NATHALIE EISENBAUM

Théorèmes limites pour les temps locaux d'un processus stable symétrique

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 31 (1997), p. 216-224

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1997__31__216_0>

THEOREMES LIMITES POUR LES TEMPS LOCAUX D'UN PROCESSUS STABLE SYMETRIQUE

Nathalie Eisenbaum

Laboratoire de Probabilités - Université Paris VI - 4, Place Jussieu - Tour 56 - 3ème étage - 75252 Paris Cedex 05

Ceci constitue un complément à l'article [1] intitulé "Une version sans conditionnement du Theoreme d'isomorphisme de Dynkin" paru dans le Séminaire de Probabilités XXIX (p.266-289). Les précisions que nous apportons concernent la partie III traitant des théorèmes limites sur les temps locaux d'un processus stable symétrique.

I - Introduction

Soit $(L_t^x,\ x\in\mathbb{R},\ t\geq 0)$ le processus des temps locaux d'un processus X , à valeurs réelles, issu de 0, stable symétrique d'indice $\beta>1$. En notant $(p_t(x), x\in\mathbb{R}, t\geq 0)$ les densités de transition de X, on pose :

$$c_\beta = \int_0^{+\infty} (p_t(0) - p_t(1))dt.$$

Pour tout γ de $[0,1]$, on appelle drap brownien fractionnaire d'indice γ, un processus gaussien centré continu $(B_t(x)\ ;\ x\in\mathbb{R}\ ,\ t\geq 0)$ de covariance :

$$E(\ B_s(x).B_t(y)\ ) = (s\wedge t).\Gamma^{(\gamma)}(x,y)$$

où $\qquad \Gamma^{(\gamma)}(x,y) = \frac{1}{2}\ (\ |x|^\gamma + |y|^\gamma - |x-y|^\gamma\ ).$

Théorème 1 : *Pour* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *n réels distincts, on a :*

$$\left(X\ ,\ \left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\left(L_t^{\varepsilon x+y_k} - L_t^{y_k}\right)\ ;\ x\in\mathbb{R}\ , 1\leq k\leq n,\ t\geq 0\right) \right)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{(d)} \left(X\ ,\ \left(\sqrt{c_\beta}\ B^{[y_k]}_{2L_t^{y_k}}(x)\ ;\ x\in\mathbb{R},\ 1\leq k\leq n\ ,\ t\geq 0\right) \right)$$

où $\{\ B_t^{[y_k]}(x),\ x\in\mathbb{R},\ 1\leq k\leq n,\ t\geq 0\ \}$ *est un système gaussien indépendant de*

X, composé de n *draps browniens fractionnaires d'indice* $(\beta-1)$, *tous indépendants.*

L'objet de la partie III de [1] était d'établir la convergence du second terme du couple considéré dans le Théorème 1. Nous montrons ici que l'on peut adjoindre X dans le résultat. A la fin de [4], Rosen indique une preuve possible de ce résultat dans le cas n=1. Notre démonstration s'appuie exclusivement sur le Théorème d'isomorphisme de Dynkin qui permet dans un premier temps d'établir le théorème suivant .
On note L_T le processus $(L_T^x \ ; \ x\in\mathbb{R})$.

Théorème 2 : *Pour* $y_1, y_2, \dots, y_n$ *n réels distincts et tout réel* a *, on a :*

$$\left(\left(L_T \ , \ \left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\left(L_T^{\varepsilon x+y_k} - L_T^{y_k}\right) \ ; \ x\in\mathbb{R} \ , 1\le k\le n\right)\right) \ \middle| \ X_T = a \right)$$
$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{(d)} \left(\left(L_T \ , \ \left(\sqrt{c_\beta}\, B^{[y_k]}_{2L_T^{y_k}}(x) \ ; \ x\in\mathbb{R}, \ 1\le k\le n \ \right)\right) \ \middle| \ X_T = a \right)$$

où $\{ B_t^{[y_k]}(x), \ x\in\mathbb{R}, \ 1\le k\le n, \ t\ge 0 \}$ *est un système gaussien indépendant de* X_T *et de* L_T *, composé de* n *draps browniens fractionnaires d'indice* $(\beta-1)$, *tous indépendants.*

Soulignons le fait que même dans le cas où X est un mouvement brownien et n=1, le Théorème 2 présente un résultat nouveau . En effet dans ce cas particulier Yor [5] a établi la convergence conjointe du Théorème 1. Mais elle ne permet pas à priori d'en déduire la convergence sous conditionnement du Théorème 2.
Nous renvoyons à l'article [1] pour une bibliographie plus étendue.

II - Les arguments

Dans [1] , nous avons prouvé que pour tout y la famille $\left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}}\left(L_t^{\varepsilon x+y} - L_t^{y}\right) \ ; \ x\in\mathbb{R} \ , \ t\ge 0\right)$ est tendue . Il suffit donc d'établir la convergence fini-dimensionnelle du couple .

1) Démonstration du Théorème 2

Soit T un temps exponentiel de paramètre λ, indépendant de X . Pour tout couple de réels (a,b), soit la probabilité $\tilde{P}_{ab}$ définie par :

$$\tilde{P}_{ab}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{g(X_t,b)}{g(a,b)} P_a\Big|_{\mathcal{F}_t} \qquad \text{sur } (t<T)$$

où g est la fonction de Green de X tué en T et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ désigne la filtration naturelle de X.
Soit $(\phi_x, x\in\mathbb{R})$ un processus gaussien centré indépendant de X, de covariance la fonction de Green de X tué en T. On note $<\ .\ >$ l'espérance relativement à ϕ.

Le Théorème d'isomorphisme de Dynkin nous assure alors que pour toute fonctionnelle mesurable F :

$$\text{(I)} \qquad \tilde{P}_{ab} < F\left(L_T + \frac{\phi^2}{2} \right) > \; = \; < \frac{\phi_a \phi_b}{g(a,b)} F\left(\frac{\phi^2}{2} \right) >$$

On note : $\mathbb{A} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$.
On a montré dans [1] que l'on a la convergence en loi suivante :

$$\left(\left(\frac{\phi_{\varepsilon x+y} - \phi_y}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}} ; (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{A}\right) , \left(\frac{\phi_{\varepsilon x+y} + \phi_y}{2} ; (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{A}\right) , (\phi_x ; x\in\mathbb{R}) \right)$$

$$\Big\downarrow \text{(d)} \quad \text{quand } \varepsilon\to 0$$

$$\left((\sqrt{c_\beta}\, B_1^{[y]}(x) ; (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{A}) , (\phi_y ; y\in\mathbb{A}) , (\phi_x ; x\in\mathbb{R}) \right)$$

où pour tout y , $B^{[y]}$ est un drap brownien fractionnaire d'indice β-1.
Les processus $B^{[y]}$, y variant dans $\mathbb{A}$, étant tous indépendants entre eux et indépendants de ϕ.

En particulier , on a :

$$\left(\left(\frac{\phi^2_{\varepsilon x+y} - \phi^2_y}{2\,\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}} ; (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{A}\right) , (\phi_x ; x\in\mathbb{R}) \right)$$

$$\Big\downarrow \text{(d)} \quad \text{quand } \varepsilon\to 0$$

$$\left((\sqrt{c_\beta}\, B^{[y]}_{\phi_y^2}(x) ; (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{A}) , (\phi_x ; x\in\mathbb{R}) \right) .$$

Ce résultat reste vrai sous la mesure $< \frac{\phi_a \phi_b}{g(a,b)}, \, . \, >$.

Notons H_ε l'application linéaire de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ définie par:

$$H_\varepsilon(f) = \left(f, \ \varepsilon^{-(\beta-1)/2}(f(\varepsilon.+y) - f(y)) \ ; \ y\in\mathbb{A}\right) .$$

En utilisant (I) , on obtient alors sous $\tilde{P}_{ab} < . >$:

$$H_\varepsilon(L_T + \frac{\phi^2}{2}) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{(d)} (L_T + \frac{\phi^2}{2}, \ (\sqrt{c_\beta} \, B^{[y]}_{2L^y_T+\phi^2_y}(.) \ ; \ y\in\mathbb{A})),$$

ce qu'on peut écrire :

$$H_\varepsilon(L_T) + H_\varepsilon(\frac{\phi^2}{2}) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{(d)}$$

$$(L_T , \ (\sqrt{c_\beta} \, \tilde{B}^{[y]}_{2L^y_T}(.) \ ; \ y\in\mathbb{A})) \ + \ (\frac{\phi^2}{2}, \ (\sqrt{c_\beta} \, B^{[y]}_{\phi_y^2}(.) \ ; \ y\in\mathbb{A})),$$

où $\tilde{B}^{[y]}, y\in\mathbb{A}$ est une famille de mouvements browniens fractionnaires indépendants, indépendante de L_T, T et de ϕ.

Les transformées de Laplace-Fourier fini-dimensionnelles associées au processus $(\frac{\phi^2}{2}, \ (\sqrt{c_\beta} \, B^{[y]}_{\phi_y^2}(.) \ ; \ y\in\mathbb{A}))$, ne s'annulant pas, on en déduit :

$$H_\varepsilon(L_T) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{(d)} \left(L_T , \ (\sqrt{c_\beta} \, B^{[y_k]}_{2L^{y_k}_T}(x) \ ; \ x\in\mathbb{R}, \ 1\le k\le n \ ) \right)$$

avec $(B^{[y_i]} \ ; \ 1\le i\le n)$ indépendant de L_T.

Le Théorème 2 s'obtient maintenant grâce à la proposition suivante . $\mathscr{F}_T$ désigne la tribu engendrée par les évènements de la forme $A \cap \{T>t\}$, où $A\in\mathscr{F}_t$.

Proposition 3 : *Les probabilités* $\tilde{P}_{ab}$ *et* $P_a(\, . \mid X_T = b)$ *coïncident sur* $\mathscr{F}_T$

<u>Démonstration de la Proposition 3</u> Il suffit de montrer que pour tout borélien B de $\mathbb{R}$ et tout A élément de $\mathcal{F}_t$, on a :

$$\int_B \tilde{P}_{ab}(A \cap \{T>t\}) P_a(X_T \in db) = P_a(A \cap \{T>t\} \cap \{X_T \in B\}) \quad .$$

En remarquant que : $P_a(X_T \in db) = \lambda\, g(a,b)\, db$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_B \tilde{P}_{ab}(A \cap \{T>t\}) P_a(X_T \in db) &= \int_B \tilde{P}_{ab}(A \cap \{T>t\})\, \lambda\, g(a,b)\, db \\
&= \int_B E_a(A \cap \{T>t\};\ g(X_t,b))\, \lambda\, db \\
&= \int_B E_a(A \cap \{T>t\};\ g(X_t,b))\, \lambda\, db \\
&= \lambda\, e^{-\lambda t} \int_B E_a(A\ ;\ g(X_t,b))\, db \\
&= \lambda\, e^{-\lambda t} \int_0^{+\infty} \int_B E_a(A\ ;\ p_s(X_t-b))\, e^{-\lambda s} ds db \\
&= \lambda\, e^{-\lambda t} \int_0^{+\infty} E_a(A\ ;\ X_{s+t} \in B)\, e^{-\lambda s} ds \\
&= \int_t^{+\infty} E_a(A\ ;\ X_s \in B)\, \lambda e^{-\lambda s} ds \\
&= P_a(A \cap \{T>t\} \cap \{X_T \in B\}).
\end{aligned}$$

Nous faisons également les deux remarques suivantes :

<u>Remarques</u> :

(i) ϕ étant indépendant de T, on obtient de la même façon :

$$\left(L_T\ ,\ \left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}} \left(L_T^{\varepsilon x+(y_k T^{1/\beta})} - L_T^{y_k T^{1/\beta}} \right) ;\ x \in \mathbb{R}\ , 1 \le k \le n \right)\ \middle|\ X_T = b \right)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{(d)} \left(L_T\ ,\ \left(\sqrt{c_\beta}\ B^{[y_k]}_{2L_T^{y_k T^{1/\beta}}}(x)\ ;\ x \in \mathbb{R},\ 1 \le k \le n \right)\ \middle|\ X_T = b \right)$$

(ii) Par un argument de convergence dominée , on obtient à partir de la remarque (i) :

$$\left(X_T \,,\, L_T \,,\, \left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}} \left(L_T^{\varepsilon x+(y_k T^{1/\beta})} - L_T^{y_k T^{1/\beta}} \right) \;;\; x\in\mathbb{R} \,, 1\le k\le n \right) \right)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{(d)} \left(X_T \,,\, L_T \,,\, \left(\sqrt{c_\beta}\, B^{[y_k]}_{2L_T^{y_k T^{1/\beta}}}(x) \;;\; x\in\mathbb{R},\; 1\le k\le n \right) \right)$$

avec $(B^{[y_i]} \;;\; 1\le i\le n)$ indépendant de (L_T, X_T).

2) Passage du temps exponentiel indépendant à un temps déterministe

Montrons maintenant que la convergence obtenue à l'étape 1) permet d'obtenir pour tout $t>0$:

$$\left(X_t \,,\, L_t \,,\, \left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}} \left(L_t^{\varepsilon x+y_k} - L_t^{y_k} \right) \;;\; x\in\mathbb{R} \,, 1\le k\le n \right) \right)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{(d)} \left(X_t \,,\, L_t \,,\, \left(\sqrt{c_\beta}\, B^{[y_k]}_{2L_t^{y_k}}(x) \;;\; x\in\mathbb{R},\; 1\le k\le n \right) \right).$$

De façon générale les déductions de ce genre sont fausses . (Par exemple la convergence des transformées de Laplace d'une suite de mesures sur $\mathbb{R}_+$ absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$, n'implique pas la convergence des densités respectives). C'est pourquoi nous détaillons notre affirmation. Pour alléger l'écriture nous traitons le cas où X est un mouvement brownien, les autres cas se traitant avec les mêmes arguments.

Nous allons utiliser le lemme suivant qui est une conséquence immédiate de la définition de la convergence en loi :

Lemme 4 : *Soit* (X_n) *une suite de variables aléatoires à valeurs dans un espace métrisable* E, *convergeant en loi vers* X. *Pour toute fonction continue* $f : E \to G$ *où* G *est un espace métrisable, la suite* $(f(X_n))$ *converge en loi vers* $f(X)$.

On remarque que : $T = \int_{\mathbb{R}} L_T^x \, dx$. Soit ϕ la fonction définie sur l'ensemble des fonctions réelles continues à support compact, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts , telle que :

$$\phi(f) = (f, \int_{\mathbb{R}} f(x)dx).$$

En utilisant le Lemme 4 , on obtient alors à partir de la convergence de la Remarque (ii) :

$$\left(T , X_T , L_T , (\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(L_T^{\varepsilon x+ y_k\sqrt{T}} - L_T^{y_k\sqrt{T}}) ; x\in\mathbb{R} , 1\le k\le n) \right)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{(d)} \left(T , X_T , L_T , (\sqrt{c_2}\, B^{[y_k]}_{2L_T^{y_k\sqrt{T}}}(x) ; x\in\mathbb{R}, 1\le k\le n) \right)$$

En utilisant les propriétés de scaling du mouvement brownien, la convergence ci-dessus est équivalente à :

$$\left(T , \sqrt{T} X_1 , (\sqrt{T} L_1^{x/\sqrt{T}} , x\in\mathbb{R}) , (\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{\varepsilon}}(L_1^{(\varepsilon x/\sqrt{T})+y_k} - L_1^{y_k}) ; x\in\mathbb{R} , 1\le k\le n) \right)$$

$$\Big\downarrow (d) \quad \text{quand } \varepsilon\to 0$$

$$\left(T , \sqrt{T} X_1 , (\sqrt{T} L_1^{x/\sqrt{T}} , x\in\mathbb{R}) , (\sqrt{c_2}\, B^{[y_k]}_{2\sqrt{T}\, L_1^{y_k}}(x) ; x\in\mathbb{R}, 1\le k\le n) \right).$$

Soit G_n la fonction de $\mathbb{R} \times \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ définie par :

$$G_n(a,f)(x) = f(ax).$$

En munissant $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, G_n est continue.

On considère la fonction F suivante :

$$F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$$

$$F(t,x,f,g) = \left(\frac{x}{\sqrt{t}} , \frac{1}{\sqrt{t}} G_1(\sqrt{t},f) , \frac{1}{\sqrt{t}} G_n(\sqrt{t},g) \right)$$

F étant continue, on utilise le Lemme 4, pour obtenir :

$$F\left(T , \sqrt{T} X_1 , (\sqrt{T} L_1^{x/\sqrt{T}} , x\in\mathbb{R}) , (\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{\varepsilon}}(L_1^{(\varepsilon x/\sqrt{T})+y_k} - L_1^{y_k}) ; x\in\mathbb{R} , 1\le k\le n) \right)$$

$$\Big\downarrow (d) \quad \text{quand } \varepsilon\to 0$$

$$F\left(T , \sqrt{T} X_1 , (\sqrt{T} L_1^{x/\sqrt{T}} , x\in\mathbb{R}) , (\sqrt{c_2}\, B^{[y_k]}_{2\sqrt{T}\, L_1^{y_k}}(x) ; x\in\mathbb{R}, 1\le k\le n) \right).$$

Ce qui s'écrit également :

$$\left(X_1 , L_1 , \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(L_1^{\varepsilon x+y_k} - L_1^{y_k}\right) ; x\in\mathbb{R} , 1\le k\le n\right) \right)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{(d)} \left(X_1 , L_1 , \left(\sqrt{c_2}\, B^{[y_k]}_{2L_1^{y_k}}(x) ; x\in\mathbb{R}, 1\le k\le n \right) \right).$$

Ce résultat s'étend à tout t>0 par scaling.

3) Convergence fini-dimensionnelle

Pour établir la convergence fini-dimensionnelle on considère F_1 et F_2 des fonctionnelles définies sur $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})\times\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ telles que pour $m = 1,2$:

$$F_m (f_1, f_2) = \exp\{ i \int_{\mathbb{R}} f_1(x)d\mu_m(x) + i \int_{\mathbb{R}} f_2(x)d\nu_m(x) \}$$

où pour tout m, μ_m et ν_m sont des mesures σ-finies sur respectivement $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$.

On considère également g_1 et g_2 deux fonctions bornées éléments de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

On note $Y_t(\varepsilon)$ le processus $\left(\frac{L_t^{\varepsilon x+y_k} - L_t^{y_k}}{\varepsilon^{\frac{\beta-1}{2}}} , x\in\mathbb{R} , 1\le k\le n\right)$ et Z_t le processus $\left(\sqrt{c_\beta}\, B^{[y_k]}_{2L_t^{y_k}}(x);x\in\mathbb{R}, 1\le k\le n\right)$. Soient $t,s > 0$. On a :

$$\mathbb{E}\left(F_1(L_t,Y_t(\varepsilon))\, g_1(X_t) \,.\, F_2(L_{t+s},Y_{t+s}(\varepsilon))\, g_2(X_{t+s}) \right)$$

$$= \mathbb{E}\left(F_1F_2(L_t,Y_t(\varepsilon))\, g_1(X_t) \,.\, [F_2(L_s,Y_s(\varepsilon))\, g_2(X_s)] \circ \theta_t \right).$$

Donc le terme de gauche est en fait de la forme :

$$\mathbb{E}\left(F_1F_2(L_t,Y_t(\varepsilon)).\ \psi_\varepsilon(X_t)\right)$$

avec pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\psi_\varepsilon(x) = \mathbb{E}_x\left(F_2(L_s,Y_s(\varepsilon))\, g_2(X_s)\right).g_1(x)$.

Grâce à l'étape 2), on sait que pour tout x:

$$\psi_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{} \psi(x) = \mathbb{E}_x\left(F_2(L_s,Z_s)\, g_2(X_s)\right).g_1(x)$$

$$\left| \mathbb{E}\Big(F_1(L_t,Y_t(\varepsilon))g_1(X_t).F_2(L_{t+s},Y_{t+s}(\varepsilon))g_2(X_{t+s})\Big) - \mathbb{E}\Big(F_1(L_t,Z_t)g_1(X_t).F_2(L_{t+s},Z_{t+s})g_2(X_{t+s}) \Big) \right|$$

$$= \left| \mathbb{E}\Big(F_1F_2(L_t,Y_t(\varepsilon)).\psi_\varepsilon(X_t)\Big) - \mathbb{E}\Big(F_1F_2(L_t,Z_t).\ \psi(X_t)\Big) \right|$$

$$\le \mathbb{E}\Big(|F_1F_2(L_t,Y_t(\varepsilon))|\ |\psi_\varepsilon(X_t) - \psi(X_t)|\Big) + \left| \mathbb{E}\Big(F_1F_2(L_t,Y_t(\varepsilon)).\psi(X_t)\Big) - \mathbb{E}\Big(F_1F_2(L_t,Z_t).\psi(X_t)\Big) \right|$$

Dans la somme ci-dessus , quand ε tend vers 0 , le premier terme tend vers 0 par un argument de convergence dominée . Le second tend également vers 0 grâce à la convergence établie à l'étape 2).

On en déduit que :

$$\Big((X_t,L_t,Y_t(\varepsilon)) \ ,\ (X_{t+s},L_{t+s},Y_{t+s}(\varepsilon))\Big) \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{(d)} \Big((X_t,L_t,Z_t) \ ,\ (X_{t+s},L_{t+s},Z_{t+s})\Big).$$

On étend aisément la démonstration à une suite finie de temps.

Ce qui achève la preuve du Théorème 1.

Références

[1] **Eisenbaum N.** Une version sans conditionnement du Théorème d'isomorphisme de Dynkin.*Sém.de Probabilités XXIX. LNM 1613 (266-289). Springer.1995*

[2] **Marcus M.B. and Rosen J.** Sample path properties of the local times of strongly symmetric Markov processes via Gaussian processes. *Annals of Proba.,20,n°4(1603-1684).1992*

[3] **Revuz D. and Yor M.** Continuous martingales and Brownian motion. *Springer Verlag.1991.Second edition 1994.*

[4] **Rosen J.** Second order limit laws for the local times of stable processes.*Sém.de Probabilités XXV.LNM 1485 (407-425).Springer.1991.*

[5] **Yor M.** Le drap brownien comme limite en loi des tempslocaux d'un mouvement brownien linéaire.*Sém de Probabilités XVII.LNM 986 (89-105).Springer.1983.*