SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JOSEP LLUIS SOLÉ
FREDERIC UTZET

Une note sur l'intégrale multiple de Stratonovich pour le processus de Poisson

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 410-414
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__410_0>

UNE NOTE SUR L'INTÉGRALE MULTIPLE DE STRATONOVICH POUR LE PROCESSUS DE POISSON

par

J.Ll. SOLÉ et F. UTZET

1. Introduction

Dans un récent article, Hu et Meyer [1] exposent une théorie unifiée des différentes définitions de l'intégrale multiple de Stratonovich (pour le processus de Wiener). L'idée consiste à considérer une famille d'approximations des trajectoires browniennes par des fonctions de Cameron-Martin; alors on peut définir sur chaque approximation l'intégrale multiple et prendre la limite selon la famille d'approximations. Leur preuve de la formule qui donne la relation entre l'intégrale de Stratonovich et celle d'Itô (formule de Hu-Meyer) est également très intéressante; cette preuve est fondée sur la décomposition en chaos de l'exponentielle. De plus, cette démonstration montre très clairement quel est le problème des *traces*.

Le but de cette note est de prouver qu'on peut suivre le même raisonnement pour le processus de Poisson, et en particulier, qu'on peut utiliser une formule exponentielle (établie par Surgailis [6]) pour démontrer la relation entre les intégrales de Stratonovich et d'Itô. Bien sûr, cette démonstration est beaucoup plus claire et générale que celle que nous avons donnée en [5]. D'autre part, quand on travaille avec le processus de Poisson on peut faire une théorie dans L^2 et une théorie trajectorielle; pour cette dernière, la formule de Hu-Meyer est immédiate. Mais en général, les traces qui apparaissent dans les deux cas ne sont pas équivalentes. Dans la dernière section de cette note, nous présentons l'intégrale trajectorielle dans le cadre de la formulation de Hu-Meyer utilisant des distributions.

2. La théorie L^2

Soit $\{N_t,\, t \in \mathbb{R}\}$ un processus de Poisson de paramètre 1, et soit $X_t = N_t - t$ le processus compensé. Pour chaque trajectoire ω, nous définissons l'approximation dérivable $X^{\varphi}(\omega)$ par

$$\dot{X}^{\varphi}_s(\omega) = \int_0^{\infty} \varphi(s,t)\, dX_t(\omega)\,.$$

où $\{\varphi_i,\, i \in I\}$ est une famille de fonctions de $L^2(\mathbb{R}^2_+)$, telles que pour chaque s fixé, $\varphi(s,\cdot)$ tende vers la fonction de Dirac au point s. Les cas habituels sont

(1) $\varphi_\epsilon(s,t) = \frac{1}{\epsilon}\, 1_{](s-\epsilon)^+,\, s\wedge(\frac{1}{\epsilon})]}(t)\,.$

(2) $\varphi_n(s,t) = \sum_{k=1}^{n} \dot{e}_k(s)\dot{e}_k(t)$, où $\{e_n,\, n \geq 1\}$ est une base orthonorme de l'espace de Cameron-Martin.

(3) $\varphi_n(s,t) = \sum_i \dfrac{1}{\delta_i} 1_{\Delta_i\times\Delta_i}(s,t)$, où $0 = t_1 < \ldots < t_m < \infty$, $\Delta_i =]t_{i-1}, t_i]$, $\delta_i = t_i - t_{i-1}$, et on prend une suite de partitions dont le pas tend vers zéro (sur chaque intervalle compact).

Etant donnée une fonction $f \in L^2_s(\mathbb{R}^n_+)$ (L^2 symétrique) nous pouvons considérer

$$F(f,\varphi) = \int f(s_1,\dots,s_n)\dot{X}^{\varphi}_{s_1}\dots\dot{X}^{\varphi}_{s_n}\,ds_1\dots ds_n,$$

et nous définissons l'intégrale de Stratonovich $I^S_n(f)$ comme la limite des $F(f,\varphi_i)$ dans L^2 (lorsqu'elle existe) selon la famille d'approximations.

A partir de (1) on obtient la théorie de Johnson-Kallianpur [2], de (2) celle de Russo-Vallois [4], et de (3) celle de Solé-Utzet [5].

On voit que

$$I^S_n(h^{\otimes n}) = \big(I_1(h)\big)^n. \tag{1}$$

Comme dans la situation du processus de Wiener, on définit les opérateurs de régularisation

$$R_\varphi(s_1,\dots,s_n) = \int f(t_1,\dots,t_n)\,\varphi(s_1,t_1)\dots\varphi(s_n,t_n)\,dt_1\dots dt_n\,.$$

Dans les trois cas précédents, R_φ a une norme d'opérateur ≤ 1 et R_φ converge fortement vers l'identité selon la famille des approximations.

Définissons les fonctions suivantes:

$$\phi_1(u,v) = \varphi(u,v)\,,$$

$$\phi_r(u_1,\dots,u_r,s) = \varphi(u_1,s)\cdot\ldots\cdot\varphi(u_r,s)\,,\quad r\geq 2,$$

Reprenant les notations de [5], étant donnés m nombres naturels (zéro compris), $k_1,\dots,k_m$ tels que $\sum_{r=1}^m rk_r = n$, nous appellerons $(k_1,\dots,k_m)$-diagonale l'ensemble de points de la forme

$$(x_1,\dots,x_{k_1},x_{k_1+1},x_{k_1+1},\dots,x_{k_1+k_2},x_{k_1+k_2}\cdot\dots$$
$$x_{k_1+k_2+\dots+k_s},\dots,x_{k_1+k_2+\dots+k_s})\,,$$

ou un ensemble obtenu par permutation des x_j. Nous dénoterons par Γ_n l'ensemble des $(k_1,\dots k_m)$, $1\leq m\leq n$ tels que $\sum_{r=i}^n rk_r = n$.

Pour $(k_1,\dots,k_m)\in\Gamma_n$ et $f\in L^2_s(\mathbb{R}^n_+)$, posons

$$(C_\varphi^{(k_1,\dots,k_m)}f)(s_1,\dots,s_{k_1+\dots+k_m}) = \int f(x_1,\dots,x_n)\phi_1(x_1,s_1)\dots\phi_1(x_{k_1},s_{k_1})$$
$$\cdot\phi_2(x_{k_1+1},x_{k_1+2},s_{k_1+1})\dots\phi_m(x_{n-m},\dots,x_m,s_{k_1+\dots+k_m})\,dx_1\dots dx_n\,.$$

Finalement, pour $h\in L^{2n}(\mathbb{R}_+)$, définissons la valeur de $h^{\otimes n}$ sur la diagonale $(k_1,\dots,k_m)$ comme

$$D^{(k_1,\dots,k_m)}h^{\otimes} = h^{\otimes k_1}\otimes(h^2)^{\otimes k_2}\otimes\dots\otimes(h^m)^{\otimes k_m}\,.$$

Cette définition est étendue par linéarité à l'ensemble des fonctions élémentaires, c'est à dire, les fonctions qui sont des combinaisons linéaires finies de produits symétrisés des produits tensoriels $h_1 \otimes \cdots \otimes h_n$.

Alors, on prouve que pour f élémentaire on a

$$I_n^S(R_\varphi(f)) = F(f,\varphi), \tag{2}$$

et

$$D^{k_1,\dots,k_m} R_\varphi f = C_\varphi^{k_1,\dots,k_m} f. \tag{3}$$

Le dernier ingrédient dont nous avons besoin est une décomposition de l'exponentielle établie par Surgailis [6, Corollaire 2.1]: on désigne par $I_n(f)$ l'intégrale stochastique multiple par rapport au processus de Poisson (au sens L^2). Etant donnée $h \in L^2(\mathbb{R}_+)$ telle que $\exp\{I_1(h)\} \in L^2(\Omega)$ (Surgailis [6, Proposition 2.2] a prouvé que cette condition est équivalente à $\int_{\{h>1\}} e^{2h(x)}\,dx < \infty$) on a,

$$\exp\{I_1(h)\} = \exp\{\int_0^\infty (e^{h(s)} - 1 - h(s))ds\} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} I_n((e^h - 1)^{\otimes n}). \tag{4}$$

On peut faire une démonstration brève de (4), compte tenu de ce que la solution de l'équation de Doléans

$$Y_t = 1 + \int_{]0,t]} Y_{s^-}(e^{h(s)} - 1)\,dX_s$$

qui est

$$Y_t = \exp\{\int_0^t (e^{h(s)} - 1)\,ds\} \prod_{T_i \le t} (1 + e^{h(T_i)} - 1) = e^{\int_0^t h(s)\,dX_s} \exp\{\int_0^t (e^{h(s)} - h(s) - 1)\,ds\},$$

(voir Yor [7]), et d'autre part, la décomposition en chaos de Y_t donne

$$Y_\infty = 1 + \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} I_n((e^h - 1)^{\otimes n}).$$

Revenons à l'intégrale de Stratonovich: Soit h qui vérifie la condition de Surgailis du paragraphe précédent. Grâce à (1) et (4), nous avons deux expressions de $\exp\{\lambda I_1(h)\}$, et alors

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^k (I_1(h))^k}{k!} = \exp\{\int_0^\infty (e^{\lambda h(x)} - 1 - \lambda h(x))dx\} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} I_n((e^{\lambda h} - 1)^{\otimes n})$$

et, en identifiant les coefficients de λ (utilisant (2) et (3)), on obtient, pour $f = h^{\otimes n}$,

$$I_n^S(f) = \sum_{(k_1,\dots,k_s)\in\Gamma_n} \frac{n!}{\prod_{r=1}^m (r!)^{k_r} k_r!}$$

$$\cdot \sum_{j=0}^{k_2+\dots+k_m} I_{k_1+\dots+k_m-j}\Big(\int_{\mathbb{R}_+^j} \Big(\sum_{\substack{l_1,\dots,l_j=k_1+1\\ l_1<\dots<l_j}}^{k_1+\dots+k_m} D^{(k_1,\dots,k_m)} f(x_1,\dots,x_{k_1+\dots+k_s})\Big) dx_{l_1}\dots dx_{l_j}\Big). \tag{5}$$

(Ceci est un calcul très lourd et il est omis; il vaut mieux utiliser la formule que nous donnons dans la remarque III.1 de [5]).

Alors on finit comme dans le cas brownien: Etant donnée $f \in L_s^2(\mathbb{R}_+^n)$, on considère une suite de fonctions élémentaires $\{f_n, n \geq 1\}$, (dont les composantes vérifient la condition de Surgailis), la formule (5) est vraie pour $R_\varphi(f_n)$ (si φ est suffisanment bonne); on prend la limite suivant n et ensuite selon la famille des approximations. Pour que ces limites existent il est suffisant que pour chaque $(k_1,\dots,k_m) \in \Gamma_n$, la limite dans $L^2(\mathbb{R}_+^{k_1+\dots+k_m}$ de la limite dans $L^2(\mathbb{R}_+^{k_1+\dots+k_m})$ de $C^{k_1,\dots,k_m} f$ existe. Dans ce cas, cette limite est dénotée par $D^{k_1,\dots,k_m} f$, et on dit que f est *bien définie sur la diagonale* $(k_1,\dots,k_m)$. On obtient alors la formule (5) pour ce cas général.

3. L'intégrale trajectorielle

Dans le cas Poissonnien, on peut considérer une intégrale de Stratonovich trajectorielle. En effet, on considère une fonction $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ mesurable, et on peut partager $\mathbb{R}_+^n$ en cônes et différentes diagonales. Si f est intégrable relativement au processus de Poisson (par trajectoires) sur chaque zone (c'est à dire, si f sur le cône $\{0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$, la restriction $f(x_1,x_1,x_2,\dots,x_{n-1})$ sur $\{0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}\}$, etc, sont (Poisson) intégrables (voir sur ce point les conditions nécessaires et suffisantes donnés par Kallenberg-Szulga [3] pour l'intégrale multiple trajectorielle pour le Poisson non compensé), on obtient la formule (5) avec $D^{k_1,\dots,k_m} f$ reemplacée par la fonction

$$f(x_1,\dots,x_{k_1},x_{k_1+1},x_{k_1+1},\dots,x_{k_1+k_2},x_{k_1+k_2}\dots$$
$$x_{k_1+k_2+\dots+k_m},\dots,x_{k_1+k_2+\dots+k_m}),$$

D'autre part, comme dans le cas du processus de Wiener, si f est une fonction test sur $\mathbb{R}^n$, on peut définir $I_n^S(f)$ comme

$$\int f(s_1,\dots,s_n)\dot{X}_{s_1}(\omega)\dots\dot{X}_{s_n}(\omega)\, ds_1\dots ds_n\,,$$

où $\dot{X}_s(\omega)$ est la dérivée au sens des distributions, qui, dans ce cas, vaut

$$\dot{X}_s(\omega) = \sum_{T_i(\omega)\leq s} \delta_{T_i(\omega)}(s) - 1\,.$$

Et donc, on obtient ainsi l'intégrale trajectorielle.

Si nous forçons un peu le formalisme de la section précédente, on a

$$\dot{X}_s(\omega) = \int \varphi(s,t)\, dX_t$$

où $\varphi(s,t) = \delta_s(t)$. Cela veut dire qu'on approxime la trajectoire par la même trajectoire (évidemment nous sortons du cadre des fonctions de Cameron-Martin). Alors

$$\begin{aligned} C\varphi^{k_1,\ldots,k_m} f = \\ = f(x_1, \ldots, x_{k_1}, x_{k_1+1}, x_{k_1+1}, \ldots, x_{k_1+k_2}, x_{k_1+k_2} \cdots \\ x_{k_1+k_2+\cdots+k_m}, \ldots, x_{k_1+k_2+\cdots+k_m}), \end{aligned}$$

et si cette fonction de droite est dans $L^2(\mathbb{R}^{k_1+\cdots+k_m})$ alors $D^{k_1,\ldots,k_m} f$ existera et sera aussi égale à cette fonction. Enfin, toutes les intégrales que nous avons construites coïncident dans cette situation.

RÉFÉRENCES

[1] Y.Z. HU et P.A. MEYER, On the approximation of multiple Stratonovich integrals. To appear in the volume dedicated to G, Kallianpur. S. Cambanis and R. Karandikar edit., Springer, 1992.

[2] G.W. JOHNSON and G. KALLIANPUR, Some remarks on Hu and Meyer's paper and infinite dimensional calculus on finitely additive canonical Hilbert space. *Theory of Prob. and Its Appl. (SIAM)*, Vol **34** No **4** (1989), pp. 679–689.

[3] O. KALLENBERG and J. SZULGA, Multiple integration with respect to Poisson and Levy processes. *Probability Theory and Rel. Fields* **83** (1989), pp.101–134.

[4] F. RUSSO et P. VALLOIS, Intégrales progressive, rétrograde et symmétrique des processus non adaptes. *C.R.A.S.* Série 1, T. **312** (1991), pp. 615–618.

[5] J.Ll. SOLÉ et F. UTZET, Intégrale multiple de Stratonovich pour le processus de Poisson. *Sém. Prob.* XXV, Lect. Notes in Math., **1485**, Springer (1991), pp. 270–283.

[6] D. SURGAILIS, On multiple Poisson stochastic integrals and associated Markov semmigroups. *Prob. Math. Stat.* **3** (1984), pp. 217–239.

[7] M. YOR, Sur les intégrales stochastiques multiples optionnelles et une suite rémarquable de formules exponentielles. *Sém. Prob.* X, Lect. Notes in Math., **511**, Springer (1976), pp. 481–500.

Josep Lluis SOLÉ
Departament Matemàtiques Aplicades III
E.T.S. Enginyers de Camins
Gran Capitán, s.n.
08034 Barcelona
SPAIN

Frederic UTZET
Department Estadística
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
Gran Via 585
08007 Barcelona
SPAIN