SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

YUE-YUN HU

Sur la représentation des $\left(\mathcal{F}_t^- = \sigma\{B_s^-, s \leqslant t\}\right)$ martingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 29 (1995), p. 290-296
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1995__29__290_0>

Sur la représentation des $(\mathcal{F}_t^- = \sigma\{B_s^-, s \leq t\})$-martingales

Y. Hu

Laboratoire de Probabilités, Université Paris VI

Tour 56, 4 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

1. Introduction.

Soit (B_t) un mouvement brownien réel issu de 0 et notons $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration naturelle. Soit $(\mathcal{F}_t^+)$ (resp: $(\mathcal{F}_t^-)$) la filtration engendrée par la partie positive (resp: négative) de (B_t), i.e: $\mathcal{F}_t^+ = \sigma(B_s^+ : s \leq t)$ (resp: $\mathcal{F}_t^- = \sigma(B_s^- : s \leq t)$) rendue continue à droite, et complétée. En étudiant l'équation de structure $d[X,X]_t = dt - X_{t-}^+ dX_t$, Azéma & Rainer (1994) ont démontré que toute $(\mathcal{F}_t^-)$-martingale de carré intégrable peut s'écrire comme une intégrale stochastique par rapport à une martingale, qui est à un changement de temps près l'unique solution de cette équation de structure, notée encore par (X_t), dont la partie discontinue fait intervenir la "première" martingale d'Azéma. (Pour une référence sur les équations de structure, voir Emery (1989)). On introduit $g_t = \sup\{s \leq t : B_t = 0\}$, le dernier zéro de B avant t, et on pose

$$X_t = -B_t^- + \mathbb{1}_{(B_t>0)}\sqrt{\frac{\pi}{2}(t-g_t)}.$$

Théorème (Azéma & Rainer (1994)): *Toute $(\mathcal{F}_t^-)$-martingale de carré intégrable peut s'écrire comme une intégrale stochastique par rapport à la martingale (X_t).*

Plus généralement, soit f une fonction borélienne et de carré intégrable sur toute intervalle bornée de $\mathbb{R}^1$; On étudie la filtration engendrée par la martingale continue $(\int_0^t f(B_s)dB_s, t \geq 0)$. Un problème ouvert est de savoir quand cette filtration est brownienne. Ce problème difficile, que l'on ne traite pas ici, est partiellement résolu par D. Lane (1978) pour une fonction f continue dont l'ensemble des zéros est de mesure de Lebesgue nulle. Un autre problème lié à cette filtration est de savoir si la martingale ci-dessus $(\int_0^t f(B_s)dB_s)$ est pure. Une façon de l'aborder, (voir Knight (1987)), est de le transformer en celui de l'existence de solution forte d'une certaine équation associée. En particulier, prenons $f(x) = a1_{(x\leq 0)} + b1_{(x>0)}$ avec a et b deux constantes non nulles, et $a \neq b$, Knight (1987) a montré que pour que la martingale $(\int_0^t f(B_s)dB_s)$ soit pure, il faut et il suffit que a et b aient le même signe. (Voir aussi Stroock & Yor (1981), et Barlow (1988) pour une étude de solution forte de cette équation associée). Le cas critique où $b = 0$ est décrit par le théorème précédent. En effet, en appliquant la formule de Tanaka à (B_t^-), on montrera dans Section 2 que la filtration $(\mathcal{F}_t^-)$ est engendrée par la martingale $(\int_0^t \mathbb{1}_{(B_s<0)} dB_s)$. (Pour une référence générale, voir Chaleyat-Maurel & Yor (1978)). On en déduit en particulier que la martingale $(\int_0^t \mathbb{1}_{(B_s<0)} dB_s)$ n'est pas pure. En fait, elle n'est même pas extrêmale, puisque dans sa filtration propre figurent des martingales purement discontinues.

Dans les sections suivantes, on démontrera ce théorème plus directement et on explicitera les parties continue et discontinue de la martingale (X_t) à l'aide du calcul stochastique. On établit tout d'abord trois lemmes préliminaires dans Section 2, et la démonstration du théorème se trouve à Section 3.

Cette preuve est issue de discussions avec J. Azéma, C. Rainer et M. Yor que je tiens à remercier vivement.

2. L'indépendance entre $\mathcal{F}^+$ et $\mathcal{F}^-$.

On note κ la filtration engendrée par les signes de B définie par

$$\kappa_t = \sigma\{\mathrm{sgn}(B_s) : s \le t\}, \qquad t \ge 0.$$

Rappelons que $\mathcal{F}_{g_t} \overset{def}{=} \sigma\{\zeta_{g_t} : \zeta$ est un processus prévisible pour $(\mathcal{F}_t)\}$. On a le lemme suivant:

Lemme 1: *Pour tout $t > 0$, les deux tribus κ_∞ et $\mathcal{F}_{g_t} \bigvee \sigma(\mathrm{sgn} B_t)$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à la tribu κ_t.*

Preuve du Lemme 1: Il suffit de montrer que pour toute variable $\Phi \in L^2(\mathcal{F}_{g_t})$, on a

$$\mathbb{E}(\Phi \mid \kappa_\infty) = \mathbb{E}(\Phi \mid \kappa_t).$$

On note $d_t = \inf\{s \ge t : B_s = 0\}$. Alors

$$\mathbb{E}(\Phi \mid \kappa_\infty) = \mathbb{E}(\Phi \mid \kappa_t, d_t).$$

Prenons $\xi \in L^2(\kappa_t)$, f une fonction bornée borélienne, et posons $h(x) = \mathbb{E} f(t + T_x)$ où T_x est le premier temps d'atteinte de x par un mouvement brownien réel issu de 0, en particulier h est paire. On définit un noyau markovien Λ par $\Lambda f(x) = \mathbb{E}(f(x m_1))$, où (m_t) est le méandre brownien défini par $m_u = |B_{g_t + u(t-g_t)}|/\sqrt{t - g_t}$, pour $0 \le u \le 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\Phi \xi f(d_t)) &= \mathbb{E}(\Phi \xi \mathbb{E}(f(d_t) \mid \mathcal{F}_t)) \\
&= \mathbb{E}(\Phi \xi h(|B_t|)) \\
&= \mathbb{E}\Big(\Phi \xi \Lambda h(\sqrt{t - g_t})\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\Phi \mid \kappa_t) \xi \Lambda h(\sqrt{t - g_t})\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\Phi \mid \kappa_t) \xi f(d_t)\Big).
\end{aligned}$$

où la troisième égalité résulte de l'indépendance entre la tribu $\mathcal{F}_{g_t} \bigvee \sigma(\text{sgn}B_t)$ et le méandre $(m_u; 0 \leq u \leq 1)$, (voir par exemple Lemme 1 de Azéma & Yor (1989)). Donc, $\mathbb{E}(\Phi \mid \kappa_\infty) = \mathbb{E}(\Phi \mid \kappa_t)$. $\square$

On note (L_t) le temps local en 0 de (B_t). Soient M^+ et M^- deux martingales continues définies par

$$M_t^+ = -\int_0^t \mathbb{1}_{(B_s>0)} dB_s, \qquad M_t^- = \int_0^t \mathbb{1}_{(B_s<0)} dB_s.$$

Rappelons que la filtration $(\mathcal{F}_t^+)$ (resp: $(\mathcal{F}_t^-)$) est définie dans l'introduction comme la filtration engendrée par la partie positive (resp: négative) de (B_t). On écrit la formule de Tanaka pour B_t^+, $B_t^+ = -M_t^+ + \frac{1}{2}L_t$. Il vient du lemme de Skorokhod pour les équations de réflexions (voir aussi El Karoui & Chaleyat-Maurel (1978) pour le problème de réflexion) que $\frac{1}{2}L_t = \sup_{0\leq s\leq t} M_s^+$. De même pour (B_t^-), on en déduit aisément que la filtration naturelle de la martingale (M_t^+) (resp: (M_t^-)) est égale à $(\mathcal{F}_t^+)$ (resp: $(\mathcal{F}_t^-)$).

Lemme 2: *Conditionnellement à κ_∞, les tribus $\mathcal{F}_\infty^+$ et $\mathcal{F}_\infty^-$ sont indépendantes.*

Preuve du Lemme 2: On note A^+ (resp: A^-) le processus croissant associé à la martingale continue M^+ (resp: M^-). L'inverse continue à droite de A^+ (resp: A^-) est notée par α^+ (resp: α^-). i.e. pour $t \geq 0$, $A_t^{+,-} =< M^{+,-} >_t = \int_0^t 1_{(B_s\in\mathbb{R}_{+,-})} ds$ et $\alpha_t^{+,-} = \inf\{s > 0 : A_s^{+,-} > t\}$. Il résulte du théorème de Knight (1970) sur les martingales orthogonales qu'il existe deux mouvements browniens réels indépendants δ^+et δ^- tels que

$$M^{+,-} = \delta^{+,-}_{A^{+,-}}.$$

Le lemme de Skorokhod implique (voir par exemple Karatzas & Shreve (1988)), que

$$\frac{1}{2} L_{\alpha_t^{+,-}} = \sup\{\delta_s^{+,-} : 0 \leq s \leq t\} \stackrel{def}{=} S_t^{+,-}.$$

Or

$$\alpha_t^+ = t + A^-_{\alpha_t^+} = t + A^-_{\tau(L_{\alpha_t^+})} = t + A^-_{\tau(2S_t^+)},$$

où τ est l'inverse continu à droite de L, et il est facile de voir que $S^{+,-}$ est l'inverse de $A_\tau^{+,-}$. Donc

$$\sigma(\alpha^+) \subset \sigma(S^+, S^-), \text{ et de même pour } \alpha^-$$

Par conséquent,

$$\sigma(S^+, S^-) \subset \kappa_\infty = \sigma(\text{sgn}(B_t) : t > 0) = \sigma(A^+, A^-) = \sigma(\alpha^+, \alpha^-) \subset \sigma(S^+, S^-).$$

On peut donc écrire

$$\mathcal{F}_\infty^+ = \sigma(\delta^+, \kappa_\infty) = \sigma(\delta^+, S^-), \quad \mathcal{F}_\infty^- = \sigma(\delta^-, \kappa_\infty) = \sigma(\delta^-, S^+).$$

Pour montrer le lemme 2, il s'agit de prouver que pour toute variable aléatoire bornée Z de la forme $Z = \phi\chi$ avec $\phi \in L^\infty(\delta^+), \chi \in L^\infty(\kappa_\infty)$, on a

$$\mathbb{E}(Z \mid \mathcal{F}_\infty^-) = \mathbb{E}(Z \mid \kappa_\infty).$$

Or,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z \mid F_\infty^-) &= \chi\mathbb{E}(\phi \mid \sigma(\delta^-, S^+, S^-)) \\ &= \chi\mathbb{E}(\phi \mid \sigma(S^+)) \\ &= \chi\mathbb{E}(\phi \mid \kappa_\infty) \\ &= \mathbb{E}(Z \mid \kappa_\infty),\end{aligned}$$

où la seconde égalité découle de l'indépendance entre δ^+ et δ^-. $\square$

Lemme 3 : *Pour tout $t \geq 0$, conditionnellement à κ_t, les deux tribus $\mathcal{F}_t^+$ et $\mathcal{F}_t^-$ sont indépendantes.*

Preuve du Lemme 3: Soient Φ, Ψ deux fonctionnelles continues bornées, $t > 0$; Il suffit de montrer que

$$\mathbb{E}\Big(\Phi(B_s^+, s \leq t)\Psi(B_s^-, s \leq t)\Big) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\Phi(B_s^+, s \leq t) \mid \kappa_t)\Psi(B_s^-, s \leq t)\Big).$$

Pour simplifier les notations, on note $\Phi_t = \Phi(B_s^+, s \leq t)$ et $\Psi_t = \Psi(B_s^-, s \leq t)$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\Phi_t\Psi_t\mathbb{1}_{(B_t>0)}\Big) &= \mathbb{E}\Big(\Phi_t\Psi_{g_t}\mathbb{1}_{(B_t>0)}\Big) \\ &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\Phi_t \mid \kappa_\infty)\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(B_t>0)}\Psi_{g_t} \mid \kappa_\infty)\Big) \\ &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\Phi_t \mid \kappa_\infty)\mathbb{E}(\Psi_{g_t} \mid \kappa_t)\mathbb{1}_{(B_t>0)}\Big) \\ &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\Phi_t \mid \kappa_t)\mathbb{E}(\Psi_{g_t} \mid \kappa_t)\mathbb{1}_{(B_t>0)}\Big) \\ &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\Phi_t \mid \kappa_t)\mathbb{E}(\Psi_t \mid \kappa_t)\mathbb{1}_{(B_t>0)}\Big),\end{aligned}$$

où la seconde égalité provient du Lemme 2, et la troisième égalité du Lemme 1. De même pour la partie $(B_t < 0)$, on a

$$\mathbb{E}\Big(\Phi_t\Psi_t\mathbb{1}_{(B_t<0)}\Big) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\Phi_t \mid \kappa_t)\mathbb{E}(\Psi_t \mid \kappa_t)\mathbb{1}_{(B_t<0)}\Big).$$

En sommant, on obtient le Lemme 3. $\square$

3. Démonstration du Théorème.

Soit (μ_t) la première martingale d'Azéma relative à la filtration (κ_t), définie par $\mu_t = \mathrm{sgn}(B_t)(t-g_t)^{\frac{1}{2}}$. Soient de plus:

$$Y_t^+ = \int_0^t \mathbb{1}_{(\mu_{s-}>0)} d\mu_s, \qquad Y_t^- = \int_0^t \mathbb{1}_{(\mu_{s-}<0)} d\mu_s.$$

Rappelons que M^+ et M^- sont définies dans Section 2. La formule de Tanaka montre que $M_t^+ = \frac{1}{2}L_t - B_t^+$. Il déduit facilement des propriétés du méandre brownien (voir Lemme 1 de Azéma & Yor (1989)) que

$$\mathbb{E}\Big(M_t^+ \mid \kappa_t\Big) = \frac{1}{2}L_t - 1_{(B_t>0)}\sqrt{\pi(t-g_t)/2} = -\sqrt{\pi/2}Y_t^+.$$

Quelques lignes de calculs montrent que

$$X_t = M_t^- + \sqrt{\pi/2}Y_t^+.$$

On déduit du lemme 3 que la projection de M^+ sur la tribu κ_t est la même que sur $\mathcal{F}_t^-$. Donc $Y_t^+ = -\sqrt{2/\pi}\mathbb{E}\Big(M_t^+ \mid \mathcal{F}_t^-\Big)$, est une $(\mathcal{F}_t^-)$-martingale. D'une part, on sait (voir Azéma & Yor (1989) ou Emery (1989)), que (μ_t) est une martingale purement discontinue par rapport à la filtration (κ_t). Il en découle que (Y_t^+) en est aussi une. Donc on a, d'après la formule d'Itô-Meyer (Voir Meyer (1976)),

$$Y_t^{+^2} - \sum_{s\le t}(\Delta Y_s^+)^2 = 2\int_0^t Y_{s-}^+ dY_s^+,$$

qui est aussi, d'après le calcul précédent, une $(\mathcal{F}_t^-)$-martingale. On en déduit que, par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t^-)$, $[Y^+, Y^+]_t = \sum_{s\le t}(\Delta Y_s^+)^2$, et il s'en suit que Y^+ est une $(\mathcal{F}_t^-)$-martingale purement discontinue. De la même manière, on peut démontrer que Y^- est une $(\mathcal{F}_t^+)$-martingale purement discontinue. Rappelons que $X_t = M_t^- + \sqrt{\pi/2}Y_t^+$, on en déduit que X est bien une $\mathcal{F}^-$-martingale. Pour finir la démonstration du Théorème, il suffit de montrer qu'il existe une famille dense de $\mathcal{F}^-$-martingales qui peuvent s'écrire comme intégrales stochastiques par rapport à la martingale X. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+, ds)$; On pose

$$N_t = \exp\left(\int_0^t f(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)ds\right)$$

et

$$N_t^{+,-} = \exp\left(\int_0^t f(s)\mathbb{1}_{(B_s\in\mathbb{R}_{+,-})}dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)\mathbb{1}_{(B_s\in\mathbb{R}_{+,-})}ds\right),$$

avec les notations évidentes. Il suffit de montrer que la martingale $\mathbb{E}(N_t \mid \mathcal{F}_t^-)$ vérifie l'assertion du théorème. En fait,

$$\mathbb{E}(N_t \mid \mathcal{F}_t^-) = N_t^-\mathbb{E}(N_t^+ \mid \mathcal{F}_t^-),$$

et $N_t^- = 1+\int_0^t N_s^- f(s)\mathbb{1}_{(B_s\in\mathbb{R}_-)}dB_s = 1+\int_0^t N_s^- f(s)dM_s^-$. Remarquons que $M_t^- = \int_0^t \mathbb{1}_{(X_{s-}<0)}dX_s$, et $Y_t^+ = \sqrt{2/\pi}\int_0^t \mathbb{1}_{(X_{s-}\geq 0)}dX_s$. En s'appuyant sur la formule d'Itô-Meyer (voir Meyer (1976)), il ne reste qu'à prouver l'existence d'un processus (n_s) κ-prévisible tel que:

$$\mathbb{E}(N_t^+ \mid \mathcal{F}_t^-) = 1 + \int_0^t n_s dY_s^+.$$

Pour montrer ceci, utilisons le lemme 3:

$$\mathbb{E}(N_t^+ \mid \mathcal{F}_t^-) = \mathbb{E}(N_t^+ \mid \kappa_t) = 1 + \int_0^t z_s d\mu_s,$$

pour un processus (z_s) qui est κ-prévisible avec $\mathbb{E}(\int_0^\infty (z_s)^2 ds) < +\infty$, où on a utilisé la propriété de représentation prévisible de la martingale d'Azéma (μ_t) par rapport à la filtration (κ_t) (de plus, (μ_t) admet la propriété de représentation chaotique, voir Azéma & Yor (1989) ou Emery (1989)). Comme Y^- est une $(\mathcal{F}_t^+)$-martingale purement discontinue, et que N^+ est une $(\mathcal{F}_t^+)$-martingale continue, on a

$$\mathbb{E}\Big(N_t^+ \int_0^t z_s dY_s^-\Big) = 0.$$

Or,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(N_t^+ \int_0^t z_s dY_s^-\Big) &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(N_t^+ \mid \mathcal{F}_t^-)\int_0^t z_s dY_s^-\Big)\\ &= \mathbb{E}\int_0^t z_s^2 \mathbb{1}_{(\mu_{s-}<0)} ds.\end{aligned}$$

D'où $\mathbb{E}\int_0^t z_s^2\mathbb{1}_{(\mu_{s-}<0)}ds = 0$. On en déduit que $\mathbb{E}(N_t^+ \mid \mathcal{F}_t^-) = 1 + \int_0^t n_s dY_s^+$, avec $n_s = z_s 1_{(\mu_{s-}>0)}$. D'où le résultat cherché. □

Bibliographie:

J. Azéma & C. Rainer. (1994). Sur l'équation de structure $d[X,X]_t = dt - X_{t-}^+ dX_t$. *Séminaire de Probabilités XXVIII* (Eds: J. Azéma, P.-A. Meyer & M. Yor) Lecture Notes in Maths. 1583 pp. 236-255. Springer Berlin.

J. Azéma & M. Yor. (1989). Etude d'une martingale remarquable. *Séminaire de Probabilités XXIII* (Eds: J. Azéma, P.-A. Meyer & M. Yor) Lecture Notes in Maths.1372 pp. 88-130. Springer Berlin.

M. T. Barlow. (1988). Skew Brownian motion and a one-dimensional stochastic differential equation. *Stochastics* 25 1-2.

M. Chaleyat-Maurel & M. Yor. (1978). Les filtrations de $|X|$ et X^+, lorsque X est une semimartingale continue. *Astérisque 52-53* pp.193-196.

N. El Karoui & M. Chayelat-Maurel. (1978). Un problème de réflexion et ses applications au temps local et aux équations différentielles stochastiques sur $\mathbb{R}$, cas continu. *Astérisque 52-53* pp. 117-144.

M. Emery. (1989). On the Azéma martingales. *Séminaire de Probabilités XXIII* (Eds: J. Azéma, P.-A. Meyer & M. Yor) Lecture Notes in Maths.1372 pp. 66-87. Springer Berlin.

I. Karatzas & S.E. Shreve. (1988). *Brownian Motion and stochastic calculus.* Springer, Berlin.

F.B. Knight. (1970). A reduction of continuous square-integrable martingales to Brownian motion. *Lecture notes in Mathematics, vol.190.* pp. 19-31. Springer, Berlin.

F.B. Knight. (1987). On the invertibility of martingale time changes. *Seminar on Stochastic Processes.* 1987. pp.193-221. Birkhäuser, Basel 1988.

D. Lane. (1978). On the fields of some Brownian martingales. *The Annals of Probability* Vol. 6, No. 3, pp. 499-506.

P.A. Meyer. (1976). Un cours sur les intégrales stochastiques. *Séminaire de Probabilités X.* Lecture Notes in Maths. 511. pp. 245-400. Springer, Berlin.

D. Stroock & M. Yor. (1981). Some remarkable martingales. *Séminaire de Probabilités XV.* Lecture Notes in Maths. 850. pp. 590-603. Springer, Berlin.