SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

FREDERIC UTZET

Les processus à accroissements indépendants et les équations de structure

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 405-409
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__405_0>

LES PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS ET LES EQUATIONS DE STRUCTURE

Frederic UTZET

Etant donnée une martingale X telle que $< X, X >_t = t$ (ou, plus généralement, avec $< X, X >$ déterministe) on peut définir *l'intégrale stochastique multiple* $I_n(f)$, $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ ($L^2(\mathbb{R}_+^n, d < X, X >^n)$ dans le cas général) de la même façon que dans le cas de Wiener, voir Meyer [6], et la notion de *chaos d'ordre n*, C_n, comme l'image de $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ pour I_n, peut être aussi considérée. Si on peut décomposer $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ($\mathcal{F}$ σ-algebre engendrée par X) en somme $\bigoplus_{n=0}^{\infty} C_n$ on dit que X à la *propriété de représentation chaotique.* En relation avec cette propriété, Emery [2] a proposé de considérer les *équations de structure*

$$[X, X]_t = t + \int_0^t \phi_s \, dX_s \quad ,$$

où X est une martingale, ϕ un processus prévisible et $\int \phi \, dX$ une martingale. (Notez que $< X, X >_t = t$). Emery prouve que si ϕ est déterministe, alors l'unique solution est un processus à accroissements indépendants (P.A.I.) sans discontinuités fixes, et avec la propriété de représentation chaotique.

Dans cette Note, nous prouvons la proposition réciproque, et tout en utilisant un resultat de He-Wang [3] (voir aussi Dermoune [1]) sur les P.A.I. avec représentation prévisible, nous identifions la fonction ϕ. Il faut noter que pour ces P.A.I. la propriété de représentation prévisible est équivalente à la propriété de représentation chaotique (He-Wanng [4], Dermoune [1]).

Proposition: Soit $X = \{X_t, \, t > 0\}$ un P.A.I. centré d'ordre 4, admettant une version cadlag, sans discontinuités fixes, et avec la propriété de répresentation chaotique. Alors X vérifie l'équation de structure

$$[X, X]_t = < X, X >_t + \int_0^t \phi_s \, dX_s \quad ,$$

avec ϕ déterministe.

Preuve:

Soit

$$X_t = Y_t + \int\int_{]0,t] \times \mathbb{R}^*} v \, \tilde{N}(ds, dv) \quad ,$$

la représentation de Lévy de X, où Y est une martingale continue, avec $< Y, Y >$ déterministe, N est une mesure aléatoire de Poisson, indépendante de Y, avec mesure de Lévy ν qui intégre la fonction $\mathbf{1}_{]0,t]} \times v^4$ pour tout t fini, et $\tilde{N} = N - \nu$.

Par la formule d'Itô,

$$X_t^2 = 2 \int_0^t X_{s^-} \, dX_s + [X, X]_t = I_2(\mathbf{1}_{[0,t]^2}) + [X, X]_t \, ,$$

où $I_n(f)$ est l'intégrale stochastique multiple de $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n, d < X, X >^n)$. Alors pour obtenir la répresentation chaotique de $[X, X]$ il suffit de trouver la décomposition de X^2. Soit

$$X_t^2 = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(t)). \tag{1}$$

Le premier élément de (1) est clair:

$$f_0(t) = E[X_t^2] =< X, X >_t .$$

Pour calculer f_1, considérons $0 < s' < s'' < t$. Alors

$$\begin{aligned} E[X_t^2 I_1(\mathbf{1}_{(s',s'')})] &= E[(X_{s'} + X_{s''} - X_{s'} + X_t - X_{s''})^2 (X_{s''} - X_{s'})] \\ &= E[(X_{s''} - X_{s'})^3] = E\left[\Big(\int\int_{]s',s'']\times\mathbb{R}^*} v\, d\tilde{N}(dr, dv) \Big)^3 \right]. \end{aligned} \tag{2}$$

Il est facile de trouver la fonction caractéristique de $\int\int_{]0,t]\times\mathbb{R}^*} v\, d\tilde{N}(dr, dv)$, ou bien on peut appliquer la formule d'Itô (la version, p.ex., d'Ikeda-Watanabe [5]) et on obtient

$$(2) = \int\int_{]s',s'']\times\mathbb{R}^*} v^3\, d\nu(dr, dv) .$$

Pour la propriété d'isométrie de l'intégrale stochastique multiple on a

$$E[X_t^2 I_1(\mathbf{1}_{(s',s'')})] = \int_{s'}^{s''} f_1(x,t)\, d < X, X >_x = \int\int_{]s',s'']\times\mathbb{R}^*} v^3\, d\nu(dr, dv) .$$

Alors, pour tout borélien $A \subset]0, t]$,

$$\int_A f_1(x,t)\, d < X, X >_x = \int\int_{A\times\mathbb{R}^*} v^3\, d\nu(dr, dv)$$

et le coté de droite est indépendant de t. Il résulte que si $t' < t$, pour tout borélien $A \subset]0, t']$,

$$\int_A f_1(x,t)\, d < X, X >_x = \int_A f_1(x,t')\, d < X, X >_x ,$$

et par conséquent

$$f_1(x,t) = f_1(x,t'), \quad d < X, X > -\text{p.p. } x \in]0, t'] . \tag{4}$$

Il est aussi clair que pour $t < s' < s''$,

$$\int_{s'}^{s''} f_1(x,t)\, d < X, X >_x = 0 . \tag{5}$$

De (4) et (5) résulte qu'on peut définir ($d < X,X >$-p.p.) une fonction $\phi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mesurable, telle que pour tout $t > 0$,

$$\phi(x)\mathbf{1}_{]0,t]}(x) = f_1(x,t)\,, \quad d < X,X > -\text{p.p.}$$

(Par exemple, $\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(x,n+1)\mathbf{1}_{]n,n+1]}(x)$).

Le terme d'ordre 2 est aussi facile à calculer: Pour $s \neq r$, si $s > t$,

$$E[X_t^2 I_1(\mathbf{1}_{J(s)})I_1(\mathbf{1}_{J(r)})] = 0\,,$$

où $J(x) = (x', x'')$ est un voisinage de x, et $J(s) \cap J(r) = \emptyset$. Pour $s'' \vee r'' < t$,

$$\begin{aligned} E[X_t^2 I_1(\mathbf{1}_{J(s)})I_1(\mathbf{1}_{J(r)})] &= \\ &= 2E[(X_{r''} - X_{r'})^2]\, E[(X_{s''} - X_{s'})^2] \\ &= 2(< X,X >_{r''} - < X,X >_{r'})(< X,X >_{s''} - < X,X >_{s'}) \\ &= 2\int_{r'}^{r''}\int_{s'}^{s''} f(x_1,x_2,t)\, d < X,X >_{x_1}\, d < X,X >_{x_2}\,, \end{aligned}$$

et on a

$$f_2(\cdot,t) = \mathbf{1}_{[0,t]^2}(\cdot)\,, \quad d < X,X >^2 -\text{p.p.}$$

Finalement, tous les termes d'ordre $n \geq 3$ sont nuls. En effet, étant donnés n intervalles disjoints $J_1, \ldots, J_n$, par la propiété P.A.I. on a

$$E[X_t^2 I_1(\mathbf{1}_{J_1})\ldots I_1(\mathbf{1}_{J_n})] = 0\,.$$

et, en outre,

$$E[X_t^2 I_1(\mathbf{1}_{J_1})\ldots I_1(\mathbf{1}_{J_n})] = n! \int_{J_1\times\cdots\times J_n} f_n(s_1,\ldots,s_n,t)\, d < X,X >_{s_1} \ldots d < X,X >_{s_n}\,,$$

et, donc,

$$f_n(\cdot,t) = 0\,, \quad d < X,X >^n -\text{p.p.}$$

Et on obtient la proposition.

Identification de la fonction ϕ

Sous les hypotèses de la proposition, on peut appliquer le résultat de He-Wang [3] (voir aussi Dermoune [1]) qui établit que la condition nécessaire et suffisante pour que X ait la propriété de représentation prévisible est que la mesure de Lévy ν se décompose comme

$$\nu(ds,dv) = \rho(ds) \otimes \delta_{u(s)}(dv)$$

où δ_x est la loi dégénérée au point x, $u : (0,\infty) \to \mathbb{R}^*$ est une fonction mesurable, et ρ est une mesure singulière par rapport à $d < Y, Y >$.

Du fait que

$$< X, X >_t = < Y, Y >_t + \int\int_{]0,t]\times\mathbb{R}^*} v^2\, \nu(ds, dv) = < Y, Y >_t + \int_0^t u^2(s)\, \rho(ds)\,,$$

on déduit que la mesure ρ est absolument continue par rapport à $d < X, X >$ sur $\{u \neq 0\}$. Nous écrirons

$$\frac{d\rho}{d < X, X >} = g\,, \quad \text{sur} \quad \{u \neq 0\}.$$

Alors, en reprenant les calculs antérieurs, avec $t > 0$ fixé, pour tout borélien $A \subset]0, t]$,

$$\int_A \phi(x)\, d < X, X >_x = \int\int_{A\times\mathbb{R}^*} v^3\, \nu(ds, dv) = \int_A u^3(x) g(x)\, d < X, X >_x\,,$$

et, donc,

$$\phi(x) = u^3(x) g(x)\,, \quad d < X, X > \text{–p.p..}$$

Le cas d'Emery

Emery étudie le cas où $< X, X >_t = t$. Alors $d < Y, Y > \ll dt$, et en posant $\dfrac{d < Y, Y >}{dt} = f$, on a

$$< X, X >_t = t = \int_0^t f(x)\, dx + \int_0^t u(x)^2 g(x)\, dx\,,$$

et en conséquence,

$$f(x) + u^2(x) g(x) = 1\,, \quad \text{p.p.t.},$$

et du fait que $d < Y, Y >$ et ρ sont singuliers, on déduit

$$u^2(x) g(x)\, \mathbf{1}_{\{g\neq 0\}}(x) = \mathbf{1}_{\{g\neq 0\}}(x)\,,$$

et par suite, on a les relations:

$$u\, \mathbf{1}_{\{g\neq 0\}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \mathbf{1}_{\{g\neq 0\}} \quad \text{et} \quad f = \mathbf{1}_{\{g\neq 0\}}\,.$$

(Notez que les valeurs de u sur $\{g = 0\}$ ne sont pas importantes pour le processus X). Alors l'équation de structure qu'on obtient est

$$[X, X]_t = t + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \mathbf{1}_{\{g\neq 0\}}(x)\, dX_x\,.$$

REFERENCES

[1] A. DERMOUNE, Distributions sur l'espace de P.Lévy et calcul stochastique. Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 26, n. 1, 1990, pp. 101–119.

[2] M. EMERY, On the Azéma Martingales. Sém. Prob. XXIII, Lect. Notes in Math. 1372 , Springer-Verlag, 1989, pp. 66–87.

[3] S.W. HE and J.G. WANG, The total continuity of natural filtrations. Sém. Prob. XVI, Lect. Notes in Math. 920, Springer-Verlag, 1982, pp. 348–354.

[4] S.W. HE and J.G. WANG, Chaos decomposition and property of predictable representation. Science in China (Series A), Vol 32, 4, 1989, pp. 397–407.

[5] N.IKEDA and S.WATANABE, Stochastic Differential Equations and Diffussion Processes. North-Holland, 1981.

[6] P.A. MEYER, Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém. Prob. X, Lect. Notes in Math. 511, Springer-Verlag, 1976, pp. 535–581.

Departament d'Estadística
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
Gran Via 585
08007 Barcelona, SPAIN

Commentaires du Séminaire. Le résultat d'Utzet subsiste même si l'on ne suppose pas la propriété de représentation chaotique ou prévisible : *si une martingale X est à accroissements indépendants et vérifie une équation de structure $d[X,X]_t = dt + H_t\,dX_t$, le processus prévisible H* est déterministe, ou plutôt *peut être choisi déterministe.*

Soit en effet ϕ une fonction positive, nulle au voisinage de zéro et bornée; posons $\psi(x) = \phi(x)/x^2$ (c'est une fonction bornée) et $\Psi = \psi\circ H$. Pour $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\Big[\int_t^{t+2^{-n}} \Psi_s\,ds \;\Big|\; \mathcal{F}_t\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_t^{t+2^{-n}} \phi\circ H_s\,\frac{ds}{H_s^2} \;\Big|\; \mathcal{F}_t\Big] = \mathbb{E}\Big[\sum_{t<s\leq t+2^{-n}} \phi(\Delta X_s) \;\Big|\; \mathcal{F}_t\Big]$$

(car ds/H_s^2 est l'intensité des sauts); l'hypothèse d'indépendance des accroissements entraîne que cette espérance conditionnelle est déterministe. Mais, pour presque tout (t,ω),

$$\Psi_t = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{-n}}\int_t^{t+2^{-n}} \Psi_s\,ds\ ;$$

prenant des deux côtés l'espérance conditionnelle sur $\mathcal{F}_t$, on en déduit que Ψ lui-même est déterministe après modification sur un négligeable de $\mathbb{R}_+\times\Omega$. En utilisant une suite convenable de fonctions ϕ (par exemple les indicatrices des intervalles $]2^{-n},\infty[$ et $]-\infty,-2^{-n}[$), il est facile de voir que H est presque partout égal à un processus déterministe H'. Comme $\langle X,X\rangle_t = t$, H et H' ont même intégrale par rapport à X, et l'on peut substituer le second au premier dans l'équation de structure.