YAO-ZHONG HU

Une remarque sur l'inégalité de Hölder non-commutative

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 595
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__595_0>

UNE REMARQUE SUR L'INÉGALITÉ DE HÖLDER NON COMMUTATIVE

par Yao–Zhong HU

L'inégalité de Hölder est classique dans le cas d'un état tracial ρ sur une algèbre de von Neumann d'opérateurs, mais nous n'avons trouvé nulle part de discussion du cas d'égalité. Bien que le résultat soit certainement connu, la démonstration suivante (qui concerne seulement un couple d'opérateurs autoadjoints) mérite peut être d'être présentée à cause de sa simplicité. La restriction aux autoadjoints est sérieuse, dans la mesure où elle interdit d'étendre l'inégalité aux produits de plus de deux facteurs.

Nous remarquons d'abord que si U et V sont deux opérateurs positifs, on a $\rho(UV) \geq 0$. En effet, on peut mettre U, V sous la forme M^*M, N^*N, et alors

$$\rho(M^*MN^*N) = \rho(MN^*NM^*) = \rho(P^*P) \geq 0$$

en posant $P = NM^*$.

Considérons alors deux opérateurs autoadjoints X, Y et leurs décompositions spectrales,

$$X = \int u\, dE_u \ , \quad Y = \int v\, dF_v \ .$$

On définit une bimesure positive θ sur $\mathbb{R}^2$ par la formule

$$\theta(A \times B) = \rho(E_A F_B)$$

où A et B sont des boréliens de $\mathbb{R}$. D'après la remarque précédente et le théorème des bimesures, θ se prolonge en une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^2$. On montre ensuite que

$$\rho(XY) = \int uv\, \theta(du, dv) \ , \ \rho(|X^p|) = \int |u|^p\, \theta(du, dv) \ , \ \rho(|Y^q|) = \int |v|^q\, \theta(du, dv) \ ,$$

et l'inégalité de Hölder ordinaire appliquée à θ donne la formule désirée. Le “on montre ensuite” laisse un peu de travail : on peut d'abord vérifier les formules précédentes sur des opérateurs dont la décomposition spectrale est finie, puis passer à la limite pour établir l'inégalité dans le cas général, et enfin en déduire les formules dans le cas général.

Passons au cas d'égalité dans l'inégalité de Hölder, en supposant que ρ est fidèle. D'après la forme classique du théorème, il existe une constante λ telle que la mesure θ correspondante soit portée par la courbe $v^q = \lambda u^p$. Supposant d'abord X et Y bornés, on peut en déduire que

$$\rho((Y^q - \lambda X^p)^2) = \rho(\lambda^2 X^{2p} + Y^{2q} - 2\lambda X^p Y^q) = \int (\lambda^2 u^{2p} + v^{2q} - 2\lambda u^p v^q)\, \theta(du, dv) = 0$$

et donc $Y^q = \lambda X^p$ puisque l'état ρ est fidèle. Pour le cas général, on tronque X à un intervalle borné I, Y à l'intervalle borné $J = \lambda I$, et on remarque que la mesure θ correspondante est encore portée par la courbe $v^q = \lambda u^p$. Les opérateurs tronqués sont donc proportionnels, et on passe à la limite.