

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

SHIQI SONG

Inégalités relatives aux processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n paramètres et capacité gaussienne $C_{n,2}$

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 27 (1993), p. 276-301

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__276_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**INEGALITES RELATIVES AUX
PROCESSUS D'ORNSTEIN-UHLENBECK A n-PARAMETRES
ET CAPACITE GAUSSIENNE $c_{n,2}$**

Shiqi SONG
Equipe d'Analyse et Probabilités
Université Evry Val d'Essonne
Boulevard des Coquibus
91025 EVRY CEDEX FRANCE

Abstract

Let $Z^{(n)}$ be the n-parameters Ornstein-Uhlenbeck process on a separable Fréchet gaussian space (E, μ) . We consider the Sobolev space $W^{n,2}$ and the associated Gaussian capacity $c_{n,2}$. We prove two inequalities of the following type:

$$\| \sup_{t \in \mathbb{R}_+^n} e^{-|t|} |u|(Z_t^{(n)}) \|_2 \leq C_n c_{n,2}(u),$$

$$\| \sup_{t \in \mathbb{R}_+^n} \left| \int_{s \in [0,t]} e^{-s} f(Z_s^{(n)}) ds \right| \|_2 \leq C_n \|U^n f\|_2.$$

These inequalities are used to give probabilistic representations for measures which belong to the dual space of $W^{n,2}$ and such representations permit us to prove that a Borel subset B of E has null $c_{n,2}$ -capacity if and only if $Z^{(n)}$ can not hit it.

§1 Introduction

Etant donné un espace de Fréchet séparable E muni d'une mesure gaussienne centrée μ (définie sur les ensembles boréliens de E), le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck $(Q_t)_{t \geq 0}$ sur (E, μ) est défini par la formule de Mehler (voir Meyer [9]) :

$$Q_t f(x) = \int f[x e^{-t} + y c_t] \mu(dy), \quad x \in E, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

où f désigne une fonction borélienne bornée, et $c_t = \sqrt{1 - e^{-2t}}$. Ce semigroupe (Q_t) est symétrique par rapport à la mesure μ et il définit des semigroupes sur $L^p(E, \mu)$ pour tout $p > 1$. En relation avec le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck (Q_t) , nous introduisons l'opérateur de noyau :

$$Uf(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} Q_t f(x) dt, \quad x \in E,$$

pour toute fonction $f \in \bigcup_{p>1} L^p(E, \mu)$. Soient r un nombre naturel et $p > 1$ un nombre réel, nous désignons par $W^{r,p}$ l'ensemble de fonctions de la forme $U^r f$ avec $f \in L^p(E, \mu)$ muni de la norme $N_{r,p}(U^r f) = N_p(f)$, où $N_p(f)$ indique la norme usuelle de $L^p(E, \mu)$. Nous introduisons ensuite la capacité $c_{r,p}$: pour une fonction f s.c.i. positive ou nulle,

$$c_{r,p}(f) = \inf \{ N_{r,p}(h) ; h \geq f \text{ presque partout, } h \in W^{r,p} \},$$

et pour une fonction g quelconque,

$$c_{r,p}(g) = \inf \{ c_{r,p}(f) ; f \geq |g| \text{ partout, } f \text{ fonction s.c.i.} \}.$$

Rappelons que $c_{r,p}$ est une (semi-)norme. Un ensemble $A \subset E$ est dit de $c_{r,p}$ -capacité nulle, si $c_{r,p}(A) = c_{r,p}(1_A) = 0$. Une fonction f sur E est dite $c_{r,p}$ -quasi-continue, s'il existe une suite de sous-ensembles fermés (F_n) de E tels que $c_{r,p}(E - F_n)$ tend vers zéro et que f est continue sur chaque F_n . Nous désignons par $L^1(E, c_{r,p})$ la fermeture, par rapport à la capacité $c_{r,p}$, de l'ensemble de fonctions continues bornées sur E . Rappelons que les fonctions de $L^1(E, c_{r,p})$ sont $c_{r,p}$ -quasi-continues (voir DeLaPradelle-Feyel [4]).

Notre travail commence par la remarque suivante : rappelons que, sur chaque espace de Fréchet gaussien séparable (E, μ) , existe un processus de Markov Z à trajectoire continue à valeurs dans E dont le semigroupe de transition est précisément le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck (Q_t) (voir par exemple Song [12]). Le processus de Markov Z est appelé le processus d'Ornstein-Uhlenbeck sur (E, μ) . Alors, quand $r = 1$ et $p = 2$, il est bien connu (voir Fukushima [5] et Albeverio-Ma-Röckner [1]) que la capacité $c_{1,2}$ a une expression probabiliste. En fait, pour tout sous-ensemble borélien $B \subset E$, il existe une fonctionnelle additive A , déterminée par l'ensemble B , du processus d'Ornstein-Uhlenbeck Z telle que

$$(0,1) \quad c_{1,2}(B)^2 = E_{\mu} [e^{-\sigma_B}] = E_{\mu} \left[\int_0^{\infty} e^{-t} dA_t \right],$$

où $\sigma_B = \inf\{t > 0; Z_t \in B\}$. Cette expression probabiliste donne en particulier le critère suivant : Un ensemble borélien B est de $c_{1,2}$ -capacité nulle si et seulement si le processus d'Ornstein-Uhlenbeck Z ne le rencontre pas. Ce critère a été utilisé en particulier dans un récent travail de Denis [3] pour étudier le temps d'atteinte de zéro d'une martingale positive ou nulle $c_{1,2}$ -quasi-continue sur un espace gaussien. On se demande alors si des expressions probabilistes du genre (0,1) existent aussi pour $c_{n,2}$ afin d'étendre l'étude de Denis [3] sur $c_{1,2}$ à $c_{n,2}$. Cette question a été l'origine du présent travail.

Rappelons que Ren [11] a déjà étudié cette question et qu'il a obtenu une réponse partielle. Son travail suggère de représenter la capacité $c_{n,2}$ par le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n -paramètres.

Nous allons présenter dans la section 2 une construction des processus d'Ornstein-Uhlenbeck à multiparamètres sur un espace de Fréchet séparable gaussien. Cette construction, nouvelle par rapport à des constructions antérieures, met en évidence la relation entre les processus d'Ornstein-Uhlenbeck à multiparamètres et le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck (Q_t) . Cette relation importante est développée davantage dans la section 3. Dans la section 4, nous démontrons l'inégalité du genre suivant :

$$(0,2) \quad N_2\left[\left(\sup_{t \in \mathbb{R}_+^n} e^{-|t|} |u|(Z_t^{(n)})\right)\right] \leq C_n c_{n,2}(u),$$

où $Z_t^{(n)}$ est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n -paramètres sur (E, μ) et

$$|t| = |(t_1, \dots, t_n)| = |t_1| + \dots + |t_n|.$$

Dans la section 5, nous démontrons une autre inégalité du genre :

$$(0,3) \quad N_2\left(\sup_{t \in \mathbb{R}_+^n} \left| \int_{s \in [0,t]} e^{-s} f(Z_s^{(n)}) ds \right| \right) \leq C_n N_2(U^n f).$$

Ces deux inégalités sont utilisées dans la section 6 pour prouver que toute mesure ν du dual de $W^{n,2}$ admet une représentation probabiliste via le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n -paramètres, à savoir :

$$\nu(f) = E_\mu \left[\int_{s \in \mathbb{R}_+^n} e^{-|s|} f(Z_s^{(n)}) A(ds) \right],$$

où A est une mesure aléatoire sur \mathbb{R}_+^n . En particulier, nous pouvons écrire pour un ensemble borélien B

$$(0,4) \quad c_{n,2}(B)^2 = E_\mu \left[\int_{s \in \mathbb{R}_+^n} e^{-|s|} U^{2n} \nu(Z_s^{(n)}) A(ds) \right],$$

où A est une mesure aléatoire sur \mathbb{R}_+^n et ν est la mesure $(n,2)$ -d'équilibre de l'ensemble B (cf. Sugita [13] et Kazumi-Shigekawa [8]). Enfin, nous terminons notre travail en démontrant dans la section 7 qu'un ensemble borélien B a une $c_{n,2}$ -capacité nulle si et seulement si le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n -paramètres ne le rencontre pas.

Remarques : 1. L'article de Ren [11] s'appuie sur l'équation différentielle stochastique qui définit le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n -paramètres. Nous prenons ici un point de vue markovien sur les processus d'Ornstein-Uhlenbeck à multiparamètres. En fait, notre méthode utilisée ici est une généralisation de celle utilisée dans Fukushima [7].

2. F.Hirsch a remarqué que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n -paramètres utilisé dans Ren [11] n'est pas le même que celui construit dans la section 2 du présent travail. F.Hirsch a également remarqué récemment qu'une représentation de notre processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n -paramètres par le drap brownien à n -paramètres existe.

3. Les processus de Markov à multiparamètres ont été beaucoup étudiés dans le contexte des points multiples (voir, par exemple, Evans [5], Fritsimmons-Salisbury [6], Dynkin [4], etc.). Sous l'hypothèse que le processus de Markov à multiparamètres X est de la forme $X = (X_{t_1}^{(1)}, \dots, X_{t_n}^{(n)})$, où $X_{t_i}^{(i)}$ sont des processus de Markov à un seul paramètre

indépendants symétriques par rapport à une mesure donnée $m^{(i)}$, dont la résolvants est absolument continue par rapport à $m^{(i)}$, on a montré que la probabilité pour X de rencontrer un ensemble peut être estimée à l'aide des mesures d'énergie finie. Notre méthode, aussi bien que nos résultats, est différente de celles utilisées dans ces travaux.

4. Etant donné un processus de Markov X à multiparamètres à valeurs dans E , il est important de déterminer les mesures ν sur E qui peuvent être représentées par des mesures aléatoires A sur \mathbb{R}_+^n , c'est-à-dire,

$$\nu(f) = E\left[\int_{s \in \mathbb{R}_+^n} e^{-|s|} f(X_s) A(ds) \right].$$

Ce problème a été traité dans Dynkin [4] pour un processus de Markov décrit dans la remarque 3. Nous montrons dans la section 6 que, pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n -paramètres $Z^{(n)}$, les mesures dans le dual de $W^{n,2}$ sont des mesures admettant une telle représentation probabiliste.

5. Il est à remarquer que les inégalités (0,2) et (0,3) sont nouvelles même dans le cas où $n = 1$. En général, on considère seulement les capacités des ensembles. Cette contrainte rend les calculs de capacités plus difficile. La notion de l'espace de Banach adapté introduite dans DeLaPradelle-Feyel [2], qui considère la capacité comme une norme sur l'ensemble de fonctions, donne plus de souplesse. En particulier, nous en avons profité pour obtenir les inégalités (0,2) et (0,3).

6. Sugita [13] a remarqué que la relation entre les $c_{n,p}$ -potentiels et les (n,p) -mesures d'équilibre n'est linéaire que lorsque $p = 2$. Le fait que seules les capacités $c_{n,2}$ sont

représentées par les processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n -paramètres est lié intrinsèquement avec la remarque de Sugita.

7. Les inégalités (0,2) et (0,3) pour $n = 2$ ont déjà été prouvées dans Song [12] avec une technique particulièrement adaptée à deux paramètres.

§2 Notations

Dans notre travail, nous utilisons répétitivement l'argument par récurrence. Nous avons alors besoin de nombreuses notations, indexées par les nombres naturels, que nous précisons ici.

Le symbole N désigne l'ensemble des nombres naturels $\{0,1,2,3,\dots\}$; $R_+ = [0,\infty[$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

Soit E un espace de Fréchet séparable. Relativement à E , nous définissons une suite d'espaces de Fréchet en posant :

$$\Xi^{(0)}(E) = E, \text{ et } \Xi^{(n+1)}(E) = C(R_+, \Xi^{(n)}(E)), n \in N.$$

Soit $l_{n,t}$ la $t^{\text{ième}}$ coordonnée de l'espace $\Xi^{(n)}(E) = C(R_+, \Xi^{(n-1)}(E))$, $t \in R_+$, $n \in N$, $n \geq 1$. Posons :

$$l_{t_1, \dots, t_n}^{(n)} = l_{1, t_1} \circ \dots \circ l_{n, t_n},$$

où (t_1, \dots, t_n) est un élément de R_+^n . Pour $\xi \in \Xi^{(n)}(E)$, posons :

$$\xi_{t_1, \dots, t_n} = l_{t_1, \dots, t_n}^{(n)}(\xi).$$

Notons qu'en identifiant $\xi \in \Xi^{(n)}(E)$ avec $\{\xi_{t_1, \dots, t_n} ; (t_1, \dots, t_n) \in R_+^n\}$, nous pouvons écrire :

$$\Xi^{(n)}(E) = C(R_+^n, E).$$

Dans le même ordre d'idées, nous pouvons aussi écrire :

$$\Xi^{(n+m)}(E) = \Xi^{(n)}(\Xi^{(m)}(E)), \quad n, m \in N.$$

Soit μ une mesure gaussienne centrée définie sur les ensembles boréliens de E . Nous posons :

$$m^{(0)}(E, \mu) = \mu;$$

$T_t^{(0)}(E, \mu)$, $t \geq 0$, le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\Xi^{(0)}(E)$ associé à $m^{(0)}(E, \mu)$ par la formule de Mehler;

$Z^{(1)}(E, \mu)$ le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à valeurs dans $\Xi^{(0)}(E)$ de semigroupe $T_t^{(0)}(E, \mu)$, $t \geq 0$, de loi initiale $m^{(0)}(E, \mu)$;

$m^{(1)}(E, \mu)$ la loi de $Z^{(1)}(E, \mu)$;

$T_t^{(1)}(E, \mu)$, $t \geq 0$, le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\Xi^{(1)}(E)$ associé à $m^{(1)}(E, \mu)$ par la formule de Mehler;

$Z^{(n)}(E, \mu)$ le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à valeurs dans $\Xi^{(n-1)}(E)$ de semigroupe $T_t^{(n-1)}(E, \mu)$, $t \geq 0$, de loi initiale $m^{(n-1)}(E, \mu)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$;

$m^{(n)}(E, \mu)$ la loi de $Z^{(n)}(E, \mu)$, $n \in \mathbb{N}$;

$T_t^{(n)}(E, \mu)$, $t \geq 0$, le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\Xi^{(n)}(E)$ associé à $m^{(n)}(E, \mu)$ par la formule de Mehler, $n \in \mathbb{N}$.

Notons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la mesure $m^{(n)}$ est une mesure gaussienne centrée sur l'espace $\Xi^{(n)}$. Rappelons la formule de Mehler :

$$T_s^{(n)}(E, \mu)f(\xi) = \int f(e^{-s}\xi + c_s\zeta) m^{(n)}(d\zeta), \quad n \in \mathbb{N},$$

pour toute fonction borélienne bornée f sur $\Xi^{(n)}(E)$, où $c_s = \sqrt{1 - e^{-2s}}$. Etant donnée l'identification $\Xi^{(n)}(E) = C(\mathbb{R}_+^n, E)$, le processus $Z^{(n)}(E, \mu)$ peut être considéré comme un processus à n -paramètres à valeurs dans E , ou une variable aléatoire à valeurs dans $C(\mathbb{R}_+^n, E)$. Nous avons aussi :

$$Z^{(n+m)}(E, \mu) = Z^{(n)}(\Xi^{(m)}(E), m^{(m)}(E, \mu))$$

pour tout $n, m \in \mathbb{N}$. Les processus $Z^{(n)}(E, \mu)$ seront appelés les processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n -paramètres sur (E, μ) . Les processus d'Ornstein-Uhlenbeck usuels (c'est-à-dire à un paramètre) seront simplement appelés processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Définissons les symboles suivants :

$$Q_t = Q_t(E, \mu) = T_t^{(0)}(E, \mu);$$

$$Uf(x) = U(E, \mu)f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} Q_t f(x) dt,$$

où f est une fonction borélienne bornée sur E et $x \in E$;

$$V_{(n)}(E, \mu)F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} T_t^{(n)}(E, \mu)F(\xi) dt, \quad n \in N,$$

où F est une fonction borélienne bornée sur $\Xi^{(n)}(E)$ et $\xi \in \Xi^{(n)}(E)$;

$$Z_{t_1, \dots, t_n}^{(n)}(E, \mu) = 1_{t_1, \dots, t_n}^{(n)}(Z^{(n)}(E, \mu)), \quad n \in N.$$

Remarquons qu'un point (t_1, \dots, t_n) de R_+^n peut être désigné par un seul symbole t , ou par un couple (s, u) , où $s \in R_+^m$ et $u \in R_+^k$ avec $m, k \in N$ et $m+k = n$, si nous identifions R_+^n avec le produit $R_+^m \times R_+^k$. En fonction de cela, nous trouverons des écritures comme :

$$Z_t^{(n)}(E, \mu), \quad Z_{s, u}^{(n)}(E, \mu), \quad \text{etc.}$$

Comme d'habitude, nous introduisons l'ordre partiel \leq sur R_+^n pour lequel $(s_1, \dots, s_n) \leq (t_1, \dots, t_n)$ si et seulement si $s_i \leq t_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Nous introduisons une famille de tribus sur $C(R_+^n, E)$ en posant :

$$F_t^{(n)} = \sigma\{1_s^{(n)}; s \leq t\}, \quad t \in R_+^n.$$

Pour tout $n \geq 1$, l'espace $(\Xi^{(n)}, m^{(n)})$ est un espace gaussien. On dénote par $c_{k, 2}^{(n)}$, $k \in N$, la capacité gaussienne d'indice $(k, 2)$ sur l'espace $(\Xi^{(n)}, m^{(n)})$. Les capacités gaussiennes sur (E, μ) seront notées par $c_{k, 2}$. Enfin, on dénote par $L^1(\Xi^{(n)}, c_{k, 2}^{(n)})$, respectivement par

$L^1(E, c_{k,2})$, la fermeture de l'ensemble des fonctions continues bornées sur $\Xi^{(n)}$, respectivement sur E , par rapport à la capacité-norme $c_{k,2}^{(n)}$, respectivement $c_{k,2}$.

§3 Loi du processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n-paramètres

Dans cette section, nous fixons un espace de Fréchet séparable gaussien (E, μ) . Nous démontrons une série de lemmes qui seront utilisés ultérieurement.

Lemme 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soit $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Soit $\sigma(t)$ une permutation de t .

Considérons $Z^{(n)}(E, \mu)$ comme une variable aléatoire à valeurs dans $C(\mathbb{R}_+^n, E)$, nous avons

:

$$Z^{(n)}(E, \mu) = \{Z_t^{(n)}(E, \mu), t \in \mathbb{R}_+^n\} \stackrel{\text{loi}}{=} \{Z_{\sigma(t)}^{(n)}(E, \mu), t \in \mathbb{R}_+^n\} = Z_{\sigma(\bullet)}^{(n)}(E, \mu).$$

Preuve : On démontre le lemme par récurrence. En fait, comme dans Song [12], le lemme est déjà démontré lorsque $n = 2$. Supposons que le lemme est vrai pour $n \leq k-1$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$. Considérons le cas où $n = k$.

Il nous suffit de supposer que σ est un échange entre deux coordonnées de $t = (t_1, \dots, t_k)$. Si σ ne concerne pas la dernière coordonnée t_k , on a :

$$\sigma(t) = (\sigma'(t_1, \dots, t_{k-1}), t_k).$$

Considérons $Z^{(k)}(E, \mu)$ et $Z_{\sigma(\bullet)}^{(k)}(E, \mu)$ comme des processus à valeurs dans $\Xi^{(k-1)}(E)$. Alors, ils sont tous des processus de Markov possédant le même semigroupe de transition (le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck $T_s^{(k-1)}(E, \mu)$), dont les lois initiales sont respectivement la loi de $Z^{(k-1)}(E, \mu)$ et celle de $Z_{\sigma'(\bullet)}^{(k-1)}(E, \mu)$. Comme, par hypothèse de récurrence, ces deux lois initiales sont les mêmes, on voit bien que $Z^{(k)}(E, \mu)$ et $Z_{\sigma(\bullet)}^{(k)}(E, \mu)$ ont aussi les mêmes lois.

Supposons que σ concerne t_k . D'après ce qu'on vient de démontrer, on peut échanger les $k-1$ premières coordonnées sans changer la loi de $Z^{(k)}(E, \mu)$. On peut donc supposer que σ est l'échange entre t_{k-1} et t_k , c'est-à-dire,

$$\sigma(t) = (t_1, \dots, t_{k-2}, \sigma''(t_{k-1}, t_k)).$$

Utilisons les identifications suivantes :

$$Z^{(k)}(E, \mu) = Z^{(2)}(\Xi^{(k-2)}(E), m^{(k-2)}) \text{ et}$$

$$Z_{\sigma}^{(k)}(E, \mu) = Z_{\sigma''}^{(2)}(\Xi^{(k-2)}(E), m^{(k-2)});$$

on remarque que le problème devient celui pour $n = 2$, quitte à remplacer l'espace (E, μ) par l'espace $(\Xi^{(k-2)}(E), m^{(k-2)})$. Puisque ce dernier est toujours un espace de Fréchet séparable gaussien, notre hypothèse de récurrence lui est applicable. Les deux variables $Z^{(k)}(E)$ et $Z_{\sigma}^{(k)}(E)$ ont donc les mêmes lois. Le lemme est démontré. \square

Lemme 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Soit f une fonction borélienne bornée sur

E . Soit $s \in \mathbb{R}_+$. Alors, on a :

$$T_s^{(n)}(E, \mu)[f \circ l_t^{(n)}](\xi) = Q_s f(l_t^{(n)}(\xi)),$$

où $\xi \in \Xi^{(n)}(E)$. En conséquence,

$$V_{(n)}(E, \mu)[f \circ l_t^{(n)}](\xi) = U f(l_t^{(n)}(\xi)).$$

Preuve : On utilise la formule de Mehler. On pose $\xi_t = l_t^{(n)}(\xi)$. Il est à noter que la loi de $Z_t^{(n)}(E, \mu)$ est μ . D'où, on a :

$$\begin{aligned} T_s^{(n)}(E, \mu)[f \circ l_t^{(n)}](\xi) &= \int f \circ l_t^{(n)}(c_s \xi + e_s \zeta) m^{(n)}(d\zeta) \\ &= \int f(c_s \xi_t + e_s \zeta_t) m^{(n)}(d\zeta) \\ &= \int f(c_s \xi_t + e_s y) \mu(dy) \\ &= Q_s f(\xi_t). \quad \square \end{aligned}$$

Lemme 3 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Posons :

$$[0, s] = \{t \in \mathbb{R}_+^n ; 0 \leq t \leq s\}.$$

Alors,

$$\{Z_t^{(n)}(E, \mu); t \in [0, s]\} \stackrel{\text{loi}}{=} \{Z_{s-t}^{(n)}(E, \mu); t \in [0, s]\}.$$

Preuve : On prouve le lemme par récurrence. Lorsque $n = 1$, le lemme résulte de la symétrie du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Supposons que le lemme est vrai pour les indices de 1 à $n-1$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On va montrer qu'il est aussi vrai pour l'indice n .

Posons :

$$Y = Z^{(1)}(\Xi^{(n-1)}(E), m^{(n-1)}(E, \mu)).$$

(Notons que $m^{(n-1)}(E, \mu)$ est la loi de $Z^{(n-1)}(E, \mu)$.) Alors, on a :

$$\begin{aligned} & \{Z_t^{(n)}(E, \mu); t \in [0, s]\} \\ &= \{l_{t'}^{(n-1)}(Y_{t_n}); t' \in \mathbb{R}_+^{n-1}, t_n \in \mathbb{R}_+, (t', t_n) \in [0, s]\} \\ & \stackrel{\text{loi}}{=} \{l_{t'}^{(n-1)}(Y_{s_n - t_n}); t' \in \mathbb{R}_+^{n-1}, t_n \in \mathbb{R}_+, (t', t_n) \in [0, s]\} \end{aligned}$$

par la symétrie du processus d'Ornstein-Uhlenbeck Y ,

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{loi}}{=} \{l_{t', s_n - t_n}^{(n)}(Z^{(n)}); t' \in \mathbb{R}_+^{n-1}, t_n \in \mathbb{R}_+, (t', t_n) \in [0, s]\} \\ & \stackrel{\text{loi}}{=} \{l_{s_n - t_n, t'}^{(n)}(Z^{(n)}); t' \in \mathbb{R}_+^{n-1}, t_n \in \mathbb{R}_+, t' \in [0, s'] \text{ et } t_n \in [0, s_n]\} \end{aligned}$$

d'après le lemme 1, où s' désigne les $n-1$ premières coordonnées de s . On arrive à échanger la coordonnée t_n à $s_n - t_n$. Puisque maintenant les coordonnées inchangées t' se trouvent aux derniers rangs de $l_{s_n - t_n, t'}^{(n)}(Z)$, on peut recommencer le même argument. En le répétant, on arrive enfin à ce que toutes les coordonnées soient changées de t_j à $s_j - t_j$. Le lemme est prouvé. \square

Lemme 4 : Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Soient $v \in \mathbb{R}_+^n$ et $t \in \mathbb{R}_+^m$. Désignons par ∞' l'infinité de \mathbb{R}_+^m et ∞'' celui de \mathbb{R}_+^n . Soit H une fonction $F_{t, \infty''}^{(m+n)}$ -mesurable. Alors,

l'espérance conditionnelle de H sachant $F_{\infty',v}^{(m+n)}$ sous la loi $m^{(m+n)}(E,\mu)$ est $F_{t,v}^{(m+n)}$ -mesurable.

Preuve : On note simplement $T_s^{(m+n)}$ pour $T_s^{(m+n)}(E,\mu)$, $s \in R_+$. Supposons d'abord que $n = 1$ et $m \in N$ quelconque. Considérons $Z^{(m+1)}$ comme le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à valeurs dans $\Xi^{(m)}$. Pour tout réel positif s , par la formule de Mehler, on voit que $T_s^{(m)}g$ est $F_t^{(m)}$ -mesurable dès que g est $F_t^{(m)}$ -mesurable. Cette propriété avec la propriété de Markov de $Z^{(m+1)}$ implique que $E(H \mid F_{\infty',v}^{(m+1)})$ est $F_{t,v}^{(m+1)}$ -mesurable, si H est de la forme :

$$H = h_1(l_{s_1}^{(m+1)}) \cdot \dots \cdot h_k(l_{s_k}^{(m+1)}),$$

où $k \in N$, $s_i \in R_+$, et h_i sont des fonctions boréliennes bornées sur $\Xi^{(m)}$, $F_t^{(m)}$ -mesurables, $i = 1, 2, \dots, k$. Cette mesurabilité reste vraie pour toute fonction borélienne bornée $H \in F_{t,\infty}^{(m+1)}$ grâce au théorème de classe monotone.

Supposons maintenant $n = 2$ (m est toujours quelconque). Ecrivons $v = (v_1, v_2)$. Supposons que H dépend d'un nombre fini de coordonnées, c'est-à-dire :

$$H = H[(l_{t_i, u_i, s_i}^{(m+2)})],$$

avec $(t_i) \subset [0, t]$, $(u_i, s_i) \in R_+^2$. Utilisant le semigroupe $T_s^{(m+2)}$ et la propriété de Markov de $Z^{(m+2)}$, on voit que l'espérance conditionnelle G' sous la loi $m^{(m+2)}$ de la fonction H définie ci-dessus sachant la tribu $F_{\infty', \infty, v_2}^{(m+2)}$ dépend également d'un nombre fini de coordonnées. Ecrivons donc : $G' = G'[(l_{t_i, u_i, q_i}^{(m+2)})]$, où $q_i \in [0, v_2]$. Posons :

$$W = W[(l_{w_j, x_j, y_j}^{(m+2)})],$$

avec $(w_j) \subset [0, \infty[$ et $(x_j, y_j) \in [0, v]$. On a :

$$\begin{aligned} E(HW) &= E(H[(l_{t_i, u_i, s_i}^{(m+2)})] \cdot W[(l_{w_j, x_j, y_j}^{(m+2)})]) \\ &= E(G'[(l_{t_i, u_i, q_i}^{(m+2)})] \cdot W[(l_{w_j, x_j, y_j}^{(m+2)})]) \end{aligned}$$

$$= E(G[(l_{t_i, q_i, u_i}^{(m+2)})] \cdot W[(l_{w_j, y_j, x_j}^{(m+2)})]) \text{ d'après le lemme 1.}$$

On sait déjà que l'espérance conditionnelle de $G[(l_{t_i, q_i, u_i}^{(m+2)})]$ sachant $F_{\infty, v_2, v_1}^{(m+2)}$ s'écrit sous la forme :

$$G = G[(l_{t_i, q_i, p_i}^{(m+2)})],$$

avec $(p_i) \subset [0, v_1]$. Utilisant encore une fois le lemme 1, on voit que :

$$E(H \mid F_{\infty, v_1, v_2}^{(m+2)}) = G[(l_{t_i, p_i, q_i}^{(m+2)})] \in F_{t, v_1, v_2}^{(m+2)}.$$

Grâce toujours au théorème de classe monotone, on étend cette mesurabilité à toute fonction borélienne bornée H .

Les cas où $n \geq 3$ peuvent être traités de la même manière. \square

Remarque : Ce lemme montre en particulier que la condition (F4) sur $\{F_t^{(n)}; t \in \mathbb{R}_+^n\}$ est satisfaite, ce qui nous permet d'appliquer l'inégalité de martingale à plusieurs paramètres (voir [10]).

Lemme 5 : Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Soient s et t deux points de \mathbb{R}_+^n . Soient u et v deux points de \mathbb{R}_+^m tels que $u \leq v$. Soit f une fonction borélienne bornée sur E . Alors,

$$E(f(Z_{u, s+t}^{(m+n)})(E, \mu) \mid F_{v, t}^{(m+n)}(E, \mu)) = Q|_s | f(Z_{u, t}^{(m+n)}),$$

$$E(f(Z_{s+t, u}^{(m+n)})(E, \mu) \mid F_{t, v}^{(m+n)}(E, \mu)) = Q|_s | f(Z_{t, u}^{(m+n)}),$$

$$\text{où } |s| = |(s_1, \dots, s_m)| = |s_1| + \dots + |s_m|.$$

Preuve : Démontrons d'abord la première égalité. On la démontre par récurrence sur l'indice n . Notons qu'on a :

$$Z^{(m+n)}(E, \mu) = Z^{(n)}(\Xi^{(m)}(E), m^{(m)}(E, \mu)).$$

Pour simplifier l'écriture, on dénote :

$$Y = Z^{(n)}(\Xi^{(m)}(E), m^{(m)}(E, \mu)),$$

considéré comme un processus à valeurs dans $\Xi^{(m)}(E)$.

Si $n = 1$, la première égalité résulte de la propriété de Markov du processus Y , du lemme 2 et du lemme 4. Supposons que $n \geq 2$ et que l'égalité est vraie pour tout indice de 1 à $n-1$.

1. Montrons qu'elle est aussi vraie pour l'indice n . Ecrivons $t = (t', t_n)$ avec $t' \in \mathbb{R}_+^{n-1}$, $t_n \in \mathbb{R}_+$ et $s = (s', s_n)$ avec $s' \in \mathbb{R}_+^{n-1}$, $s_n \in \mathbb{R}_+$. Soit $H \in F_{v,t}^{(m+n)}$ de la forme suivante :

$$H = H[(l_{u_i, p_i, q_i}^{(m+n)})],$$

avec $(u_i) \subset [0, v]$, $(p_i) \subset [0, t']$ et $(q_i) \subset [0, t_n]$. On a :

$$\begin{aligned} E(f(Y_{u, s+t}) H[(l_{u_i, p_i, q_i}^{(m+n)})](Y)) \\ &= E(f(Y_{u, s'+t', s_n+t_n}) H[(l_{u_i, p_i, q_i}^{(m+n)})](Y)) \\ &= E(Q_{s_n} f(Y_{u, s'+t', t_n}) H[(l_{u_i, p_i, q_i}^{(m+n)})](Y)) \end{aligned}$$

(propriété de Markov et le lemme 2)

$$\begin{aligned} &= E(Q_{s_n} f(Y_{u, t_n, s'+t'}) H[(l_{u_i, q_i, p_i}^{(m+n)})](Y)) \quad (\text{lemme 1}) \\ &= E(Q|_s | Q_{s_n} f(Y_{u, t_n, t'}) H[(l_{u_i, q_i, p_i}^{(m+n)})](Y)) \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= E(Q|_s | f(Y_{u, t}) H[(l_{u_i, p_i, q_i}^{(m+n)})](Y)). \end{aligned}$$

Grâce au théorème de classe monotone, cette identité s'étend à toute fonction borélienne bornée $H \in F_{v,t}^{(m+n)}$. La première égalité du lemme est prouvée. La deuxième égalité du lemme résulte de la première et du lemme 1. \square

Lemme 6 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons

$$Z_s = Z_s^{(n)}(E, \mu), \quad V_{(n)} = V_{(n)}(E, \mu), \quad F_s = F_s^{(n)} \text{ et } l_\bullet = l_\bullet^{(n)}.$$

Soit B un sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$. Soit s un point de \mathbb{R}_+^n . On dénote s_B le regroupement des coordonnées de s dont les indices sont dans B et $s_{\bar{B}}$ le regroupement des coordonnées de s dont les indices sont en dehors de B . Soit f une fonction borélienne intégrable sur E . Posons

$$M_s^f = E \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-|u|} f(Z_u) du \mid F_s \right),$$

$$\begin{aligned} H_{B,s}^f &= \prod_{i \in B} \int_0^{s_i} e^{-u_i} du_i U^{2(n-|B|)} f(Z_{u_B, s_{\bar{B}}}) \\ &= \int_0^{s_B} e^{-|u_B|} du_B U^{2(n-|B|)} f(Z_{u_B, s_{\bar{B}}}). \end{aligned}$$

Alors,

$$M_s^f = \sum_{B \subset \{1, \dots, n\}} \exp(-|s_{\bar{B}}|) H_{B,s}^f.$$

Preuve : Cette formule résulte de l'identité suivante :

$$\begin{aligned} 1_{\mathbb{R}_+^n}(u) &= \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} (1_{[0, s_i]}(u_i) + 1_{]s_i, \infty[}(u_i)) \\ &= \sum_{B \subset \{1, \dots, n\}} \prod_{i \in B} 1_{[0, s_i]}(u_i) \prod_{j \notin B} 1_{]s_j, \infty[}(u_j). \end{aligned}$$

Utilisant cette identité et le lemme 5, on a alors :

$$\begin{aligned} M_s^f &= E \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-|u|} f(Z_u) du \mid F_s \right) \\ &= E \left(\sum_{B \subset \{1, \dots, n\}} \prod_{i \in B} \int_0^{s_i} e^{-u_i} du_i \right. \\ &\quad \left. \prod_{j \notin B} \int_0^{\infty} e^{-s_j - u_j} f(Z_{u_B, s_{\bar{B}} + u_{\bar{B}}}) du_j \mid F_{s_B, s_{\bar{B}}} \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{B \subset \{1, \dots, n\}} \exp(-|s_{\bar{B}}|) \prod_{i \in B} \int_0^{s_i} e^{-u_i} du_i U^{2(n-|B|)} f(Z_{u_B, s_{\bar{B}}}). \quad \square$$

Lemme 7 : Soient $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction borélienne de carré intégrable sur E . On a :

$$N_2\left(\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-|u|} du f(Z_u)\right) = N_2(U^n f).$$

Preuve : On a d'abord l'identité suivante :

$$\begin{aligned} 1_{\mathbb{R}_+^n}(u) &= \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} (1_{[0, v_i]}(u_i) + 1_{]v_i, \infty[}(u_i)) \\ &= \sum_{B \subset \{1, \dots, n\}} \prod_{i \in B} 1_{[0, v_i]}(u_i) \prod_{j \notin B} 1_{]v_j, \infty[}(u_j). \end{aligned}$$

Utilisant cette identité, on a :

$$\begin{aligned} &N_2\left(\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-|u|} du f(Z_u)\right)^2 \\ &= \sum_{B \subset \{1, \dots, n\}} E\left(\int_{u_B < v_B, u_{\bar{B}} > v_{\bar{B}}} e^{-|u|} e^{-|v|} du dv f(Z_u) f(Z_v)\right) \\ &= \sum_{B \subset \{1, \dots, n\}} E\left(\int_{\mathbb{R}_+^{2|B|}} e^{-2|u_B|} e^{-|v_B|} du_B dv_B \right. \\ &\quad \left. \int_{\mathbb{R}_+^{2|\bar{B}|}} e^{-|u_{\bar{B}}|} e^{-2|v_{\bar{B}}|} du_{\bar{B}} dv_{\bar{B}} \right. \\ &\quad \left. f(Z_{u_B, u_{\bar{B}} + v_{\bar{B}}}) f(Z_{v_B + u_B, v_{\bar{B}}})\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{B \subset \{1, \dots, n\}} \int_{\mathbb{R}_+^{2|B|}} e^{-2|u_B|} e^{-2|v_B|} du_B dv_B \\
&\quad \int_{\mathbb{R}_+^{2|\bar{B}|}} e^{-2|u_{\bar{B}}|} e^{-2|v_{\bar{B}}|} du_{\bar{B}} dv_{\bar{B}} \\
&\quad E(Q_{|u_B|}^{f(Z_{u_B, v_{\bar{B}}})} Q_{|v_B|}^{f(Z_{u_B, v_{\bar{B}}})}) \\
&= N_2(U^n f)^2. \quad \square
\end{aligned}$$

§4 Inégalité entre L^2 -norme et capacité-norme

Dans cette section, on fixe un espace de Fréchet séparable gaussien (E, μ) . On fixe aussi un nombre naturel $n \in \mathbb{N}$. On pose $Z = Z^{(n)}(E, \mu)$, $V = V_{(n)}(E, \mu)$, $F_s = F_s^{(n)}$, et $1_s = 1_s^{(n)}$, $s \in \mathbb{R}_+^n$. On utilise le symbole N_2 pour désigner les L^2 -normes sur différents espaces de probabilités (le contexte évitera la confusion).

Théorème 1 : Pour toute fonction $u \in L^1(E, c_{n,2})$, la trajectoire $t \rightarrow u(Z_t)$, $t \in \mathbb{R}_+^n$, est continue presque sûrement. De plus, il existe une constante C_n dépendant de n (ne dépendant pas de (E, μ)) telle que :

$$(4,1,1) \quad E[(\sup_{t \in \mathbb{R}_+^n} e^{-|t|} |u(Z_t)|)^2] \leq C_n c_{n,2}(u)^2.$$

Découpons la démonstration du théorème 1 en quelques lemmes.

Lemme 2 : Il existe une constante \hat{C}_n dépendant de n (ne dépendant pas de (E, μ)) telle que

$$(4,2,1) \quad E[(\sup_{t \in A} e^{-|t|} |u|(Z_t))^2] \leq C_n c_{n,2}(u)^2,$$

pour tout sous-ensemble fini A de R_+^n , et pour toute fonction $u \in L^1(E, c_{n,2})$.

Preuve : Fixons un sous-ensemble fini A de R_+^n . Tout d'abord, on considère une fonction u qui est de la forme $u = U^{2n} f$ avec f une fonction de carré intégrable positive ou nulle. D'après le lemme §3,6, on a :

$$(4,2,2) \quad e^{-|t|} U^{2n} f(Z_t) = M_t^f - \sum_{B \subset \{1, \dots, n\}, B \neq \emptyset} \exp(-|t|_B) H_{B,t}^f, \quad t \in R_+^n.$$

Comme $H_{B,t}^f \geq 0$, on obtient $0 \leq e^{-|t|} U^{2n} f(Z_t) \leq M_t^f$. En utilisant l'inégalité de martingale, on obtient l'estimation :

$$(4,2,3) \quad \begin{aligned} & (E[(\sup_{t \in A} e^{-|t|} |u|(Z_t))^2])^{1/2} \\ & \leq N_2(\sup_{t \in R_+^n} E(\int_{R_+^n} e^{-|s|} f(Z_s) ds \mid F_t)) \\ & \leq C_n N_2(\int_{R_+^n} e^{-|s|} f(Z_s) ds) \\ & = C_n N_2(U^n f) = C_n N_{n,2}(u), \quad (\text{lemme §3,7}). \end{aligned}$$

Considérons ensuite un (n,2)-potentiel Φ (voir Sugita [13]). Posons $\Phi_k = Q_{1/k} \Phi$, $k \in N$. Alors, Φ_k s'écrit sous forme de $\Phi_k = U^{2n} f_k$ avec f_k une fonction de carré intégrable positive ou nulle et Φ_k converge vers Φ dans $W^{n,2}$. Puisque la loi de Z_t est μ pour tout $t \in R_+^n$, l'inégalité (4,2,3) s'étend donc pour Φ :

$$(4,2,4) \quad E[(\sup_{t \in A} e^{-|t|} |\Phi|(Z_t))^2] \leq C_n N_{n,2}(\Phi)^2.$$

Soit maintenant $u \in L^1(E, c_{n,2})$ et soit Φ son (n,2)-potentiel. Alors, $\Phi \geq |u|$ $c_{n,2}$ -quasi-partout et $c_{n,2}(u) = N_{n,2}(\Phi)$ (voir par exemple Song [12]). On a :

$$\begin{aligned}
 (4,2,7) \quad & E[(\sup_{t \in A} e^{-|t|} |u|(Z_t))^2] \\
 & \leq E[(\sup_{t \in A} e^{-|t|} \Phi(Z_t))^2] \\
 & \leq C_n N_{n,2}(\Phi)^2 \\
 & = C_n N_{n,2}(u)^2.
 \end{aligned}$$

Le lemme est prouvé. \square

Lemme 3 : L'inégalité (4,1,1) est vraie pour toute fonction s.c.i. positive ou nulle et bornée.

Preuve : Soit u une fonction s.c.i. positive ou nulle bornée. il existe une suite croissante de fonctions continues positives ou nulles bornées (u_k) telles que $u = \sup_k u_k$. On a :

$$\sup_{t \in R_+^n} e^{-|t|} u(Z_t) = \sup_k \sup_{t \in R_+^n} e^{-|t|} u_k(Z_t).$$

La continuité de chaque u_k nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 & E[(\sup_{t \in R_+^n} e^{-|t|} u_k(Z_t))^2] \\
 & = \sup_{A \subset R_+^n, \text{ fini}} E[(\sup_{t \in A} e^{-|t|} u_k(Z_t))^2].
 \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
 & E[(\sup_{t \in R_+^n} e^{-|t|} u(Z_t))^2] \\
 & = \sup_k \sup_{A \subset R_+^n, \text{ fini}} E[(\sup_{t \in A} e^{-|t|} u_k(Z_t))^2] \\
 & \leq \sup_k C_n c_{n,2}(u_k)^2 \\
 & = C_n c_{n,2}(u)^2. \quad \square
 \end{aligned}$$

Lemme 4 : Soit B un sous-ensemble de E. Alors, pour tout $b \in \mathbb{R}_+^n$, on a

$$P(\{ \exists t \in [0, b], Z_t \in B \}) \leq C_n e^{2|b|} c_{n,2}(B)^2.$$

Preuve : Il existe une suite $\{u_k\}$ de fonctions s.c.i. positives ou nulles telle que $u_k(x) \geq 1_B(x)$ pour tout $x \in E$, $k \in \mathbb{N}$, et que $\inf_k c_{n,2}(u_k) = c_{n,2}(B)$. D'après les lemmes précédents, on a :

$$\begin{aligned} P(\{ \exists t \in [0, b], Z_t \in B \}) & \\ & \leq \inf_k P[\{ \sup_{t \in [0, b]} u_k(Z_t) \geq 1 \}] \\ & \leq \inf_k C_n e^{2|b|} c_{n,2}(u_k)^2 \\ & = C_n e^{2|b|} c_{n,2}(B)^2. \end{aligned}$$

Le lemme est prouvé. \square

Lemme 5 : Pour toute fonction $u \in L^1(E, c_{n,2})$, $u(Z_t)$ est continue en $t \in \mathbb{R}_+^n$ presque partout.

Preuve : Une telle fonction u est $c_{n,2}$ -quasi-continue. Il existe une suite d'ensembles fermés $\{F_k\}$ tels que $\lim_n c_{n,2}(E - F_k) = 0$ et u est continue sur chaque F_k , $k \in \mathbb{N}$. Soit $b \in \mathbb{R}_+^n$ fixé. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ fixé, pour tout $\xi \in \{ \forall t \in [0, b] ; Z_t \in F_k \}$, la trajectoire $t \rightarrow u(Z_t)(\xi)$ est continue sur $[0, b]$. Or, d'après le lemme 4, on a :

$$\lim_k P[\{ \exists t \in [0, b] ; Z_t \in E - F_k \}] = 0.$$

D'où,

$$\begin{aligned} P[u(Z_t) \text{ est discontinue}] &= \sup_{b \in \mathbb{R}_+^n} P[u(Z_t) \text{ est discontinue sur } [0, b]] \\ &\leq \sup_{b \in \mathbb{R}_+^n} P[\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{ \exists t \in [0, b], Z_t \in E - F_k \}] = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Lemme 6 : L'inégalité (4,1,1) est vraie pour toute fonction $u \in L^1(E, c_{n,2})$.

Preuve : D'après le lemme 5, $e^{-|t|} |u|(Z_t)$ est continue en t presque sûrement. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} & E[(\sup_{t \in \mathbb{R}_+^n} e^{-|t|} |u|(Z_t))^2] \\ &= \sup_{A \subset \mathbb{R}_+^n, \text{ fini}} E[(\sup_{t \in A} e^{-|t|} |u|(Z_t))^2] \\ &\leq C_n c_{n,2}(u)^2 \quad (\text{lemme 2}). \end{aligned}$$

Le théorème 1 est prouvé. \square

§5 Inégalités entre L^2 -norme et capacités-norme (suite)

Lemme 1 : Pour tout $n \geq 1$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^n$, il existe une version $E_t^{(n)}$ de la probabilité

conditionnelle sachant la tribu $F_t^{(n)}$ qui satisfait les conditions suivantes :

1° Pour toute fonction continue bornée f qui dépend d'un nombre fini de coordonnées, l'application $t \rightarrow E_t^{(n)} f(\xi)$ est continue pour tout $\xi \in \Xi^{(n)}$ et l'application $\xi \rightarrow E_t^{(n)} f(\xi)$ est continue pour tout $t \geq 0$.

2° $E_t^{(n)}$ commute avec $T_s^{(n)}$ et $V^{(n)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^n$, $s \geq 0$.

Preuve : Lorsque $n = 1$, l'énoncé du lemme est assez évident. Il résulte de la propriété de Markov du processus d'Ornstein-Uhlenbeck et la continuité du semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck, et la formule de Mehler (voir Song [12]). Pour $n > 1$, on peut utiliser le lemme §3,4 et le lemme §3,1 pour démontrer le lemme. \square

Dans cette section, on fixe un nombre naturel n , et on utilise les mêmes notations Z , V , F_s , I_s , etc, qu'on a introduit dans la section précédente. De plus, on pose $E_t = E_t^{(n)}$.

Théorème 2 : Il existe une constante C_n telle que pour toute fonction borélienne de carré intégrable f , on a l'inégalité suivante :

$$N_2(\sup_{t \in \mathbb{R}_+^n} \left| \int_{s \in [0,t]} e^{-s} f(Z_s^{(n)}) ds \right|) \leq C_n N_2(U^n f).$$

Preuve : Si $n = 1$, on a

$$\int_{s \in [0,t]} e^{-s} f(Z_s^{(1)}) ds = M_t^f - e^{-t} U^2 f(Z_t^{(1)}).$$

Appliquons le résultat du théorème §4,1, du lemme §3,7 et l'inégalité de martingale. On obtient

$$\begin{aligned} & N_2(\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \left| \int_{s \in [0,t]} e^{-s} f(Z_s^{(1)}) ds \right|) \\ & \leq N_2(\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \left| M_t^f \right|) + N_2(\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \left| e^{-t} U^2 f(Z_t^{(1)}) \right|) \\ & \leq C_1 [N_2(Uf) + c_{1,2}(U^2f)] \\ & \leq 2 C_1 N_2(Uf). \end{aligned}$$

Supposons que le théorème 2 est démontré pour les indices de 1 à n - 1. D'après le lemme §3,6, on a

$$\begin{aligned} & \int_{s \in [0,t]} e^{-|s|} f(Z_s) ds \\ & = M_t^f - \sum_{B \subset \{1, \dots, n\}, \bar{B} \neq \emptyset} \exp(-|t_{\bar{B}}|) H_{B,t}^f, \quad t \in \mathbb{R}_+^n. \end{aligned}$$

La partie martingale M_t^f ne pose pas de problème nouveau. Considérons $H_{B,t}^f$. Puisqu'il s'agit uniquement d'estimer l'intégrale du carré de $H_{B,t}^f$, d'après le lemme §3,1, on peut ne considérer que $H_{B,t}^f$ pour le sous ensemble $B = \{1, \dots, k\}$, $k < n$. Posons

$$Y = Z^{(n-k)}(\Xi^{(k)}(E), m^{(k)}(E, \mu)),$$

considéré comme un processus d'Ornstein-Uhlenbeck à valeurs dans $\Xi^{(k)}(E)$ à n-k paramètres. Posons ensuite:

$$U_{(k)} = U(\Xi^{(k)}(E), m^{(k)}(E, \mu)),$$

$c_{r,p}^{(k)}$ les capacités associées à $U_{(k)}$ sur $\Xi^{(k)}(E)$.

D'après le lemme 3,2, on a :

$$V[f \circ l_{s_B, t_{\bar{B}}}](\xi) = (Uf)(l_{s_B, t_{\bar{B}}}(\xi)) = U_{(k)}[f \circ l_{s_B, t_{\bar{B}}}](l_{s_B, t_{\bar{B}}}(\xi)).$$

D'où,

$$H_{B,t}^f = U_{(k)}^{n-k} \left[\int_0^{t_B} (U^{n-k} f)(l_{s_B}) e^{-|s_B|} ds_B \right] (Y_{t_{\bar{B}}})$$

Posons :

$$G_B = \sup_{t_B \in \mathbb{R}_+^k} \left| \int_0^{t_B} (U^{n-k} f)(Z_{s_B}^{(k)}) e^{-|s_B|} ds_B \right|.$$

Alors, par l'hypothèse de récurrence, on a

$$N_2(G_B) \leq C_k N_2(U^k U^{n-k} f) = C_k N_2(U^n f).$$

D'où :

$$\begin{aligned} & N_2\left(\sup_{t \in \mathbb{R}_+^n} \exp\left(-\left|t_{\bar{B}}\right|\right) \left|H_{B,t}^f\right|\right) \\ & \leq N_2\left(\sup_{t_{\bar{B}} \in \mathbb{R}_+^{n-k}} \exp\left(-\left|t_{\bar{B}}\right|\right) \left[U_{(k)}^{n-k} G_B\right](Y_{t_{\bar{B}}})\right) \\ & \leq C_{n-k} c_{n-k,2}^{(k)} \left(U_{(k)}^{n-k} G_B\right) \\ & \leq C_{n-k} N_2(G_B) \\ & \leq C_n N_2(U^n f). \quad \square \end{aligned}$$

Pour terminer cette section, on démontre un résultat qui pourrait être intéressant.

Théorème 3 : Il existe une constante C_n telle que pour tout ensemble fini A de \mathbb{R}_+^n , pour toute fonction de carré intégrable f , pour tout $k \leq n$,

$$c_{k,2}^{(n)} \left(\sup_{t \in A} \left|M_t^f\right|\right) \leq C_n N_2(U^{n-k} f).$$

Preuve : Remarquons que

$$M_t^f = E_t \left(\int_{R_+^n} e^{-|s|} f(l_s) ds \right).$$

Supposons d'abord que f est de la forme $f = U^k g$, avec g une fonction borélienne de carré intégrable. Alors, d'après lemme §3,2, $f(l_s) = V^k(g \circ l_s)$. Il en résulte

$$\int_{R_+^n} e^{-|s|} f(l_s) ds = V^k \left[\int_{R_+^n} e^{-|s|} g \circ l_s ds \right].$$

Comme V et $E_t, t \geq 0$, commutent, on obtient $M_t^f = V^k M_t^g, t \geq 0$. D'où,

$$\begin{aligned} c_{k,2}^{(n)} \left(\sup_{t \in A} \left| M_t^f \right| \right) &\leq c_{k,2}^{(n)} \left(V^k \sup_{t \in A} \left| M_t^g \right| \right) \\ &\leq N_2 \left(\sup_{t \in A} \left| M_t^g \right| \right) \leq C_n N_2 \left(\left| M_\infty^g \right| \right) \\ &= C_n N_2(U^n g) = C_n N_2(U^{n-k} f). \end{aligned}$$

On a prouvé le théorème dans le cas particulier. Le cas général peut être fait en passant à la limite. \square

§6 Potentiels et mesures aléatoires

On utilise les mêmes symboles que ceux de la section 4. On montre dans cette section que toute mesure dans le dual du $W^{n,2}$ admet une représentation probabiliste.

Théorème 1: Soit ν une mesure dans le dual de $W^{n,2}$. Alors, il existe une mesure aléatoire $A(\xi, ds)$ sur $R_+^n, \xi \in \Xi^{(n)}$, telle que

$$\int U^{2n} h(x) g(x) \nu(dx) = E \left[h(Z_0) \int_{s \in R_+^n} e^{-|s|} g(Z_s) A(ds) \right]$$

pour toutes fonctions g et h boréliennes bornées sur E .

Preuve : Si $\nu(dx) = f(x)dx$ avec $f \in L^2(E, \mu)$ positive ou nulle, on pose

$$A(\xi, ds) = f(Z_s(\xi)) ds.$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} E[h(Z_0) \int_{s \in \mathbb{R}_+^n} e^{-|s|} g(Z_s) f(Z_s) ds] \\ &= \int_{s \in \mathbb{R}_+^n} e^{-|s|} ds E[h(Z_0) g(Z_s) f(Z_s)] \\ &= \int_{s \in \mathbb{R}_+^n} e^{-|s|} ds E[h(Z_0) Q_{|s|}(gf)(Z_0)] \\ &= \int h(x) U^{2n}(gf)(x) \mu(dx) \\ &= \int U^{2n}h(x) g(x) \nu(dx). \end{aligned}$$

Soit maintenant ν un élément positif quelconque du dual de $W^{n,2}$. Posons $u = U^{2n}\nu$ et $u_k = Q_{1/k}u$, $k \in \mathbb{N}$. Alors, u_k est de la forme $u_k = U^{2n}f_k$, avec une fonction $f_k \in L^2(E, \mu)$ positive ou nulle, et u_k tend vers u dans $W^{n,2}$. Appliquons le résultat du théorème §5.2. On a

$$\begin{aligned} N_2(\sup_{t \in \mathbb{R}_+^n} \left| \int_{s \in [0,t]} e^{-s} (f_k - f_m)(l_s) ds \right|) \\ \leq C_n N_2(U^n(f_k - f_m)) = C_n N_{n,2}(u_k - u_m) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quand k et m tendent vers l'infini. Il en résulte que, pour presque tout $\xi \in \Xi^{(n)}$, la suite de mesures $e^{-s} f_k(Z_s(\xi)) ds$ converge étroitement, quitte à extraire une sous-suite, vers une mesure $e^{-s} A(\xi, ds)$. Alors, pour toutes fonction continues bornées g et h , on a :

$$\begin{aligned} E[h(Z_0) \int_{s \in \mathbb{R}_+^n} e^{-|s|} g(Z_s) A(ds)] \\ &= \lim_k E[h(Z_0) \int_{s \in \mathbb{R}_+^n} e^{-|s|} g(Z_s) f_k(Z_s) ds] \\ &= \lim_k \int U^{2n}h(x) g(x) f_k(x) \mu(dx) \\ &= \lim_k \int Q_{1/k}[gU^{2n}h](x) \nu(dx) \end{aligned}$$

$$= \int U^{2n} h(x) g(x) v(dx).$$

Grâce au théorème de classe monotone, cette relation reste encore vraie pour toutes fonctions h , g boréliennes bornées sur E . Le théorème est démontré. \square

§7 Une application

Théorème 1 : Un ensemble borélien B est de $c_{n,2}$ - capacité nulle si et seulement si la probabilité pour $Z^{(n)}$ de rencontrer B est nulle.

Preuve : Rappelons que, pour tout ensemble borélien B , il existe une mesure ν dans le dual de $W^{n,2}$ telle que $c_{n,2}(B)^2 = \int U^{2n} \nu(x) \nu(dx)$ et que le support de ν est contenu dans la fermeture de B (cf. Sugita [13], Kazum-Shigekawa [8]). Alors, si B est un compact, la suffisance du théorème résulte du théorème §6,1. Pour un ensemble B quelconque, nous prouvons la suffisance du théorème en utilisant l'égalité suivante :

$$c_{n,2}(B) = \sup_{K \text{ compact, } K \subset B} c_{n,2}(K).$$

Pour démontrer la nécessité du théorème, il suffit d'utiliser le lemme §4,4. \square

Remerciement : Je remercie F.Hirsch pour les discussions que j'ai eues avec lui sur les idées essentielles du présent travail et pour les nombreuses corrections qu'il a faites sur une version préliminaire.

Références

- [1] Albeverio, S., Ma, Z., Röckner, M. : Non-symmetric Dirichlet forms and Markov processes on general state space. Preprint. 1992.
- [2] De La Pradelle, A., Feyel, D : Capacités Gaussiennes. Ann. Inst. Fourier, Grenoble , 41, 1 (1991), 49-76
- [3] Denis, L. : Comportement des martingales positives sur l'espace de Wiener vis-à-vis de la capacité. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 314, Série I pp. 771-773, 1992.
- [4] Dynkin, E.B. Additive functionals of several time-reversible Markov processes. J.Funct. Anal., 42 (1981), 64-101.
- [5] Evans, S.N. : Multiple points in the sample paths of a Lévy process. Probab. Th. Rel. Fields, 76 (1987), 359-367.
- [6] Fitzsimmons, P.J., Salisbury, T.S. : Capacity and energy for multiparameter Markov processes. Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol.25, n°3, p.325-350, 1989.
- [7] Fukushima, M. : Dirichlet forms and Markov processes. North-Holland-Kodansha. 1980.

- [8] Kazumi, T., Shigekawa, I : Measures of finite (r, p) -energy and potentials on a separable metric space. Séminaire de Probabilités XXVI, Lecture Notes in Mathematics, 1526, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1992.
- [9] Meyer, P.A. : Note sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Séminaire de Probabilités XVI, p.95-133, Lecture Notes in Mathematics, n°920, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.
- [10] Proceedings, Paris 1980 : Processus aléatoires à deux indices. Lecture Notes in Mathematics. 863. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York.
- [11] Ren, J. : Topologie p -fine sur l'espace de Wiener et théorème des fonctions implicites. Bull.Sc.Math., 2^e série, 114 (1990), 99-114.
- [12] Song, S : Processus d'Ornstein-Uhlenbeck et ensembles $W^{2,2}$ -polaires. Preprint, 1992.
- [13] Sugita, H. : Positive generalized Wiener functions and potential theory over abstract Wiener spaces. Osaka J. Math. 25 (1988), 665-696.