SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JACQUES AZÉMA
CATHERINE RAINER

Sur l'équation de structure $d[X,X]_t = dt - X_{t-}^{+} dX_t$

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 28 (1994), p. 236-255
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1994__28__236_0>

Sur l'équation de structure $d[X,X]_t = dt - X_{t-}^{+} dX_t$

Jacques Azéma et Catherine Rainer

Laboratoire de Probabilités - Université Paris VI - 4, place Jussieu - Tour 56 - 3ème Etage - 75252 PARIS CEDEX 05

1. Introduction et notations.

Emery a introduit en [8] un nouveau type d'équations stochastiques, appelées équations de structure, dont il a montré l'importance pour les problèmes de représentations prévisibles et chaotiques. On doit à Meyer [12] un théorème général d'existence de solutions, mais, hormis le cas linéaire complètement traité par Emery, on ne sait pas grand chose sur leur unicité. De plus, les solutions explicites se comptent sur les doigts. Nous donnons aux paragraphes 2 et 3 deux nouveaux exemples d'équations d'Emery pour lesquelles on peut prouver l'unicité en loi des solutions et en donner une construction simple. Au chapitre 4, on déduit de ces résultats l'application suivante : la filtration naturelle engendrée par la partie négative d'un mouvement brownien possède la propriété de représentation prévisible relativement à une martingale (donnée par la formule *(16)*) qui possède une composante continue et une composante purement discontinue non triviales. Nous n'avons pas abordé les problèmes de représentations chaotiques qui restent ouverts.

C'est grâce à une remarque distraite de Biane que nous nous sommes aperçus que nous étions en train de résoudre l'équation figurant dans le titre, et à une note de Yor [16], que nous avons pu donner la forme précise de sa solution. Les idées ayant conduit aux démonstrations d'unicité sont dues au second des deux auteurs, le rôle du premier s'étant le plus souvent limité à une assistance technique acrimonieuse.

Nous reprendrons les notations de [6] relatives aux ensembles aléatoires: Si H est un fermé optionnel, on notera

$$G_t = \sup\{s \le t \ ; \ s \in H\}, \qquad g_t = \sup\{s < t \ ; \ s \in H\},$$
$$D_t = \inf\{s > t \ ; \ s \in H\}, \qquad D_t = \inf\{s > t \ ; \ s \in H\}.$$

$\mathbb{G}$ (resp. $\mathbb{D}$) l'ensemble des extrémités gauches (resp. droites) des intervalles contigus à H.

L'ensemble H variera de paragraphe en paragraphe, entraînant avec lui les notations précédentes.

Dans l'expression "filtration naturelle engendrée par un processus", il sera entendu que la filtration a été régularisée à droite et complétée.

2. L'équation de structure

$$d[X,X]_t = dt - (X_{t-} - I_{t-})dX_t \qquad (1)$$

Nous nous proposons de montrer que l'équation *(1)*, où (X_t) désigne la martingale inconnue et où $I_t = \inf_{s \le t}(X_s)$, a une solution unique en loi sous la condition initiale $X_o = 0$.

2.1. Construction d'une solution.

Soit (β_t) un mouvement brownien unidimensionnel standard ; posons $H = \{t \; ; \; \beta_t = 0\}$. On sait ([1], [5], [8]) que

$$\mu_t = \operatorname{sgn}(\beta_t) \sqrt{2(t-G_t)} \qquad (2)$$

est une martingale relativement à sa filtration naturelle satisfaisant à l'équation de structure $d[\mu,\mu]_t = dt - \mu_{t-} \, d\mu_t$.

Appelons (λ_t) le temps local en 0 de (μ_t) (c'est le temps local du brownien multiplié par $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$). Posons

$$X_t = |\mu_t| - \lambda_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(\mu_{s-}) d\mu_s \qquad (3)$$

On montre sans peine que (X_t) est solution de *(1)*. On a en effet

$$d[X,X]_t = d[\mu,\mu]_t = dt - \mu_{t-} \operatorname{sgn}(\mu_{t-})dX_t = dt - |\mu_{t-}|dX_t.$$

Mais, en vertu du Lemme de Skorokhod, (cf. appendice A.1.),

$$|\mu_{t-}| = X_{t-} + \lambda_{t-} = X_{t-} - I_{t-} \,,$$ d'où le résultat.

2.2. Unicité.

Soit (X_t) une solution de *(1)* ; on pose

$$H = \{t \; ; \; X_t = I_t\} \; ; \quad H' = \{t \; ; \; X_{t-} = I_{t-}\} \; ; \; Y_t = X_t - I_t.$$

2.2.1. Proposition : *(I_t) est continu, $(-dI_t)$ est portée par H ; H est un fermé parfait égal à $\overline{H'}$.*

Démonstration : Soit t un temps de saut de (X_t) ; d'après ([8]) on a $\Delta X_t = -(X_{t-} - I_{t-})$ et, par conséquent, $X_t = I_{t-} = I_t$. On en tire plusieurs conséquences. Tout d'abord les inclusions

$$\{t \; ; \; I_t < I_{t-}\} \subset \{t \; ; \; \Delta X_t = 0\} \subset \{t \; ; \; I_t = I_{t-}\}$$

qui ne peuvent être satisfaites que si (I_t) est continu.

En second lieu, l'inclusion $H^c \subset \{t \; ; \; \Delta X_t = 0\} \cap \{t \; ; \; \Delta I_t = 0\}$, qui montre que H^c est ouvert et contenu dans H'^c ; H est donc un fermé contenant H'. Tout point de H^c, qui est un point de continuité de (X_t) et (I_t), est contenu dans un palier de (I_t), ce qui prouve la deuxième assertion. Intéressons-nous maintenant à Y_t qui s'écrit $X_t - I_t$, où (X_t) est une martingale continue à droite et $(-I_t)$ un processus croissant continu tel que $(-dI_t)$ est porté par l'ensemble des zéros de (Y_t). Dans une telle situation ([4], début de la proposition 2.5, p. 253), $\mathbb{G}$ évite les temps d'arrêt, de sorte que H est parfait ; comme $H\text{-}H' = \{t \; ; \; \Delta X_t \neq 0\}$ est mince, on a bien $H = \overline{H'}$.

Nous allons maintenant, grâce au procédé de balayage décrit en [6] p.153 dont nous conservons les notations (cf. A.2.), retourner "une fois sur deux" les excursions de (Y_t) de manière à obtenir une martingale connue. Prenons pour (ξ_n) une suite de variables de Bernoulli symétriques à valeurs dans $\{-1,+1\}$; on posera $U'_t = U_t + 1_{H-\mathbb{G}}(t)$ de sorte que $|U'_t| = 1$. Comme (U'_t) est progressif et vérifie

$$U'_t Y_t = U_t Y_t = Z_t \,, \qquad (4)$$

on peut appliquer la formule du balayage de [14] et écrire

$$Z_t = U'_t Y_t = \int_0^t u_s dY_s + A_t$$

où (u_t) désigne la projection prévisible de (U'_{g_t}) et (A_t) un processus croissant continu tel que (dA_t) soit porté par H.

Posons $\dot{J} = \{t \; ; \; |u_t| \neq 1\}$; $\dot{J}$ est contenu dans $\{t \; ; \; u_t \neq U'_{g_t}\}$ et est donc de mesure de Lebesgue nulle. On a alors, puisque $\dot{J}$ est prévisible,

$$E\left[\int_{\dot{J}} d[Y,Y]_s\right] = E\left[\int_{\dot{J}} ds\right] = 0,$$

ce qui conduit aux égalités

$$[Z,Z]_t = \int_0^t u_s^2 \, d[Y,Y]_s = [Y,Y]_t = [X,X]_t. \qquad (5)$$

2.2.2. <u>Proposition</u> : *(Z_t) a même loi que la martingale (μ_t) définie par (2).*

<u>Démonstration</u> : D'après les résultats d'unicité montrés par Emery dans [8], il suffit de montrer que (Z_t) est solution de l'équation de structure

$$d[Z,Z]_t = dt - Z_{t-}dZ_t.$$

On a les égalités

$$\begin{aligned} d[Z,Z]_t = d[X,X]_t &= dt - (X_{t-} - I_{t-})dX_t = dt - Y_{t-}\,dX_t \\ &= dt - (dY_t + dI_t)Y_{t-} = dt - Y_{t-}\,dY_t. \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $Y_{t-}\,dY_t = Z_{t-}\,dZ_t$, ce qui résulte immédiatement de la formule d'Itô et des égalités $Y_t^2 = Z_t^2$, $[Y,Y]_t = [Z,Z]_t$.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver l'unicité en loi des solutions de (1).

2.2.3. <u>Théorème</u> : *Toute solution de l'équation (1) a pour loi celle du processus $(|\mu_t| - \lambda_t)$.*

<u>Démonstration</u> : La structure des discontinuités de (Z_t) permet d'écrire la formule de Meyer-Tanaka sous la forme simplifiée

$$|Z_t| = Y_t = \int_0^t \mathrm{sgn}(Z_{s-})dZ_s + V_t \qquad (6)$$

où (V_t) désigne le temps local en zéro de la $(\mathcal{H}_t)$-martingale (Z_t) (cf. Appendice A.2.). Rappelons d'autre part l'égalité

$$Y_t = X_t - I_t. \tag{7}$$

De *(6)* et *(7)*, nous allons tirer l'égalité $X_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(Z_{s-})dZ_s$; s'il en est ainsi, la loi de (X_t) sera déterminée par celle de (Z_t), ce qui, compte tenu de la proposition précédente, montrera le résultat.

Cela est, bien sûr, une conséquence de l'unicité de la décomposition de Doob-Meyer de (Y_t) dans la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t(X))$ engendrée par (X_t). Mais, pour pouvoir utiliser cet argument, il nous faut montrer que le processus $\left(\int_0^t \operatorname{sgn}(Z_{s-})dZ_s \;;\; t \geq 0\right)$ est une $(\mathcal{F}_t(X))$-martingale, ce qui sera le cas s'il est adapté à cette filtration. Revenons à l'égalité *(6)* et à la filtration $(\mathcal{H}_t)$. Désignons par (W_t) le temps local de (Y_t) ; on a

$$\int_0^t 1_{\{Y_{s-}>0\}}dY_s + \frac{W_t}{2} = Y_t^+ = Y_t = \int_0^t 1_{\{Y_{s-}\geq 0\}}dY_s \;; \qquad \text{si bien que}$$

$$\frac{1}{2} W_t = \int_0^t 1_{\{Y_{s-}=0\}}dY_s = \int_0^t 1_{\{Y_{s-}=0\}} [\operatorname{sgn}(Z_{s-})dZ_s + dV_s]$$

$$= V_t + \int_0^t 1_{\{Y_{s-}=0\}}\operatorname{sgn}(Z_{s-})dZ_s = V_t.$$

(En effet, le crochet associé à la dernière intégrale stochastique est nul.)

(V_t) est donc adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t(Y))$, a fortiori à $(\mathcal{F}_t(X))$. Il en est de même pour $\left(\int_0^t \operatorname{sgn}(Z_{s-})dZ_s \;;\; t \geq 0\right)$.

2.2.4. <u>*Remarque*</u> *:* Emery [8], en utilisant les résultats d'extrémalité de Jacod-Yor [11], fait remarquer que l'unicité en loi des solutions d'une équation de structure a pour conséquence une propriété de représentation prévisible; dans notre cas, il en résulte que la martingale $(\sqrt{2(t-G_t)} - \lambda_t)$ possède la propriété de représentation prévisible relativement à sa filtration naturelle, résultat déjà connu ([2], [10]).

3. L'équation de structure

$$d[X,X]_t = dt - X^+_{t-}dX_t. \qquad (8)$$

3.1. *Construction d'une solution.*

Ce paragraphe est en principe inutile ; grâce à un résultat général de Meyer [12], on connaît l'existence de solutions à une telle équation. Il nous a néanmoins paru intéressant de construire explicitement une solution à l'aide d'un mouvement brownien. Reprenons notre brownien (β_t) et l'ensemble de ses zéros H. Notons $(\mathcal{B}_t)$ sa filtration naturelle. Nous aurons à nouveau recours à la technique du balayage décrite en A.2.: choisissons une suite (ξ_n) de variables centrées équidistribuées dont la loi μ ne charge pas {0}. La suite (D_n) de variables aléatoires épuisant $\mathbb{D}$ sera constituée de $(\mathcal{B}_{G_t})$-temps d'arrêt. On posera

$$Y_t = U_t|B_t|, \quad k_t = \sqrt{\tfrac{\pi}{2}(t-G_t)}, \quad X_t = U_t^+k_t - U_t^-|B_t|.$$

La suite de ce paragraphe est consacrée à montrer que, si l'on choisit convenablement μ, (X_t) est une solution de *(8)*. Le lecteur allergique au balayage trouvera une construction assez voisine au chapitre 5.

On sait, (A.2.), que (Y_t) est une martingale ; rappelons d'autre part que (k_t) est la projection optionnelle de $(|B_t|)$ sur la filtration $(\mathcal{B}_{G_t})$ (cf.[5]). (X_t) est adapté à la filtration $(\mathcal{X}_t)$ définie par

$$\mathcal{X}_t = \sigma(U_s \; ; \; |B_s| \, 1_{\{U_s<0\}} \; ; \; s \le t).$$

Nous introduisons enfin la famille de σ-algèbres

$$\mathcal{J}_t = \mathcal{B}_{G_t} \vee \sigma(U_t) \vee \sigma(\xi_n 1_{\{D_n \le t\}} \; ; \; n \ge 0).$$

3.1.1. Lemme : $\forall t \ge 0$, $\mathcal{X}_t \cap \{U_t > 0\} \subset \mathcal{J}_t$.

Démonstration : Il s'agit de montrer que, quelque soient $s < t$, les variables aléatoires $U_s 1_{\{U_t>0\}}$ et $|B_s| \, 1_{\{U_s<0\}} 1_{\{U_t>0\}}$ sont $\mathcal{J}_t$-mesurables. Sur

$\{s \geq G_t\}$, tout est facile ; il suffit donc de se placer sur l'événement $\{s < G_t\}$ sur lequel on a

$$U_s \, 1_{\{U_t>0\}} = \sum_n \xi_n \, 1_{\{G_n \leq s < D_n\}} \, 1_{\{U_t>0\}} \, 1_{\{D_n \leq G_t\}} \, 1_{\{D_n \leq t\}}.$$

Comme $\{G_n \leq s < D_n\} \in \mathcal{B}_{D_n}$, $\{G_n \leq s < D_n\} \cap \{D_n \leq G_t\} \in \mathcal{B}_{G_t}$.

Cela montre le résultat pour la première variable aléatoire ; la seconde, qui peut s'écrire $|B_s| \, 1_{\{s<G_t\}} \, 1_{\{U_s<0\}} \, 1_{\{U_t>0\}}$, est également $\mathcal{J}_t$-mesurable.

3.1.2. <u>Proposition</u> : *(X_t) est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{X}_t)$.*

<u>Démonstration</u> : Nous allons montrer que $X_t = E[Y_t|\mathcal{X}_t]$, ce qui entraîne aisément le résultat. On a

$E[Y_t|\mathcal{X}_t] = X_t \, 1_{\{X_t<0\}} + E[|U_t|B_t \, 1_{\{U_t>0\}}|\mathcal{X}_t]$ si bien que l'on est ramené à montrer l'égalité $E[|B_t| \, 1_{\{U_t>0\}}|\mathcal{X}_t] = k_t \, 1_{\{U_t>0\}}$.

Le lemme précédent nous autorise à remplacer $\mathcal{X}_t$ par $\mathcal{J}_t$ dans l'espérance conditionnelle.

Appelons f_{G_t}, $\varphi(U_t)$, h_t, trois variables bornées mesurables respectivement par rapport aux tribus $\mathcal{B}_{G_t}$, $\sigma(U_t)$, $\sigma(\xi_n \, 1_{\{D_n \leq t\}}, n \geq 0)$.

On a, en utilisant *(20)*,

$$E[|B_t| \, 1_{\{U_t>0\}} \, \varphi(U_t) f_{G_t} h_t] = C \, E[|B_t| \, |f_{G_t} h_t], \qquad (9)$$

où C désigne la constante $\int_{\mathbb{R}_+} \varphi d\mu$.

Comme les variables D_n sont des temps d'arrêt de $(\mathcal{B}_{G_t})$,

$$\mathcal{B}_{G_t} \vee \sigma(\xi_n \, 1_{\{D_n \leq t\}} \; ; \; n \geq 0) \subset \mathcal{B}_{G_t} \vee \sigma(\xi_n \; ; \; n \geq 0).$$

Utilisant maintenant l'indépendance de $(\xi_n \; ; \; n \geq 0)$ et $\mathcal{B}_\infty$, on a

$$E[|B_t| \, |\mathcal{B}_{G_t} \vee \sigma(\xi_n \, 1_{\{D_n \leq t\}} \; ; \; n \geq 0)] = E[|B_t| \, |\mathcal{B}_{G_t}] = k_t.$$

Le second membre de *(9)* peut alors s'écrire

$$C \, E[k_t \, f_{G_t} \, h_t] = E[k_t \, 1_{\{U_t>0\}} \, \varphi(U_t) f_{G_t} h_t]$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque : Régularisons à droite et complétons la filtration $(\mathcal{X}_t)$ sans changer de notations ; (X_t) est alors la projection optionnelle de (Y_t) sur cette filtration.

3.1.3. Proposition : *Les parties continue et purement discontinue de* (X_t) *sont respectivement égales à* $\int_0^t 1_{\{X_{s-}\le 0\}} dX_s$ *et* $\int_0^t 1_{\{X_{s-}>0\}} dX_s$.

Démonstration : Appelons (α_t) et (β_t) ces deux intégrales stochastiques. Comme $\{t\ ;\ \Delta X_t \neq 0\} = \mathbb{D} \cap \{t\ ;\ X_{t-} > 0\}$, $\Delta\alpha_t = 1_{\{X_{t-}\le 0\}}\Delta X_t = 0$ de sorte que (α_t) est continue. D'autre part, si l'on note $\dot{I}_n = \{t \le n\ ;\ X_{t-} \ge \frac{1}{n}\}$, on a $\{t\ ;\ X_{t-} > 0\} = \bigcup_n \dot{I}_n$. Chaque $\dot{I}_n$ est une réunion d'intervalles stochastiques sur lesquels (X_t) est à variation finie ; il en résulte que (β_t) est purement discontinue.

3.1.4. Proposition : *On a les égalités*

$$d\langle X,X\rangle_t = dt\ U_t^2\ [1_{\{X_t\le 0\}} + \tfrac{\pi}{4}\ [1_{\{X_t>0\}}]\ , \tag{10}$$

$$d[X,X]_t = d\langle X,X\rangle_t - X_{t-}^+\ dX_t\ . \tag{11}$$

Démonstration : Appelons (Z_t) la projection optionnelle de (Y_t^2) sur la filtration $(\mathcal{X}_t)$, qu'on peut, de la même façon qu'en 3.1.2, calculer explicitement. On a

$$\begin{aligned} Z_t &= U_t^2\ E[B_t^2 | \mathcal{B}_{G_t}] 1_{\{X_t>0\}} + U_t^2\ B_t^2\ 1_{\{X_t\le 0\}} \\ &= 2U_t^2(t-G_t)\ 1_{\{X_t>0\}} + U_t^2\ B_t^2\ 1_{\{X_t\le 0\}}, \end{aligned}$$

le calcul effectif de $E[B_t^2 | \mathcal{B}_{G_t}]$ provenant de [4].

Posons alors $V_t = \overline{\lim_{s\downarrow\downarrow t}}\ [\frac{\pi}{4}\ 1_{\{X_s>0\}} + 1_{\{X_s\le 0\}}]$; (V_t) est progressif, vérifie les égalités $V_t = V_{G_t}$ et $X_t^2 = V_t Z_t$; le théorème du balayage ([14]) permet alors d'écrire

$$d(X_t^2) = V_t dZ_t + dA_t \tag{12}$$

où (A_t) est un processus à variation finie continu tel que (dA_t) soit portée par H. Posons maintenant $M_t = Z_t - \int_0^t U_s^2 ds$; (M_t), qui est la projection optionnelle de la martingale $(Y_t^2 - \langle Y,Y\rangle_t)$ sur la filtration $(\mathcal{X}_t)$, est une $(\mathcal{X}_t)$-martingale. On peut écrire *(12)* sous la forme

$$d(X_t^2) = V_t U_t^2\, dt + V_t dM_t + dA_t \text{ , si bien que}$$

$$d\langle X,X\rangle_t = V_t U_t^2 dt + dA_t.$$

Pour établir *(10)*, il nous faut montrer que (dA_t) est nulle ou, ce qui est équivalent, que $d\langle X,X\rangle_t$ ne charge pas H. Cela résulte aisément des deux observations suivantes

- D'après un résultat classique de calcul stochastique ([13]), $d\langle X^c,X^c\rangle_t$ ne charge pas $H = \{t \ ; \ X_t = 0\}$;
- $[X^d,X^d]_t = \sum_{s\le t} \Delta X_t^2$ définit une mesure aléatoire portée par l'ensemble prévisible $H^c \cup \mathbb{D}$; il en résulte que $d[X,X]_t$ a la même propriété, ainsi que sa projection duale prévisible $d\langle X,X\rangle_t$.

Passons à la démonstration de l'égalité *(11)*, qui est équivalente à

$$[X^d,X^d]_t - \langle X^d,X^d\rangle_t = -\int_0^t X_{s-}^+ \ dX_s.$$

Les deux membres sont des martingales purement discontinues qui ont mêmes sauts, ce qui achève la démonstration.

Pour obtenir une solution de l'équation *(8)*, il suffit maintenant de choisir la loi μ de façon à ce que $U_t^2[1_{\{X_t\le 0\}} + \frac{\pi}{4}\, 1_{\{X_t>0\}}] = 1$. Cela se fait en posant $\mu\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \} = \frac{\sqrt{\pi}}{2+\sqrt{\pi}}$, $\mu\{-1\} = \frac{2}{2+\sqrt{\pi}}$.

3.1.5. Interprétation heuristique de la solution.

Partant du mouvement brownien réfléchi $(|\beta_t|)$, on décide de retourner chaque excursion "avec la probabilité $\frac{2}{2+\sqrt{\pi}}$ " ; sur le processus ainsi obtenu, on laisse en l'état les excursions négatives et l'on remplace les excursions positives par $\sqrt{2(t-G_t)}$.

3.2. Unicité en loi des solutions de (8).

Soient (X_t) une solution de l'équation $d[X,X]_t = dt - X^+_{t-}dX_t$, $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration naturelle ; si t est un temps de saut de (X_t), on a (cf. [8]) $\Delta X_t = -X^+_{t-}$, ce qui entraîne $X_{t-} > 0$ et $X_t = 0$. Il est facile d'en déduire que l'ensemble $H = \{t \; ; \; X_t = 0\}$ est fermé.

Introduisons maintenant les martingales

$$M_t = \int_0^t 1_{\{X_{s-}>0\}} \, dX_s \, , \qquad N_t = -\int_0^t 1_{\{X_{s-}\leq 0\}} \, dX_s \, .$$

Toujours d'après [8], $M_t = X^d_t$, $N_t = -X^c_t$.

Compte tenu de ce que nous venons de voir sur les discontinuités de (X_t), les formules de Meyer-Tanaka s'écrivent

$$X^+_t = M_t + L_t \, , \qquad\qquad X^-_t = N_t + L_t \, ,$$

où nous avons noté (L_t) la moitié du temps local en 0 de (X_t).

Une application du lemme de Skorokhod (cf. A.1.), légitime puisque H est fermé, conduit aux égalités

$$L_t = -\inf_{s\leq t} M_s = -\inf_{s\leq t} N_s \, . \tag{13}$$

3.2.1. Proposition : *a)* $\langle M,M\rangle_\infty = \infty$ *p.s.,*

b) $\sup_t |X_t| = \infty$ *p.s.,*

c) H *est le support de* dL_t.

Démonstration : a) Comme $\langle M,M\rangle_t + \langle N,N\rangle_t = t$, il suffit de se placer sur l'événement $\{\langle N,N\rangle_\infty = \infty\}$, sur lequel $\inf_t N_t = -\infty$; (rappelons que (N_t) est continue). D'après *(13)*, il en va de même pour $\inf_t M_t$, et l'inclusion $\{\inf_t M_t = -\infty\} \subset \{\langle M,M\rangle_\infty = \infty\}$, valable pour toute martingale continue à droite, conduit au résultat.

b) Posons $T_a = \inf\{t \; ; \; X_t > a\}$; en tenant compte de la nature des discontinuités de (X_t) , on voit immédiatement que $(X_{t\wedge T_a})$ est une martingale bornée. La suite est classique : $\langle X,X\rangle_{T_a}$ est intégrable et par conséquent finie ; $\langle X,X\rangle_\infty$ est donc finie sur $\bigcup_a \{T_a = \infty\}$. Cela s'écrit encore $\{\langle X,X\rangle_\infty = \infty\} \subset \{\sup_t |X_t| = \infty\}$, et le résultat provient de ce que $\langle X,X\rangle_t = t$.

c) Puisque $\langle X,X\rangle_t = t$, H est d'intérieur vide ; d'autre part T_a est fini (d'après b)) et $|X_{T_a}| = a$. D'après le théorème 3.3 de [3], il suffit de montrer que $H \cap [0,T_a]$ est égal à son ombre optionnelle suivant la terminologie de [3], ou saturé suivant celle de [4], ce qui résulte immédiatement de la proposition 2.5 de ce dernier travail.

Nous montrerons l'unicité en procédant de la façon suivante : après avoir, à l'aide de changements de temps, transformé les martingales (M_t) et (N_t) en des martingales de lois connues, nous montrerons que la loi de (X_t) est une fonction de ces deux dernières.

Occupons nous d'abord de (M_t) et posons $C_t = \inf\{s \geq 0\ ,\ \langle M,M\rangle_s > t\}$. D'après ce qui précède, (C_t) constitue une famille strictement croissante de temps d'arrêt presque sûrement finis.

Introduisons les notations suivantes:

$$m_t = M_{C_t}\ ,\quad I_t = \inf_{s \leq t} M_s\ ,\quad i_t = \inf_{s\leq t} m_s$$

$$\bar{M}_{C_t} = M_-(C_{t-})\ ,\quad \bar{I}_{C_t} = I(C_{t-}).$$

On notera (cf. *(13)*) que (I_t) est continu ; il en est de même pour

$$\langle M,M\rangle_t = \int_0^t 1_{\{X_{s-}>0\}} ds.$$

La proposition suivante, compte tenu du résultat d'unicité vu en 2.2., montre que la loi de (m_t) est bien déterminée.

3.2.2. <u>Proposition</u> : *(m_t) est une $(\mathcal{F}_{C_t})$-martingale vérifiant l'égalité*

$$d[m,m]_t = dt - (m_{t-} - i_{t-})dm_t.$$

<u>Démonstration</u> : Soit $a > 0$; arrêtons (M_t) à C_a ; $(M_t^{C_a})$ est bornée dans L^2 tandis que $(M^2 - \langle M,M\rangle)_t^{C_a}$ est dominée dans L^1 ; de plus, si

$s \leq t \leq a$, $\quad E[m_t | \mathcal{F}_{C_s}] = E[M_{C_t}^{C_a} | \mathcal{F}_{C_s}] = M_{C_s} = m_s$.

De la même façon, $E[m_t^2 - \langle M\rangle_{C_t} | \mathcal{F}_{C_s}] = m_s^2 - \langle M\rangle_{C_s}$; on a donc montré que (m_t) est une martingale de crochet oblique t.

De plus,

$$d[M,M]_t = 1_{\{X_{t-}>0\}} (dt - X_{t-}^+ \, dX_t) = d\langle M,M\rangle_t - X_{t-}^+ \, dM_t$$

$$= d\langle M,M\rangle_t - (M_{t-} - I_t)dM_t .$$

Effectuons le changement de temps défini par (C_t) ; en se référant à ([9], p. 311-318) on a les égalités

$$\langle M,M\rangle_{C_t} = t \, , \quad [M,M]_{C_t} = [m,m]_t \, ,$$

$$\int_0^{C_t} (M_{s-} - I_{s-})dM_s = \int_0^t ({}^-M_{C_s} - {}^-I_{C_s})dm_s = \int_0^t (m_{s-} - i_{s-})dm_s \, ,$$

(nous laissons au lecteur le soin de vérifier la deuxième égalité), qui conduisent immédiatement au résultat.

Avant de poursuivre, faisons la remarque suivante : (m_t) et la martingale $(|\mu_t| - \lambda_t)$ définie en *(3)* ont même loi ; passant aux bornes inférieures, on en déduit que $(-i_t)$ et (λ_t) qui, rappelons-le, est à une constante multiplicative près, le temps local d'un brownien, ont même loi; il en résulte que $i_\infty = -\infty = I_\infty$; N étant une martingale continue, cela entraîne $\langle N,N\rangle_\infty = \infty$. Posons alors $C'_t = \inf\{s \; ; \langle N,N\rangle_\infty > t\}$, $n_t = N_{C'_t}$; il n'y a aucune difficulté à montrer que (n_t) est une $(\mathcal{F}_{C'_t})$-martingale continue de crochet oblique t. La loi de (n_t) est donc, elle aussi, bien déterminée : c'est celle d'un mouvement brownien.

La proposition suivante nous montrera que les processus (m_t) et (n_t) sont indépendants. On désignera par $(\mathcal{M}_t)$ et $(\mathcal{N}_t)$ les filtrations naturelles respectivement engendrées par ces deux processus.

3.2.3. Proposition : $\mathcal{M}_\infty$ et $\mathcal{N}_\infty$ sont indépendantes.

Démonstration : Soient f et g deux variables aléatoires appartenant respectivement à $L^2(\mathcal{M}_\infty)$ et $L^2(\mathcal{N}_\infty)$. Comme (m_t) et (n_t) possédent la propriété de représentation prévisible (cf. 2.2.4), il existe deux processus (y_t) et (z_t) respectivement $(\mathcal{M}_t)$- et $(\mathcal{N}_t)$-prévisibles vérifiant

$$E\left[\int_0^\infty y_s^2 \, d[m,m]_s\right] < \infty \,, \quad E\left[\int_0^\infty z_s^2 \, d[n,n]_s\right] < \infty$$

$$f = E[f] + \int_0^\infty y_s \, dm_s \,, \quad g = E[g] + \int_0^\infty z_s \, dn_s.$$

Il existe d'autre part (cf. [7]) deux processus $(\mathcal{F}_t)$-prévisibles (Y_t) et (Z_t) tels que $y_t = Y(C_{t-})$, $z_t = Z(C'_{t-})$, si bien que

$$f = E[f] + \int_0^\infty Y_s \, dM_s \qquad g = E[g] + \int_0^\infty Z_s \, dN_s.$$

Il est alors clair, (M_t) et (N_t) étant orthogonales, que $E[fg] = E[f]E[g]$.

Notons maintenant E l'espace des trajectoires càdlàg de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et $X : \Omega \longrightarrow E$ l'application canonique associée à (X_t).
La proposition suivante va nous montrer que la loi de (X_t) est déterminée par celles de (m_t) et (n_t), ce qui achèvera notre démonstration de l'unicité.

3.2.4. <u>Proposition</u> : *X est $\mathcal{M}_\infty \vee \mathcal{N}_\infty$-mesurable.*

<u>Démonstration</u> : Dans ce qui suit, mesurable signifiera $(\mathcal{M}_\infty \vee \mathcal{N}_\infty)$-mesurable si l'on parle d'une variable aléatoire, $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times (\mathcal{M}_\infty \vee \mathcal{N}_\infty)$-mesurable s'il s'agit d'un processus. Il suffit de raisonner à t fixé.
Posons $\ell_t = -i_t = -\inf_{s \le t} m_s$, $\ell'_t = -\inf_{s\le t} n_s$, et rappelons que $\ell_t = L_{C_t}$, $\ell'_t = L_{C'_t}$.
Nous appellerons (T_t) , (τ_t) , (τ'_t) les changements de temps associés respectivement à (L_t) , (ℓ_t) , (ℓ'_t) ; on vérifie aisément que

$$\tau_t = \langle M,M\rangle_{T_t} \,, \quad \tau'_t = \langle N,N\rangle_{T_t} \,.$$

Nous avons vu que l'ensemble $H = \{t \,;\, X_t = 0\}$ était égal au support de (dL_t) ; il en résulte que

$$T_{L_t} = D_t \,, \quad (T_-)_{L_t} = g_t \,, \tau_{L_t} = \langle M,M\rangle_{D_t} \,, \quad (\tau_-)_{L_t} = \langle M,M\rangle_{g_t} .$$

Montrons d'abord que H est mesurable ; de la relation $\langle M,M\rangle_t + \langle N,N\rangle_t = t$, on déduit l'égalité $T_t = \tau_t + \tau'_t$; (T_t) est donc mesurable, ainsi que son inverse (L_t) ; il en va de même pour H, qui est le support de (dL_t).

On peut alors écrire

$$\{X_t > 0\} = \left\{\int_0^{G_t} 1_{\{X_s>0\}}ds < \int_0^{d_t} 1_{\{X_s>0\}}ds\right\} = \left\{<M,M>_{G_t} < <M,M>_{d_t}\right\}.$$

L'événement $\{G_t \neq g_t,\ d_t \neq D_t\}$ est inclus dans $\{t \in H\}$, donc de probabilité nulle. On a donc

$$\left\{<M,M>_{G_t} < <M,M>_{d_t}\right\} \overset{ps}{=} \left\{<M,M>_{g_t} < <M,M>_{D_t}\right\} = \left\{(\tau_-)_{L_t} < \tau_{L_t}\right\};$$

et ce dernier événement est dans $\mathcal{M}_\infty \vee \mathcal{N}_\infty$.

Montrons maintenant que $X_t\, 1_{\{X_t>0\}}$ est mesurable ; cette variable s'écrit $X_t^+\, 1_{\{X_t>0\}} = (M_t+L_t)\, 1_{\{X_t>0\}}$ si bien qu'il suffit de montrer que $M_t\, 1_{\{X_t>0\}}$ est mesurable. On a

$$1_{\{X_t>0\}}\, M_t = 1_{\{X_t>0\}}\, m_{<M,M>_t}.$$

Mais, sur $\{X_t > 0\}$, $<M,M>_t = <M,M>_{g_t} + (t-g_t) = (\tau_-)_{L_t} + (t-g_t)$, et cette dernière variable aléatoire est mesurable.

On procède de la même façon pour $X_t\, 1_{\{X_t<0\}}$; X_t est donc mesurable, ce qui achève la démonstration.

On peut alors énoncer, en invoquant à nouveau le résultat d'Emery ([8])

3.2.6. Théorème : Toutes les solutions de (8) ont même loi et possèdent la propriété de représentation prévisible relativement à leur filtration naturelle.

4. La filtration naturelle engendrée par (B_t^-).

On se propose de montrer que la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$ engendrée par la partie négative (B_t^-) d'un mouvement brownien (B_t) possède la propriété de représentation prévisible. Introduisons les notations suivantes :

$$H = \{t\ ;\ B_t = 0\}\quad ,\ \dot{I} = H^c\ ,\quad \dot{I}^+ = \{t\ ;\ B_t > 0\}\ ,\ \dot{I}^- = \{t\ ;\ B_t < 0\}.$$

$\mathbb{D}^+$ désignera l'ensemble des extrémités droites des composantes connexes de $\dot{I}^+$, $\dot{J}$ l'ensemble $\dot{I}^+ + \mathbb{D}^+$.

Il est clair que $\overset{\bullet}{I}^{-}$ est prévisible ; son extérieur $\overset{\bullet}{I}^{+}$ ainsi que sa frontière H sont optionnels ; $\dot{J}$ est prévisible.

Désignons par $(\mathcal{B}_t)$ la filtration naturelle engendrée par (B_t) et introduisons, en nous inspirant de [5], la filtration $\mathcal{G}_t = \mathcal{B}_{G_t} \vee \mathrm{sgn}(B_t)$. On complète et régularise à droite sans changer de notations.

Si $(\mathcal{A}_t)$ est une filtration on désignera respectivement par $p_{\mathcal{A}}$, $\dot{p}_{\mathcal{A}}$, $\overset{*}{p}_{\mathcal{A}}$ les opérateurs de projection optionnelle, prévisible, duale prévisible relatifs à cette filtration. On démontre aisément que

$$\forall t \geq 0 \qquad \mathcal{F}_t \cap \{B_t > 0\} \subset \mathcal{G}_t \cap \{B_t > 0\} \ ;$$

les raisonnements habituels de la théorie générale des processus conduisent alors aux égalités

$$p_{\mathcal{F}}(Z\, 1_{\overset{\bullet}{I}^{+}}) = p_{\mathcal{F}}\, p_{\mathcal{G}}(Z\, 1_{I^{+}}) = p_{\mathcal{G}}\, p_{\mathcal{F}}\, (Z\, 1_{\overset{\bullet}{I}^{+}}) \tag{14}$$

$$\dot{p}_{\mathcal{F}}(Z\, 1_{\dot{J}}) = \dot{p}_{\mathcal{F}}\, \dot{p}_{\mathcal{G}}(Z\, 1_{\dot{J}}) = \dot{p}_{\mathcal{G}}\, \dot{p}_{\mathcal{F}}\, (Z\, 1_{\dot{J}})$$

quelque soit le processus Z mesurable borné. De la seconde ligne, on tire par dualité

$$\overset{*}{p}_{\mathcal{F}}\, (1_{\dot{J}} dA) = \overset{*}{p}_{\mathcal{F}}\, \overset{*}{p}_{\mathcal{G}}(1_{\dot{J}} dA) \tag{15}$$

quelque soit A processus croissant brut positif.

Notre martingale de base sera $b_t = p_{\mathcal{F}}(B_t)$; on sait que $p_{\mathcal{G}}(B_t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}\,(t-G_t)}$; une application de *(14)* permet d'écrire de façon explicite :

$$b_t = \sqrt{\frac{\pi}{2}\,(t-G_t)}\; 1_{\{B_t>0\}} + B_t\, 1_{\{B_t<0\}}. \tag{16}$$

D'autre part, on sait (cf. [5]) que $\overset{*}{p}_{\mathcal{G}}(dG_t) = \frac{dt}{2}$; on a donc, en utilisant *(15)*,

$$\overset{*}{p}_{\mathcal{F}}(1_{\dot{J}}\; dG_t) = 1_{\{B_t>0\}}\, \frac{dt}{2}\,. \tag{17}$$

4.1. <u>*Proposition*</u> *: On a les égalités*

$$\langle b,b\rangle_t = \int_0^t [1_{\{B_s<0\}} + \frac{\pi}{4}\, 1_{\{B_s>0\}}]ds\,, \tag{18}$$

$$d[b,b]_t = d\langle b,b\rangle_t - b^{+}_{t-}\, db_t\,. \tag{19}$$

<u>Démonstration</u> : Posons $B_t^{(+)} = B^{+} - \frac{1}{2} L_t$, $B_t^{(-)} = B^{-} - \frac{1}{2} L_t$,

$$b_t^{(+)} = p_{\mathcal{F}}(B_t^{(+)})\,, \quad b_t^{(-)} = p_{\mathcal{F}}(B_t^{(-)})\,,$$

(L_t) désignant le temps local en zéro de (B_t).

$(B_t^{(-)})$ et $\left((B_t^{(-)})^2 - \int_0^t 1_{\{B_s<0\}}\, ds\right)$ sont des $(\mathcal{B}_t)$-martingales adaptées à $(\mathcal{F}_t)$; ce sont donc des $(\mathcal{F}_t)$-martingales, ce qui permet d'écrire :

$$b_t^{(-)} = B_t^{(-)}, \qquad \langle b^{(-)},b^{(-)}\rangle_t = \int_0^t 1_{\{B_s<0\}}ds.$$

D'autre part une application immédiate de *(14)* conduit à l'égalité

$$b_t^{(+)} = 1_{\{B_t>0\}} \sqrt{\frac{\pi}{2}\,(t-G_t)} - \frac{1}{2}\,L_t \ ;$$

il s'ensuit que $b_t^{(+)}$ est purement discontinue. On a donc

$$[b^{(+)},b^{(+)}]_t = \frac{\pi}{2} \sum_{\substack{s\in\mathbb{D}^+\\ s\le t}} (s-g_s) = \frac{\pi}{2} \int_0^t 1_J(s)dG_s.$$

Appliquant l'opérateur $p^*_{\mathcal{F}}$, on obtient, compte tenu de *(17)*

$$\langle b^{(+)},b^{(+)}\rangle_t = \frac{\pi}{4} \int_0^t 1_{\{B_s>0\}}ds.$$

Comme $b^{(+)}$ et $b^{(-)}$ sont orthogonales,

$$\langle b,b\rangle_t = \langle b^{(-)},b^{(-)}\rangle_t + \langle b^{(+)},b^{(+-)}\rangle_t,$$

ce qui conduit à *(18)* ; *(19)* s'obtient en remarquant que les deux martingales purement discontinues $([b,b]_t - \langle b,b\rangle_t)$ et $\left(\int_0^t b_{s-}^+\, db_s\right)$ ont mêmes sauts.

4.2. Théorème : (b_t) possède la propriété de représentation prévisible.

Démonstration : $(\langle b,b\rangle_t)$ est un processus strictement croissant continu ainsi que le changement de temps $C_t = \langle b,b\rangle_t^{-1}$ qui lui est associé.

Posons $X_t = b_{C_t}$, on a

$$C_t = \int_0^t ds \left[1_{\{b_{C_s}<0\}} + \frac{4}{\pi}\, 1_{\{b_{C_s}>0\}}\right] = \int_0^t ds \left[1_{\{X_s<0\}} + \frac{4}{\pi}\, 1_{\{X_s>0\}}\right].$$

(C_t) est donc adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t^X)$ engendrée par (X_t), ce qui permet d'affirmer (cf. [17]) que $\mathcal{F}_t^X = \mathcal{F}_{C_t}$.

Après changement de temps, l'égalité *(19)* s'écrit $d[X,X]_t = dt - X_{t-}^+\, dX_t$, si bien que (X_t) possède la propriété de représentation prévisible relativement à $(\mathcal{F}_{C_t})$. Le reste va de soi : si (M_t) est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale bornée dans L^2, (M_{C_t}) est une $(\mathcal{F}_{C_t})$-martingale que l'on peut écrire comme une intégrale stochastique relativement à (X_t). Le résultat s'obtient en procédant au changement de temps inverse.

5. Relation avec le "skew brownian motion".

Le lecteur aura noté que le processus $X_t = b_{C_t}$ construit au chapitre 4. est une solution de l'équation de structure *(8)*, qui a été obtenue en faisant subir successivement à un mouvement brownien

a) une projection sur la tribu optionnelle relative à la filtration naturelle engendrée par (B_t^-),

b) un changement de temps .

Il n'est pas diffcile de voir que ces deux opérations commutent (on trouvera plus de détails dans la thèse à paraître du second auteur). Si l'on commence par l'opération b), on se trouve en présence d'un "skew-brownian motion mis à l'échelle naturelle" (cf. [15] exercice 2.24 p.390). Il en résulte de là que l'on peut construire une solution de *(8)* de la façon suivante :

5.1. Proposition : Soit (ξ_t) un "skew brownian motion" d'indice $\frac{\sqrt{\pi}}{2+\sqrt{\pi}}$;

on pose $s(x) = x\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} 1_{\mathbb{R}_+}(x) + 1_{\mathbb{R}_-}(x)\right)$, $H = \{t\ ;\ \xi_t = 0\}$.

$\eta_t = s(\xi_t)$ est une martingale, la projection (X_t) de (η_t) sur la tribu optionnelle relative à la filtration naturelle engendrée par (ξ_t^-) est une solution de l'équation (8) ; son écriture explicite est

$$X_t = \sqrt{2(t-G_t)}\, 1_{\{\xi_t>0\}} + \xi_t\, 1_{\{\xi_t<0\}}\ .$$

Appendice A.1. : Le Lemme de Skorokhod.

Le résultat qui suit est dû à Skorokhod qui l'a énoncé pour des fonctions continues ; nous aurons besoin de la légère extension suivante:

<u>*Proposition*</u> : *Soit* $m : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction nulle à l'origine ; on pose* $i(t) = \inf_{s \leq t} m(s)$. *S'il existe une fonction* ℓ *continue à droite, croissante, nulle à l'origine telle que*

(i) $m + \ell \geq 0$,

(ii) $m + \ell = 0$ *sur le support de* $d\ell$,

alors $\ell = -i$.

<u>Remarque</u> : Posons $H = \{t \; ; \; m(t) + \ell(t) = 0\}$. Si l'on sait que H est fermé, *(ii)* peut être remplacé par la condition équivalente : $d\ell$ est portée par H.

<u>Démonstration</u> :

a) Si $s \leq t$, $m(s) \geq -\ell(s) \geq -\ell(t)$, d'où $i(t) \geq -\ell(t)$.

b) Posons $\gamma(t) = \sup\{s \leq t \; ; \; s \in S(d\ell)\}$ où $S(d\ell)$ désigne le support de $d\ell$; on a, pour tout $s \leq \gamma(t)$,

$$m(\gamma(t)) = -\ell(\gamma(t)) \leq -\ell(s) \leq m(s).$$

Il en résulte que $i(\gamma(t)) = m(\gamma(t))$; on écrit ensuite

$$i(t) \leq i(\gamma(t)) = m(\gamma(t)) = -\ell(\gamma(t)) = -\ell(t),$$

d'où le résultat.

<u>Appendice A.2.</u> : <u>Sur le balayage.</u>

Soient H un fermé optionnel, (Y_t) un processus continu à droite limité à gauche. On pose $H' = \{t \; ; \; Y_{t-} = 0\}$; on suppose que (Y_t) est une martingale relative droite associée à H' ([6] § 31, p. 146) et que $H = \overline{H'}$. On peut transformer (Y_t) en une vraie martingale par l'opération de balayage décrite en ([6], § 45, p. 153) ou [3]. Nous rappelons ici de quoi il s'agit en rectifiant des erreurs de détail qui se sont glissées dans la démonstration. (ξ_n), μ, (G_n), (D_n), $(\mathcal{G}_t)$, $(\mathcal{H}_t)$, (U_t) , auront la même signification qu'en [6]. Le début de la démonstration conduit à l'égalité

$$1_{R_t} E[\varphi(U_t) | \mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{G}_t] = 1_{R_t} \mu(\varphi), \qquad (20)$$

où R_t désigne l'événement $\{t \in H^c \cup \mathbb{G}\}$. Poursuivant le raisonnement, on arrive à la relation

$$1_{R_t} E[f | \mathcal{H}_t] = 1_{R_t} E[f | \mathcal{F}_t] \quad \forall f \; \mathcal{F}_\infty\text{-mesurable bornée.}$$

Il faut ensuite montrer que (Y_t) reste une martingale relative dans la filtration $(\mathcal{F}_t)$; on a si $s < t$

$$E[Y_t\, 1_{\{G_t \le s\}} | \mathcal{H}_s] = E[Y_t\, 1_{\{G_t \le s\}} 1_{R_s} | \mathcal{H}_s] = 1_{R_s}\, Y_s = Y_s\ ,$$

la première égalité venant de ce que $\{G_t \le s\} \subset R_s$, et la dernière de ce que $Y_s = 0$ sur R_s^c. Posant maintenant $Z_t = U_t Y_t$, on montre de la même façon que $P[Z_t\, 1_{\{G_t > s\}} | \mathcal{H}_s] = 0$, si bien que (Z_t) est une $(\mathcal{H}_t)$-martingale.

Bibliographie

[1] **J. Azéma** : Sur les fermés aléatoires. *Séminaire de Probabilités XIX, Lecture Notes in Maths. 1123, Springer (1985).*

[2] **J. Azéma et K. Hamza** : La propriété de représentation prévisible dans la filtration naturelle d'un ensemble régénératif. *Séminaire de Probabilités XXIII, Lecture Notes in Maths. 1372, Springer (1989).*

[3] **J. Azéma, P.A. Meyer et M. Yor** : Martingales relatives. *Séminaire de Probabilités XXVI, Lecture Notes in Maths. 1526, Springer (1992).*

[4] **J. Azéma et M. Yor** : Sur les zéros d'une martingale continue. *Séminaire de Probabilités XXVI, Lecture Notes in Maths. 1526, Springer (1992).*

[5] **J. Azéma et M. Yor** : Etude d'une martingale remarquable. *Séminaire de Probabilités XXIII, Lecture Notes in Maths. 1372, Springer (1989).*

[6] **C. Dellacherie, B. Maisonneuve et P.A. Meyer** : Probabilités et Potentiel. *Chapitres XVII à XXI. Hermann (1992).*

[7] **N. El Karoui et P.A. Meyer** : Les changements de temps en théorie générale des processus. *Séminaire de Probabilités XI, Lecture Notes in Maths. 581, Springer (1977).*

[8] **M. Emery** : On the Azéma martingales. *Séminaire de Probabilités XXIII, Lecture Notes in Maths. 1372, Springer (1989).*

[9] **J. Jacod** : Calcul stochastique et problèmes de martingales. *Lecture Notes in Maths. 714, Springer (1979).*

[10] J. Jacod et J. Mémin : Un théorème de représentation des martingales pour les ensembles régénératifs. *Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Maths. 511, Springer (1979).*

[11] J. Jacod et M. Yor : Etude des solutions extrémales et représentation intégrale des solutions pour certains problèmes de martingales. *Z.W. 38, p. 83-125, (1977).*

[12] P.A. Meyer : Construction de solutions d'équations de structure. *Séminaire de Probabilités XXIII, Lecture Notes in Maths. 1372, Springer (1989).*

[13] P.A. Meyer : Un cours sur les intégrales stochastiques. *Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Maths. 511, Springer (1976).*

[14] P.A. Meyer, C. Stricker et M. Yor : Sur une formule de la théorie du balayage. *Séminaire de Probabilités XIII, Lecture Notes in Maths. 721, Springer (1979).*

[15] D. Revuz and M. Yor : Continuous martingales and Brownian motion. *Springer (1991).*

[16] M. Yor : Une martingale d'Azéma asymétrique. *Note non publiée (1993).*

[17] J. Azéma, C. Rainer et M. Yor : Martingales continues et derniers zéros. En préparation (1994).