t fini, appartient à L^2, et de plus elle est approchée en norme L^2 par les sommes de Riemann dyadiques usuelles sur $[0,t]$,

$$I_t = \lim \sum\nolimits_i f(t_i, X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) .$$

* Exposé de décembre 1994

Avant toute chose, remarquons que ces notations ont un sens : la loi de (X_t) étant absolument continue, la v.a. $f(t, X_t)$ ne dépend que de la classe de $f(t, \cdot)$.

On a le même résultat en remplaçant X_t par le pont brownien Y_t (et en restreignant le temps à $[0,1]$). Cependant, dans ce cas l'intégrale stochastique et les sommes de Riemann n'appartiennent qu'à L^1, et l'approximation a lieu en norme L^1. Cette extension sera essentielle pour la suite.

Enfin, nous aurons besoin du même résultat pour un pont brownien prenant des valeurs quelconques aux extrémités de l'intervalle $[0,1]$; l'extension est facile, et nous en dirons un mot à la fin.

DÉMONSTRATION. Commençons par l'appartenance à L^2 de l'intégrale relative à X. Nous partons de l'inégalité

$$\int_a^b \mathbb{E}\,[f^2(s, X_s)]\; ds = \int_a^b f^2(s,x) e^{-x^2/2s} \frac{dxds}{\sqrt{2\pi s}} \leq \int_a^b \| f(s,\cdot) \|^2 \frac{ds}{\sqrt{2\pi s}}$$

intégrale finie puisque $\| f(s,\cdot) \|$ est localement borné. Noter que l'on peut prendre $a = 0$, et que pour b petit les intégrales sont alors petites aussi.

Passons au cas du pont brownien (4). Il y a deux termes à considérer. D'abord un terme qui appartient à L^2, l'intégrale de $f(s, Y_s)$ par rapport à W ; il se traite comme ci-dessus, à cela près que la variance de Y_s n'est pas s mais $s(1-s)$. D'autre part, nous avons à évaluer une norme L^1 :

$$\mathbb{E}\,[\int_a^b \frac{|f(s,Y_s)|\,|Y_s|}{1-s}\, ds\,] = \int_a^b \frac{ds}{1-s} \frac{1}{\sqrt{2\pi s(1-s)}} \int |f(s,x)x| e^{-x^2/s(1-s)} dx\ .$$

Dans l'intégrale de droite, on applique l'inégalité de Schwarz, en faisant apparaître d'une part $\| f(s,\cdot) \|_2$, et d'autre part $(\int x^2 e^{-x^2/s(1-s)} dx)^{1/2}$. L'intégrale gaussienne est en $(s(1-s))^{3/2}$, d'où

$$\mathbb{E}\,[\int_a^b \frac{|f(s,Y_s)|\,|Y_s|}{1-s}\, ds\,] \leq C \int_a^b \| f(s,\cdot) \|_2 \frac{s^{1/4} ds}{(1-s)^{3/4}} < \infty\ .$$

Nous passons à la seconde étape : sachant que l'intégrale existe, montrer qu'elle est approchée par ses sommes de Riemann. Revenons à X qui est plus simple. L'idée essentielle est que, bien que la fonction $f(s,\cdot)$ ne soit pas continue, *le processus* $f(s, X_s)$ *est continu dans* L^2 *pour* $s > 0$. La situation près de 0 est d'ailleurs bien contrôlée en norme, et on n'a pas besoin de s'en occuper.

Nous n'aurons besoin en fait que de la continuité à droite. Nous fixons $s > 0$, et prenons $t \in [s, s+h]$, h petit. En posant $t - s = u$, et en désignant par (μ_r) le semi-groupe de convolution brownien, on a

$$\| f(s,X_s) - f(s,X_t) \|^2 = \int \mu_s(dx)\,(f(s,x) - f(s,x+y))^2 \mu_u(dy)$$

Mais il est bien connu que les translations opèrent continûment dans $L^2(\mathbb{R})$, donc (μ_s ayant une densité bornée) $\int \mu_s(dx)\,(f(s,x) - f(s,x+y))^2$ est uniformément borné et petit pour y petit ; comme $\mu_u(dy)$ est concentrée près de 0 pour u petit, la norme du côté gauche est petite aussi.

Reste à considérer $f(t, X_t) - f(s, X_t) = g(X_t)$ en posant $g = f(t, \cdot) - f(s, \cdot)$: la norme de g dans $L^2(\mathbb{R})$ est petite par hypothèse, et l'on utilise la majoration grossière $\| g(X_t) \|_2 \leq \| g \|_2 / \sqrt{2\pi t}$. □

La norme L^2 de la différence entre l'intégrale stochastique $\int_a^b f(t, X_t)\, dX_t$ et la somme de Riemann correspondante est alors

$$\sum\nolimits_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} \mathbb{E}\left[(f(t, X_t) - f(s_i, X_{s_i}))^2 \right] ds$$

et ceci est petit.

Passons au pont brownien, pour lequel on ne peut utiliser la convolution. Nous utiliserons la remarque suivante (Revuz-Yor, p. 37) : on peut construire le pont brownien Y_t sur $[0, 1]$ comme $(1 - t) B_{t/1-t}$ où B est un mouvement brownien. Donc la continuité L^2 de $f(s, Y_s)$ se ramène à celle de $g(s, X_s)$ pour la fonction

$$g(s, x) = f\left(\frac{t}{1+t}, \frac{x}{1+t}\right)$$

tant que l'on va pas trop près de 1 (et de 0, où elle n'a pas lieu pour le brownien). Cela permet — compte tenu des majorations du début près des bornes — d'approcher par des sommes de Riemann dans L^2 l'intégrale stochastique $\int_0^1 f(s, Y_s)\, dW_s$. Quant au produit $f(s, Y_s) Y_s / (1 - s)$, il est continu dans L^1 sur l'intervalle $]0, 1[$ ouvert, et l'intégrale $\int_0^1 f(s, Y_s) Y_s\, ds / 1 - s$ peut donc être approchée par ses sommes de Riemann.

Dernier point, on peut obtenir le même résultat pour un pont brownien sur $[0, 1]$ entre deux valeurs quelconques. En effet, un tel pont s'écrit $Y_t + a + bt$, et cela revient encore à changer de fonction f.

2. Passage au résultat principal. Puisque les retournés des ponts browniens sont des ponts browniens, on voit que les sommes de Riemann en avant et en arrière, relatives à un intervalle $[u, v]$ avec $0 \leq u < v \leq 1$

$$\sum_i f(s_i, Y_{s_i}) (Y_{s_{i+1}} - Y_{s_i}) \qquad \text{et} \qquad \sum_i f(s_{i+1}, Y_{s_{i+1}}) (Y_{s_{i+1}} - Y_{s_i}) \,,$$

convergent en probabilité vers l'intégrale stochastique correspondante. Prenant la différence, on obtient l'existence de la covariation

$$[f(\cdot, Y), Y] = \lim \sum\nolimits_i (f(s_{i+1}, Y_{s_{i+1}}) - f(s_i, Y_{s_i})) (Y_{s_{i+1}} - Y_{s_i})$$

et du même coup, de l'intégrale stochastique de Stratonovich.

Ce résultat s'applique alors aussi au mouvement brownien sur $[0, 1]$, en le conditionnant par ses valeurs initiale et finale.

Résumons brièvement les autres résultats de l'article, qui sont des conséquences assez simples du résultat principal.

Puisque la covariation $[f(X), X]$ est la différence de deux intégrales stochastiques browniennes, elle possède le même type de continuité en f que les intégrales stochastiques. Mais alors il n'est pas difficile d'étendre la formule d'Ito classique

$$F(X_t) - F(X_0) = \int_0^t F'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} [F'(X), X]_t$$

du cas où F' est de classe C^1 au cas où elle appartient seulement à L^2, puis à L^2_{loc}, ce qui a été annoncé au début.

Une autre application très intéressante est l'extension de la notion de temps local. Le temps local de a s'obtient en appliquant la formule d'Ito à $F(x) = (x - a)^+$, autrement dit, c'est la covariation de X avec $f = I_{[a,\infty[}$. On a maintenant le moyen de définir le temps local de X sur une courbe continue $a(t)$, en prenant comme fonction $f(s,x) = I_{x>a(s)}$. Les auteurs montrent que c'est un processus croissant continu, qui ne croît que sur l'ensemble où le brownien rencontre la courbe.

En tant que fonction de t, la covariation $V_t(f) = [f(\cdot, X), X]_t$, différence de deux intégrales stochastiques, est un processus adapté à trajectoires continues. Contrairement au cas où f est de classe C^1, ce n'est pas en général un processus à variation finie. Mais on s'attend à ce qu'il ait une variation quadratique nulle : les auteurs établissent ce résultat, qui n'exige pas de nouvelles techniques.

En effet, comme la covariation quadratique $V_t(f)$ est la différence de deux intégrales stochastiques, l'une en avant et l'autre en arrière, on a une majoration a priori pour les sommes de carrés d'accroissements sur un intervalle $[a,b]$

$$\mathbb{E}\,[\textstyle\sum_i (V_{t_{i+1}}(f) - V_{t_i}(f))^2] \le 2\mathbb{E}\,[\displaystyle\int_a^b f^2(s, X_s)\,ds] \ .$$

Nous écrivons ensuite que $V_t(f) = V_t(h) + V_t(f-h)$, où h est une approximation régulière de f ; d'où pour les sommes de carrés d'accroissements une inégalité (avec un facteur 2). Comme $V_t(h)$ est à variation finie d'après la formule d'Ito classique, les sommes de carrés correspondantes tendent vers 0 dans L^1 lorsque le pas de la subdivision tend vers 0 ; d'autre part, la majoration précédente s'applique à $V_t(f-h)$, et les sommes correspondantes sont donc petites dans L^1.

Enfin, l'existence de la covariation permet de définir une intégrale de Stratonovich, et d'établir une version générale de la formule d'Ito.

RÉFÉRENCE

[1] FÖLLMER (H.), PROTTER (P.) et SHIRYAYEV (A.N.). Quadratic covariation and an extension of Ito's formula, *Bernoulli* **1/2**, 1995, p. 149–169.