STÉPHANE LADOUCEUR
MICHEL WEBER

Note à propos d'un résultat de Kowada sur les flots analytiques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 608-618
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__608_0>

Note à propos d'un résultat de Kowada sur les flots analytiques

Stephane LADOUCEUR et Michel WEBER

I. Introduction.

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé et $\tau : X \to X$ un endomorphisme. En vertu du théorème de Birkhoff, on sait que les moyennes ergodiques $A_n(f)(x) = n^{-1} \sum_{0=j}^{n-1} f(\tau^j x)$, convergent presque sûrement vers $\mathbf{E}(f|\mathcal{J})$, où $\mathcal{J}$ désigne la tribu des ensembles τ-invariants. Peu de résultats concernant la vitesse de cette convergence sont connus, mis à part le cas simple où les $f \circ \tau^j$, $j \geq 1$, forment une suite indépendante. Dans cette situation, la vitesse de convergence est fournie par la loi du logarithme itéré, (ou la loi de Marcinkiewicz). Nous vous proposons d'étudier un résultat de M. Kowada [Ko] relatif à ce problème, et concernant certains automorphismes du tore en dimension 2. D'après [Kr] p. 14., le travail de M. Kowada est un des rares résultats positifs, avec ceux plus spécialisés de Kuipers et Niederreiter [Ku-Ni] sur l'équidistribution, concernant la vitesse de convergence. Rappelons à ce propos, d'après les travaux de Butzer et Westphal [Bu-We], que la vitesse de convergence ne peut en aucun cas excéder $\mathrm{O}(n^{-1})$, ce dernier cas correspondant, (dans tout espace de Banach réflexif), à la fermeture de $N = \{f = g \circ \tau - g,\ g \in L^2(\mu)\}$. Concernant la vitesse de convergence individuelle, nous rappelons aussi le théorème de K. Halàsz montrant que sur le tore, pour tout automorphisme ergodique, la vitesse de convergence peut être individuellement aussi proche de $\mathrm{O}(n^{-1})$ que l'on veut, sans pouvoir l'excéder.

II. Position du problème

Le problème étudié pourrait se résumer à ceci : soit le système suivant d'équations différentielles :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \phi(\varphi, \theta) \ ; \ \frac{d\theta}{dt} = \psi(\varphi, \theta) \ (\mathrm{mod}\, 1), \tag{2.1}$$

définies sur $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, le tore en dimension deux.

En supposant ϕ et ψ suffisamment lisses, ce système admet alors une solution unique, $F_t(\varphi, \theta)$, le flot du système, qui génère naturellement un automorphisme sur T^2. En supposant cette transformation ergodique pour une certaine mesure μ; peut-on, sous certaines conditions sur ϕ et ψ, espérer obtenir quelque information sur la vitesse de convergence μ presque sûre des moyennes ergodiques $A_n(f)$, associées au flot pour des éléments $f \in C^k(T^2)$?

Avant d'aller plus avant, et afin de prévenir le lecteur, nous signalons dès à présent, que le résultat de M. Kowada, sous les hypothèses de l'article original, ne tient pas. Il faudra comme nous le verrons, imposer un cadre plus coercitif, où cette fois, la démonstration proposée sera juste. Afin de justifier et d'expliquer les hypothèses requises par M. Kowada, nous devons rappeler un théorème de Kolmogorov [K] permettant une simplification du problème.

THÉORÈME 2.1. ([K], 1953). — *Soit $F_t(\varphi, \theta)$, le flot sur T^2 engendré par le système d'équations différentielles (2.1) où l'on suppose que ϕ et ψ sont dans $C^\infty(T^2)$ et vérifient aussi $\phi^2 + \psi^2 > 0$.*

Supposons de plus qu'il existe une mesure de probabilité P, invariante sous l'action de F_t, possédant une densité $\rho(\varphi, \theta)$ par rapport à la mesure de Lebesgue m, qui soit C^∞. Supposons encore que

$$\gamma = \int_{T^2} \phi dP / \int_{T^2} \psi dP, \tag{2.2}$$

soit irrationnel et vérifie pour tous entiers m et n,

$$|\gamma - \frac{n}{m}| \geq L/m^{H+\varepsilon}, \tag{2.3}$$

où L et H sont des constantes positives, $H \geq 2$ et $\varepsilon > 0$.

Dans ces conditions, il existe un changement de variables

$$\rho : T^2 \to T^2 \ , \ (\rho(\varphi, \theta) = (x, y)),$$

tel que :

$$dP(\rho^{-1}(x, y)) = dxdy, \tag{2.4}$$

et, dans ce système de coordonnées (2.1) se réduit à :

$$\frac{dx}{dt} = 1 \ , \ \frac{dy}{dt} = \gamma. \tag{2.5}$$

Si $S_t(x,y)$ est le flot associé au système (2.5), alors

$$\rho F_t(\bar{\rho}^1(x,y)) = S_t(x,y). \tag{2.6}$$

Finalement si ϕ et ψ sont analytiques, on peut choisir ρ analytique.

Ce théorème important nous ramène donc à l'étude d'un système simple du type (2.5) isomorphe en un certain sens au système initial (2.1). Il importe de signaler ici que l'irrationalité de γ défini en (2.2), nous assure de l'ergodicité du flot $F_t(\varphi,\theta)$, associé au système (2.1), pour la mesure P ; ce, en vertu d'un travail de T. Saito [S].

III. Théorème principal

Pour alléger les notations, nous faisons la convention d'écriture suivante :

$$\langle\gamma\rangle = \inf_{k\in Z} |\gamma - k|.$$

L'hypothèse (2.3) du théorème 2.1 peut alors être réecrite sous la forme

$$\forall m \in \mathbb{N}_* \,,\ m\langle m\gamma\rangle \geq L/m^{H+\varepsilon}. \tag{3.1}$$

Cette condition signifie que γ est "très" irrationnel; pour être précis et suivant en cela [Ku-Ni] p. 126, γ est un irrationnel algébrique de type $H+\varepsilon$. Nous pouvons à présent énoncer le résultat de M. Kowada.

THÉORÈME 3.1. — *Soit $F_t(\varphi,\theta)$ le flot engendré sur T^2 par le système d'équations différentielles (2.1). On suppose que F_t, ϕ et ψ vérifient les conditions d'existence du théorème de Kolmogorov. On suppose que la quantité γ définie en (2.2) vérifie en lieu et place de (3.1)*

$$\forall m \in \mathbb{Z}_* \,,\ \langle m\gamma\rangle \geq L/|m|^H, \tag{3.1'}$$

où $L > 0$ et $H \geq 1$.

Alors,

i) si $k - H > 1$, pour toute fonction $g \in C^{k+1}(T^2)$

$$\left|\frac{1}{S}\int_0^S g(F_t(\varphi,\theta))dt - \mathrm{E}_\mu(g)\right| = O\left(\frac{1}{S}\right), \qquad P-p.p., \tag{3.2}$$

ii) si $k-H>\frac{1}{2}$ pour toute fonction $g\in C^{k+1}(T^2)$, (et non pas $C^k(T^2)$ comme il est affirmé dans [Ko])

$$\|\frac{1}{S}\int_0^S g(F_t(\varphi,\theta))dt-\mathsf{E}_p(g)\|_{2,P}=\mathrm{O}\Big(\frac{1}{S}\Big). \tag{3.3}$$

Nous nous proposons de démontrer le théorème 3.1. sous l'hypothèse plus forte :

$$\forall m\in\mathbf{Z}_*\ ,\ \langle 2\langle m\gamma\rangle\rangle\geq L/|m|^H. \tag{3.2'}$$

Les hypothèses (3.1') ou (3.2) pouvant sembler contraignantes, on montrera que :

LEMME 3.2. — *Soit λ la mesure de Lebesgue et $H>1$; alors*

$$\lambda\{\gamma\in[0,1]:\exists L(\gamma)>0:\forall m\in\mathbf{Z}_*,\langle 2\langle m\gamma\rangle\rangle\geq L(\gamma)/|m|^H\}=1. \tag{3.4}$$

Démonstration : Il suffit de montrer que

$$\lambda\{\gamma\in[0,1]:\exists L(\gamma)>0:\forall m\in\mathbf{Z}_*,\langle m\gamma\rangle\geq L(\gamma)/|m|^H\}=1, \tag{3.5}$$

et

$$\lambda\{\gamma\in[0,1]:\exists L(\gamma)>0:\forall m\in\mathbf{Z}_*,1-2\langle m\gamma\rangle\geq L(\gamma)/|m|^H\}=1. \tag{3.6}$$

Fixons L et H et posons pour tout $m\in\mathbf{Z}_*$,

$$A_m=\{\gamma\in[0,1]:\inf_{k\in\mathbf{Z}}|\gamma-\frac{k}{m}|\leq L/|m|^{H+1}\}.$$

Comme $\gamma\in[0,1]$,

$$A_m=\{\gamma\in[0,1]:\inf_{0\leq|k|\leq|m|}|\gamma-\frac{k}{m}|\leq L/|m|^{H+1}\},$$

d'où, $\lambda(A_m)\leq 2|m|L|m|^{-H-1}=2L|m|^{-H}$. Donc puisque $\sum_{m\in\mathbf{Z}_*}\lambda(A_m)<\infty$, par Borel-Cantelli,

$$\lambda\{\gamma\in[0,1]:\inf_{k\in\mathbf{Z}}|\gamma-\frac{k}{m}|\leq L/|m|^{H+1},i.s.\}=0,$$

ce qui démontre (3.5).

Pour établir (3.6), remarquons que

$$0 \leq 1 - 2\langle m\gamma\rangle \leq L/|m|^H \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{|m|} - 2 \min_{0\leq|k|\leq|m|} |\gamma - \frac{k}{m}| \leq L/|m|^{H+1}.$$

Supposons $m \geq 0$, alors comme $\gamma > 0$, on a $0 \leq k \leq m$. Donc,

$$0 \leq \max_{0\leq k\leq m} \frac{1}{m} - 2|\gamma - \frac{k}{m}| \leq L/m^{H+1}. \tag{3.7}$$

Posons ,

$$K_m^+ = \{k \in [0,m] : \gamma - \frac{k}{m} \geq 0\} \text{ et } K_m^- = \{k \in [0,m] : \gamma - \frac{k}{m} < 0\},$$

alors (3.7) est équivalent à :

$$0 \leq \max_{k\in K_m^+} \left[\frac{2k+1}{m} - 2\gamma\right] \vee \max_{k\in K_m^-} \left[\gamma - \frac{(2k-1)}{m}\right] \leq L/m^{H+1}.$$

D'où pour L et H fixés,

$$\begin{aligned}
&\lambda\{\gamma \in [0,1] : 1 - 2\langle m\gamma\rangle \leq L/mH\},\\
&\quad\leq \lambda\{\gamma \in [0,1] : 0 \leq \max_{k\in K_m^+} [\frac{2k+1}{m} - 2\gamma] \vee \max_{k\in K_m^-} [2\gamma - \frac{(2k-1)}{m}] \leq L/m^{H+1}\},\\
&\quad\leq \sum_{k\in K_m^+} \lambda\{\gamma \in [0,1] : 0 \leq \frac{2k+1}{m} - 2\gamma \leq L/|m|^{H+1}\}\\
&\qquad + \sum_{k\in K_m^-} \lambda\{\gamma \in [0,1] : 0 \leq 2\gamma - \frac{2k-1}{m} \leq L/m^{H+1}\},\\
&\quad\leq \mathrm{Card}(K_m^+)L/2m^{H+1} + \mathrm{Card}(K_m^-)L/2m^{H+1},\\
&\quad\leq 2L/m^H.
\end{aligned}$$

Le cas $m < 0$ se traite de façon identique, (avec $k \in [-m, 0]$).

Par Borel-Cantelli, on montre donc comme précédemment que (3.6) est vrai. $\square$

Démonstration du théorème 3.1. Via le théorème de Kolmogorov, on peut immédiatement supposer que nous nous trouvons en présence d'un système simple de la forme

$$\frac{dx}{dt} = 1 \ ; \ \frac{dy}{dt} = \gamma \pmod 1.$$

Le flot $S_t(x,y)$ d'un tel système représente alors une translation sur le tore T^2 donnée par,

$$S_t(x,y) = (x+t, y+\gamma t)$$

celui-ci préservant, bien sûr, la mesure de Lebesgue. Soit pour tous n, m $\chi_{n,m} = \exp i(nx+my)$; nous avons alors que

$$\chi_{n,m}(S_t(x,y)) = \exp it(n+m\gamma)\chi_{n,m}.$$

Les valeurs propres du flot sont alors données par $r_{n,m} = n + m\gamma$, (voir [C-S-F]) ; leurs vecteurs propres associés étant les $\chi_{n,m}$. De plus, γ étant supposé irrationnel, le flot S_t est ergodique. On peut donc trouver un t_0 tel que l'opérateur $T = S_{t_0}$ soit ergodique : en effet, une condition suffisante est que $\exp it_0(n+m\gamma) \neq 1$, $(n,m) \neq 0$, (voir [C-S-F]). Nous choisirons $t_0 = 4\pi$; ce choix quoique arbitraire, aura l'avantage de simplifier les calculs ultérieurs. Soit $g \in L^1(T^2, dxdy)$ tel que $\mathsf{E}(g) = 0$. Posons,

$$F(g) = \int_0^{t_0} g(S_t(\omega))dt \ , \ (\omega = (x,y)).$$

Remarquons tout de suite, que

$$\mathsf{E}(g) = \int_{T^2} \left[\int_0^{4\pi} g(S_t(\omega))dxdy \right] dt,$$

et comme S_t préserve la mesure de Lebesgue,

$$= \int_0^{4\pi} \mathsf{E}(g)dt = 0.$$

Soit $S \in \mathbf{R}^+$ et notons $\ell(S) = \left[\frac{S}{4\pi}\right]$, (la partie entière) ; alors

$$\begin{aligned} (3.8) \quad \frac{1}{S}\int_0^S (S_t(x,y))dt &= \frac{1}{S}\sum_{j=0}^{\ell(S)-1} \int_{4\pi j}^{4\pi(j+1)} g(S_t(x,y))dt + \frac{1}{S}\int_{\ell(S)4\pi}^S g(S_t(x,y))dt, \\ &= \frac{1}{S}\sum_{j=0}^{\ell(S)-1} \int_0^{4\pi} g(S_{t+j4\pi}(x,y))dt + \frac{1}{S}\int_{\ell(S)4\pi}^S g(S_t(x,y))dt, \\ &= \frac{1}{S}\sum_{j=0}^{\ell(S)-1} F(T^j(x,y)) + \frac{1}{S}\int_{\ell(S)4\pi}^S g(S_t(x,y))dt. \end{aligned}$$

Si g est continue sur T^2 ; il n'est pas difficile de voir qu'alors le deuxième terme du membre de droite sera borné par $K_1 S^{-1}$, où K_1 est une constante positive.

Supposons maintenant que g appartienne à $C^{k+1}(T^2)$. On peut alors développer F en série de Fourier

$$F = \sum_{\substack{(n,m)\\(n,m)\neq(0,0)}} F_{n,m}\chi_{n,m}, \quad (F_{0,0} = \mathbf{E}(g) = 0).$$

En intégrant par partie $k+2$ fois, les $F_{n,m}$ peuvent être majorés uniformément sur T^2 par :

$$|F_{n,m}| \leq M/|m|^k|n|^2. \tag{3.9}$$

Les valeurs propres de l'opérateur T étant données par $\lambda_{n,m} = \exp i4\pi(n+m\gamma)$, nous avons que

$$|e^{i4\pi(n+m\gamma)} - 1| \geq 2\langle 2\langle m\gamma\rangle\rangle. \tag{3.10}$$

En effet, ceci puisque,

$$\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta \vee \frac{2}{\pi}(\pi-\theta) \qquad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

et que,

$$\begin{aligned}|e^{2i\theta} - 1| &= |\sin\theta| = |\sin(\theta - 2k\pi)| = |\sin|\theta - 2\pi k||\\ &= \sin[\inf_{k\in\mathbb{Z}} |\theta - 2k\pi|],\end{aligned}$$

où $0 \leq \inf_{k\in\mathbb{Z}} |\theta - 2k\pi| \leq \pi$.

(Notons, ici, que M. Kowada affirmait l'existence d'un entier n_0 et d'une constante positive K tels que :

$$|e^{i(n+m\gamma)} - 1| \geq K|m\gamma - n_0|. \tag{3.11}$$

Ceci est faux : d'après un théorème de Weyl, l'ensemble $\{e^{2i\pi n\theta} : n \in \mathbb{Z}, \theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}$, est dense sur $\{z : |z| = 1\}$; ce qui contredit (3.11).

Par où, sous les hypothèses du théorème, nous aurons que

$$|e^{i4\pi(n+m\gamma)} - 1| \geq 2L/|m|^H. \tag{3.12}$$

De (3.9) et (3.12), on tire alors que

$$\frac{|F_{n,m}|}{|\lambda_{n,m} - 1|} \leq \frac{M}{2L|m|^{k-H}|n|^2}. \tag{3.13}$$

Posons

$$G(\omega) = \sum_{(n,m)\neq(0,0)} \frac{F_{n,m}}{\lambda_{n,m} - 1} \chi_{n,m}(\omega).$$

Alors si $k - H > \frac{1}{2}$, $G(\omega) \in L^2(T^2, dxdy)$ et si $k - H > 1$, $G(\omega)$ sera continue.

Nous considérons seulement le cas où $k - H > 1$, l'autre cas se traitant d'une façon similaire. Calculons d'abord,

$$\begin{aligned} &G(T\omega) - G(\omega) = \\ &= \sum_{(n,m)\neq(0,0)} \frac{F_{n,m}}{\lambda_{n,m} - 1} \chi_{n,m}(T(\omega)) - \sum_{(n,m)\neq(0,0)} \frac{F_{n,m}}{\lambda_{n,m} - 1} \chi_{n,m}(\omega), \\ &= \sum_{(n,m)\neq(0,0)} \frac{F_{n,m}}{\lambda_{n,m} - 1} \lambda_{n,m}\chi_{n,m}(\omega) - \sum_{(n,m)\neq(0,0)} \frac{F_{n,m}}{\lambda_{n,m-1}} \chi_{n,m}(\omega), \\ &= \sum_{(n,m)\neq(0,0)} F_{n,m}\chi_{n,m}(\omega) = F(\omega). \end{aligned}$$

Par conséquent, $(\ell = \ell(S))$,

$$\begin{aligned} S^{-1}\Big|\sum_{j=0}^{\ell-1} F(T^j(\omega))\Big| &= S^{-1}\Big|\sum_{j=0}^{\ell-1} G(T^{j+1}(\omega)) - G(T^j(\omega))\Big|, \\ &= S^{-1}|G(T^\ell(\omega)) - G(\omega)| \\ &\leq 2S^{-1} \max_{T^2} |G| \\ &= K_2 S^{-1}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Finalement de (3.8) et (3.14),

$$\left|\frac{1}{S}\int_0^S g(S_t(x,y))dt\right| \leq (K_1 + K_2)S^{-1}.$$

Si $\mathsf{E}(g)$ n'était pas égale à zéro; il suffirait de considérer la fonction $\tilde{g} = g - \mathsf{E}(g)$. $\square$

IV. Application

En utilisant une méthode analogue à celle développée dans la section précédente, on peut démontrer la proposition suivante

PROPOSITION 4.1. — *Soit $(H, \langle \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert complexe et $T : H \to H$ un opérateur compact auto-adjoint et de norme $\|T\| \leq 1$. Si P_1 désigne l'opérateur de projection sur le sous-espace des invariants par T ; alors*

$$\|\bar{n}^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} T^j - P_1\| = O(n^{-1}).$$

Démonstration : Par le théorème de Mercer (voir [D-S]), il existe une suite $\{\lambda_j, j \geq 0\}$ de valeurs propres de T, décroissant vers zéro et telle que :

$$T(\cdot) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \langle \cdot, \varphi_j \rangle \varphi_j,$$

où la suite $\{\varphi_j, j \geq 0\}$ est la suite orthonormale des vecteurs propres associés aux λ_j. Montrons d'abord que pour $x \in H$,

$$|\sum_{j=0}^{n-1} T^j(x) - nP_1(x)| \leq K(x)|x| \ , \ K(x) > 0.$$

Par linearité, on peut déjà supposer que $P_1(x) = 0$; d'où $\langle x, \varphi_i \rangle = 0$, pour tout φ_j tel que $T\varphi_j = \varphi_j$.

Dans ces conditions,

$$Tx = \sum_{j:\lambda_j \neq 1} \lambda_j \langle x, \varphi_j \rangle \varphi_j.$$

Soit,

$$G(x) = \sum_{j:\lambda_j \neq 1} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - 1} \langle x, \varphi_j \rangle \varphi_j.$$

Puisque la suite λ_j est décroissante et que $\sum |\lambda_j \langle x, \varphi_j \rangle|^2 = |Tx|^2 \leq |x|^2 < \infty$, nous avons que $G(x) \in H$ par Parseval; et par conséquent, on peut trouver $k = k(x) > 0$ tel que $|G(x)| \leq K(x)|x|$.

Maintenant,

$$G(Tx) - G(x) = \sum_{j:\lambda_j \neq 1} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - 1}\langle x, \varphi_j\rangle T\varphi_j - \sum \frac{\lambda_j}{\lambda_j - 1}\langle x, \varphi_j\rangle\varphi_j,$$
$$= \sum_{j \neq \lambda_j \neq 1} \lambda_j\langle x, \varphi_j\rangle\varphi_j = Tx.$$

D'où, puisque G et T commutent,

$$\begin{aligned} |\sum_{j=0}^{n-1} T^j(x)| &= |\sum_{j=0}^{n-1} G(T^{j+1}(x)) - G(T^j(x))|, \\ &= |G(T^n(x)) - G(x)|, \\ &\leq G(T^n(x)| + |G(x)|, \\ &\leq K\|T\|^n|x| + K|x|, \\ &\leq 2K|x|. \end{aligned}$$

La proposition se démontre alors en utilisant le théorème de Banach-Steinhaus. $\square$

Bibliographie

[A] ARNOLD, V.I. *Small denominators.* Amer. Math. Soc. Trans. n° 46, p. 213–284, (1965).

[B.W] BUTZER, P.L., WESTPHAL, U. *The mean ergodic Theorem and saturation.* Indiana Univ. M.J. 20, p. 1163–1174 (1971).

[CSF] CORNFELD, I.P. FOMIN, S.V., SINAI, Ya.G. *Ergodic Theory.* Springer Verlag, (1982)

[DS] DUNFORD, L., SCHWARTZ, S. *Linear Operators*, V.II.

[K] KOLMOGOROV, N., *On dynamical systems with integral invariance on the toros.* D.A.N., V. 93, p. 763–766, (1953).

[Ko] KOWADA, M. *Convergence rate in the ergodic theorem for analytic flows on the toros.* L.N. Springer, V. 330, p. 251–254, (1973).

[Kr] KRENGEL, U. *Ergodic Theorems.* W. de Gruyter, (1985).

[Ku-Ni] KUIPERS, L., NIEDERREITER, H. *Uniform distribution of sequences.* Wiley Interscience, (1974).

[NS] NEMYTSKI, STEPANOV. *Qualitative theory of differential equations.* Princeton U. Press, (1960).

[Sa] SAITO, T. *On the measure-preserving flow on the torus.* J. of the M.S. of Japan, V. 3, N.2, p. 279–284, (1951).

[Si] SINAI Ya G. *Introduction to ergodic theory.* M.N. Princeton U. Press (1976).

[Sp] SPIVAK, M. *Differential Geometry*, V.1. Published or Perished, (1979).

Institut de Recherche Mathématique Avancée,
Université Louis Pasteur,
7, rue René Descartes,
67084 Strasbourg Cedex