SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN BERTOIN

Une famille de diffusions qui s'annulent sur les zéros d'un mouvement brownien réfléchi

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 348-360

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__348_0>

UNE FAMILLE DE DIFFUSIONS QUI S'ANNULENT
SUR LES ZÉROS D'UN MOUVEMENT BROWNIEN RÉFLÉCHI

Jean BERTOIN

Laboratoire de Probabilités (L.A. 224), Université Pierre et Marie Curie
4, Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France.

Résumé: on considère une famille de diffusions positives réfléchies en 0, dont la partie martingale est un mouvement brownien noté $-B$, et qui s'annulent quand B atteint son supremum. On décrit le comportement d'une telle diffusion sur les intervalles de temps sur lesquels le supremum de B reste constant.

1. Introduction

Considérons $X = (X_t : t \geq 0)$ une diffusion régulière issue de 0, réfléchie en 0 (barrière instantanément réfléchissante), et dont la fonction d'échelle $\mathfrak{s}$ et la mesure de vitesse $\mathfrak{m}$ vérifient les conditions suivantes:

(i) $\mathfrak{s} : [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty]$ est une fonction convexe nulle en 0

(ii) $\mathfrak{m}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0,\infty[$ avec pour densité $\mathfrak{m}(dx)/dx = 2/\mathfrak{s}'(x)$.

(iii) $\displaystyle\int_{0+} \mathfrak{m}(dx) = 2 \int_{0+} dx/\mathfrak{s}'(x) < \infty$. (1)

De façon informelle, (i) signifie que la diffusion est attirée par 0 tant qu'elle reste strictement positive, (ii) que le terme du second ordre dans le générateur infinitésimal est $(1/2)\ d^2\cdot/dx^2$, c'est-à-dire que la partie martingale locale de la diffusion est un mouvement brownien, et (iii) est une condition nécessaire et suffisante pour que 0 soit un point d'entrée pour la diffusion (sinon on ne pourraît pas parler de diffusion réfléchie). Par exemple, la diffusion peut être un processus de Bessel de dimension $d \in]0,1]$ ($\mathfrak{s}(x) = x^{2-d}$), ou un mouvement brownien à valeurs dans $[0,1]$ avec réflexion instantanée en 0 et 1 ($\mathfrak{s}(x) = x$ si $x \in [0,1]$, $\mathfrak{s}(x) = +\infty$ si $x > 1$), ou encore la solution d'une équation différentielle stochastique du type: $dX_t = d\beta_t - b(X_t)dt + K_t$, où β est un mouvement brownien, b une fonction continue positive et K un processus croissant qui ne croît que sur les zéros de X (voir [6]).

Le point de départ de cette étude (initiée en [3] et [4]) est que X est un processus de Dirichlet (voir [7]) dont l'écriture canonique ressemble à celle d'un mouvement brownien réfléchi:

$$X = N - B \ , \tag{2}$$

avec B mouvement brownien et N fonctionnelle additive d'énergie nulle qui s'exprime comme intégrale singulière des temps locaux de X :

$$N_t = (1/s'(\infty))\lambda_t^0 - \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{]\varepsilon,\infty[} (\lambda_t^a - \lambda_t^\varepsilon)\,(s'(a))^{-2}\, s''(da) \ , \tag{3}$$

où $(\lambda_t^a : a \in \mathbb{R}_+ \ , \ t \geq 0)$ sont les temps locaux bicontinus de X [c'est-à-dire les densités d'occupation de X par rapport à $m(dx)$]. On voit sur cette expression que la fonctionnelle N décroît quand $X > 0$, et il découle alors des arguments classiques du type de ceux de Skorohod, que

$$\sup\{N_s : s \leq t\} = \sup\{B_s : s \leq t\} \quad \text{p.s.} \tag{4}$$

Notons S_t cette quantité. En écrivant (2) sous la forme $X = (N-S) + (S-B)$, on observe alors l'inégalité

$$X \leq S - B \ .$$

Comme de plus $X \geq 0$, on a donc l'inclusion

$$\mathcal{Z} \subseteq \{t \ : X_t = 0\} \quad \text{p.s.}, \tag{5}$$

où $\mathcal{Z} = \{t \ : \ S_t = B_t\}$ désigne l'ensemble des temps en lesquels S croît. Autrement dit, la diffusion X s'annule sur les zéros du mouvement brownien réfléchi $S-B$.

Dans une première partie, nous établissons (sous certaines hypothèses techniques) la réciproque de la propriété (5): étant donnée une diffusion régulière de fonction d'échelle s et de mesure de vitesse m , nous montrons que si cette diffusion est un processus de Dirichlet dont la décomposition canonique est du type (2), alors s et m vérifient les conditions (1-ii) et (1-iii). Si de plus l'analogue de (5) est satisfait, alors s vérifie (1-i).

Dans une seconde partie, nous nous intéressons au comportement de X sur les intervalles de constance de S . Plus précisément, nous montrons d'abord que si $s'(0) = 0$, alors une extrémité gauche d'un intervalle de constance de S n'est jamais le début d'une excursion de X (c'est-à-dire que X retourne en 0 immédiatement après ce temps). Au contraire, si $s'(0) > 0$, une telle extrémité gauche est toujours le début d'une excursion de X , et la loi de cette excursion est tout simplement $s'(0) \times n$, où n est la mesure d'Itô de la diffusion . Nous traitons également des questions similaires quant aux extrémités droites des intervalles de constance de S (resp. des intervalles d'excursion de X). Puis, nous nous intéressons à la portion de trajectoire de la diffusion comprise entre les instants $t - A_t$ et t , où A_t désigne l'âge de l'excursion de $S-B$ à l'instant t (c'est-à-dire que $t-A_t$ est le dernier instant avant t en lequel S croît). Nous établissons une relation d'absolue continuité entre d'une part la loi de $(X_{t-A_t+s} : s \le A_t)$ conditionnellement à A_t , et d'autre part la loi de la diffusion conditionnée (au sens des h-transformées) par $N \le 0$, qui a été introduite dans [4]). Ce résultat est lié à une relation dûe à Imhof [9] entre le méandre brownien et le processus de Bessel de dimension 3.

2. Convexité de la fonction d'échelle et zéros de la diffusion

Considérons ici une diffusion régulière X réfléchie en 0 (barrière instantanément réfléchissante), de fonction d'échelle s et de mesure de vitesse m . Nous supposerons que sur $]0,\infty[$, s est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et que $s' > 0$ (ces hypothèses peuvent sans doûte être affaiblies). L'objet de cette section est d'établir des réciproques aux relations (2) et (5).

Supposons d'abord que X est un processus de Dirichlet dont la partie martingale locale, notée $-B$, est un mouvement brownien. Autrement dit, $N = X+B$ est un processus à variation quadratique nulle. On vérifie alors facilement que la mesure de vitesse m est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0,\infty[$, avec pour densité $m'(x) = 2/s'(x)$. Pour cela, il suffit de considérer la diffusion issue de $x > 0$ et tuée en 0 , et d'appliquer la formule d'Itô à $s^{-1}(s(X)) = X$, où s^{-1} est la fonction inverse de s (qui est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,\infty[$). De plus, on a nécessairement que $\int_{0+} dm(x) = 2\int_{0+} dx/s'(x) < \infty$, puisque 0 est un point régulier pour X . Ainsi, Δ et m vérifient les conditions (1-ii) et (1-iii). Montrons maintenant que la convexité de Δ [i.e. (1-i)] est entraînée par l'analogue de (5).

Proposition 1. *Sous les hypothèses précédentes, supposons que X s'annule quand B atteint son supremum. Alors Δ est convexe, et B et N ont le même processus supremum.*

Preuve. Nous savons que Δ et m vérifient (1-ii,iii). Les arguments de la preuve de la Proposition 1 de [3] montrent que le processus à variation quadratique nulle $N = X+B$ se représente comme intégrale singulière des temps locaux $(\lambda_t^a : a \in \mathbb{R}_+ , t \geq 0)$ de X :

$$N_t = (1/\Delta'(\infty))\lambda_t^0 - \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{]\varepsilon,\infty[} (\lambda_t^a - \lambda_t^\varepsilon)\,(\Delta'(a))^{-2}\,\Delta''(a)\,da .$$

Désignons pour simplifier par $S_t = \sup\{B_s : s \leq t\}$, le suprémum de B , et par $Z = \{t : S_t = B_t\}$, l'ensemble des temps en lesquels S croît. L'hypothèse de la proposition 1 est donc que $Z \subseteq \{t : X_t = 0\}$ p.s.

Désignons par τ l'inverse du temps local en 0 . La propriété forte de Markov entraîne que $\mathcal{N} = N_\tau = B_\tau$ est un processus de Lévy. Comme Z est contenu dans l'ensemble des zéros de X , alors S ne croît que sur les zéros de X , et donc, pour tout $t \geq 0$:

$$S_{\tau(t)} = \sup\{\mathcal{N}_s : s \leq t\} .$$

Observons encore qu'alors S_τ est un processus continu. En effet, les sauts éventuels de S_τ ne peuvent provenir que des sauts de τ , et nous savons par hypothèse que S reste constant sur les intervalles d'excursion de X . Or il est clair qu'un processus de Lévy a un supremum continu si et seulement si sa mesure de Lévy ne charge pas $]0,\infty[$ (c'est-à-dire si $\mathcal{N}$ n'a pas de saut positif). Comme la mesure de Lévy de $\mathcal{N}$ est la loi de N_ζ (où ζ est le temps de vie) sous la mesure d'excursion $\mathfrak{n}$ de X , on a donc que

$$0 \leq \int_{]0,\infty[} \lambda_\zeta^a\,(\Delta'(a))^{-2}\,\Delta''(a)\,da , \quad \mathfrak{n}\text{-p.p.}$$

Montrons maintenant que cette condition entraîne que $\Delta'' \geq 0$: supposons qu'il existe $a > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\Delta''(b) \leq -\varepsilon$ pour tout $|b-a| \leq \varepsilon$.

Notons respectivement $T = \inf\{t : X_t = a\}$ et $L = \sup\{t < \zeta : X_t = a\}$, le premier et le dernier temps de passage de X en a . Sous $\mathfrak{n}$, conditionnellement à $T < \zeta$, les processus $(X_t : t < T)$, $(X_{T+t} : t < L-T)$ et $(X_{L+t} : t < \zeta-L)$ sont indépendants. De plus, pour tout $K > 0$,

$$\mathfrak{n}(L-T > K \,,\; |X_t - a| \le \varepsilon \text{ pour tout } t \in [T,L] \mid T < \zeta) > 0 \,,$$

de sorte que $\mathfrak{n}(N_L - N_T > K') > 0$ pour tout $K' > 0$. Ceci entraîne que $\mathfrak{n}(N_\zeta > 0) > 0$, ce qui contredit donc le fait que N n'a pas de saut positif. Ainsi $\Delta'' \ge 0$. Ceci implique que N décroît sur chaque intervalle d'excursion de X hors de 0 . Il en découle que S est bien le processus supremum de N . □

3. Étude de la diffusion sur les intervalles de constance de S

Dans toute cette section, nous noterons X le processus des coordonnées sur l'espace canonique des trajectoires continues (jusqu'en leur temps de mort), et respectivement $\theta_\bullet$ et $k_\bullet$, les opérateurs de translation et de meurtre. On notera $\mathbb{P}_0$ la loi de la diffusion décrite dans l'Introduction.

On montre aisément que le couple (X,S-B) est un processus de Markov fort sous $\mathbb{P}_0$, et, grâce à (5), que les intervalles d'excursion de S-B hors de 0 sont exactement les intervalles d'excursion du couple (X,S-B) hors de (0,0) . Comme S est une fonctionnelle additive continue de S-B qui ne croît que quand (X,S-B) = (0,0) , S est le temps local (markovien) naturel à l'origine de (X,S-B) . Nous notons σ , l'inverse continu à droite de S , c'est-à-dire

$$\sigma(t) = \inf\{s : S_s > t\} = \inf\{s : B_s > t\} = \inf\{s : N_s > t\} \,,$$

et à l'instar d'Itô [10], nous considérons le processus

$$t \mapsto (X_{\sigma(t-)+s} : 0 \le s \le \sigma(t) - \sigma(t-)) \,.$$

C'est un processus de Poisson ponctuel, et nous désignons par $\hat{\mathbb{P}}$ sa mesure caractéristique. Remarquons que, par additivité, la fonctionnelle N est encore définie grâce à la formule (3), pour $\hat{\mathbb{P}}$-presque toute trajectoire, et que sous $\hat{\mathbb{P}}$, X-N suit la loi des excursions browniennes positives.

a) Loi de la première excursion sous $\hat{\mathbb{P}}$. L'objet de cette sous-section est de décrire sous $\hat{\mathbb{P}}$, la loi de la première excursion de X , c'est-à-dire de $X \circ k_{H(0)}$, où $H(x) = \inf\{t > 0 : X_t = x\}$ désigne le premier temps d'atteinte de x . Notons encore n la mesure d'excursion de la diffusion, i.e. la mesure caractéristique du $\mathbb{P}_0$-processus de Poisson ponctuel

$$t \mapsto (X_{\tau(t-)+s} : s \le \tau(t) - \tau(t-)) ,$$

où $\tau(t) = \inf\{s : \lambda_s^0 > t\}$ est l'inverse du temps local en 0 de X .

Théorème 2. *(i) Si* $s'(0) > 0$ *, alors* $\hat{\mathbb{P}}(H(0) = 0) = 0$ *, et la loi de* $X \circ k_{H(0)}$ *sous* $\hat{\mathbb{P}}$ *est* $s'(0)\, n$.

(ii) Si $s'(0) = 0$ *, alors* $\hat{\mathbb{P}}(H(0) > 0) = 0$.

Remarque. Il est intéressant de faire ici un parallèle avec l'article d'Azéma et Yor [1]: on montre facilement que $s(X)$ est la valeur absolue d'une martingale locale continue M (dans un espace filtré élargi, voir par exemple [2]) . L'ensemble des zéros de M est donc $\mathcal{Z}$. Rappelons que d'après un théorème de Paul Lévy, il existe (dans un espace élargi) un mouvement brownien β de valeur absolue $S-B$, que S est le temps local en 0 de β , et que les zéros de β sont contenus dans ceux de M d'après (5). Lorsque $s'(0) = 0$, on peut montrer grâce à (3) que la mesure aléatoire dS_t est singulière par rapport à $d\lambda_t^0$. D'après le Corollaire 3.9.5 de [1], ceci implique que p.s., une extrémité gauche d'un intervalle d'excursion de β n'est jamais l'extrémité gauche d'un intervalle d'excursion de M . Ceci est bien en accord avec le Théorème 2-ii.

Afin d'établir le Théorème 2, nous introduisons les notations suivantes: nous désignons par G l'ensemble des extrémités gauches des intervalles d'excursions de X hors de 0 , et par $\mathfrak{G}$ l'ensemble des extrémités gauches des intervalles d'excursion de $S-B$ hors de 0 (c'est-à-dire l'ensemble des points de $\mathcal{Z}$ qui sont isolés à gauche).

Preuve du Théorème 2. (i) Quand $s'(0) > 0$, l'expression (3) montre que la fonctionnelle N est à variation bornée, et s'exprime de façon canonique comme la différence

$$N_t = (1/s'(0))\, \lambda_t^0 - \int_{]0,\infty[} \lambda_t^a\, (s'(a))^{-2}\, s''(da) .$$

Nous en déduisons que, $\mathbb{P}_0$-p.s.,

$$S_t = s'(0)^{-1} \int_0^t \mathbf{1}_{\{S_s=N_s\}} d\lambda_s^0 . \tag{6}$$

Soit A un processus prévisible positif. D'après la formule du système de sortie (voir par exemple [5], section XX-2), nous avons

$$\mathbb{P}_0\Big(\sum_{g\in\mathfrak{G}} \mathbf{1}_{\{g<\sigma(1)\}} \times \mathbf{1}_{\{H(0)\circ\theta_g>0\}} \times A_{H(0)}\circ\theta_g\Big)$$

$$= \mathbb{P}_0\Big(\int_0^1 dt\ \hat{\mathbb{P}}(A_{H(0)}\ ,\ H(0) > 0)\Big)$$

$$= \hat{\mathbb{P}}(A_{H(0)}\ ,\ H(0) > 0)\ .$$

D'autre part, $\mathbb{P}_0$-p.s., si $g \in \mathfrak{G}$ et $H(0)\circ\theta_g > 0$, alors g est l'extrémité gauche d'un intervalle d'excursion de X et $S_g = N_g$. Réciproquement, si $g \in G$ et $S_g = N_g$, alors $S_g = B_g$, et d'après (5), B quitte son suprémum immédiatement après l'instant g (c'est-à-dire $g \in \mathfrak{G}$ et $H(0)\circ\theta_g > 0$). Par conséquent, on a

$$\mathbb{P}_0\Big(\sum_{g\in\mathfrak{G}} \mathbf{1}_{\{g<\sigma(1)\}} \times \mathbf{1}_{\{H(0)\circ\theta_g>0\}} \times A_{H(0)}\circ\theta_g\Big)$$

$$= \mathbb{P}_0\Big(\sum_{g\in G} \mathbf{1}_{\{g<\sigma(1)\}} \times \mathbf{1}_{\{S_g=N_g\}} \times A_{H(0)}\circ\theta_g\Big)$$

$$= \mathbb{P}_0\Big(\int_0^{\sigma(1)} d\lambda_t^0\ \mathbf{1}_{\{S_t=N_t\}}\ n(A_{H(0)})\Big)$$

$$= s'(0)\ n(A_{H(0)}) \qquad \text{(d'après (6))}.$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que $\hat{\mathbb{P}}(H(0) = 0) = 0$. Rappelons que τ désigne l'inverse du temps local en 0 de X et que (par application de la propriété de Markov forte) $N_{\tau(\cdot)} = B_{\tau(\cdot)}$ est un processus de Lévy sans saut positif (puisque N décroît sur les intervalles d'excursion de X) et à variation bornée. De plus, $S_{\tau(t)} = \sup\{N_{\tau(s)}\ :\ s \le t\} = \sup\{B_{\tau(s)}\ :\ s \le t\}$ $\mathbb{P}_0$-p.s. Si $\hat{\mathbb{P}}(H(0) = 0)$ était non nulle, il existerait $\mathbb{P}_0$-p.s. un instant

$g \in \mathfrak{G}$ qui ne serait pas une extrémité gauche d'intervalle d'excursion de X, i.e. $g \notin G$. Ceci entraînerait que le processus de Lévy $B_{\tau(\cdot)}$ atteint son suprémum à l'instant λ_g^0 et qu'il le quitte continument immédiatement après. Ceci ne se produit jamais quand $B_{\tau(\cdot)}$ est à variation bornée, car alors 0 est régulier pour $]0,\infty[$ mais pas pour $]-\infty,0[$. Donc $\hat{\mathbb{P}}(H(0) = 0)$.

(ii) Les mêmes arguments que ci-dessus montrent que $\hat{\mathbb{P}}(H(0) > 0) = 0$ quand $s'(0) = 0$. En effet, si nous supposons le contraire, alors $G \cap \mathfrak{G} \neq \emptyset$ $\mathbb{P}_0$-p.s., c'est-à-dire qu'il existe $g \in \mathfrak{G}$ qui est également l'extrémité gauche d'un intervalle d'excursion de X hors de 0, dont nous notons d l'extrémité droite. Comme la mesure $(s'(a))^{-2}\ s''(da)$ donne une masse infinie à tout voisinage de 0, en particulier [d'après (3)] $B_d = N_d < N_g = B_g$. Ceci signifie qu'à l'instant λ_g^0, le processus de Lévy $B_{\tau(\cdot)}$ quitte son suprémum par un saut. Or $B_{\tau(\cdot)} = N_{\tau(\cdot)}$ étant à variation infinie (ce qui entraîne que, pour le processus de Lévy, 0 est régulier pour $]-\infty,0[$) un tel comportement ne se produit jamais, $\mathbb{P}_0$-p.s., voir par exemple Rogers [13], Corollaire 1. Donc $\hat{\mathbb{P}}(H(0) > 0) = 0$. □

Lorsque $s'(0) > 0$, on peut compléter le Théorème 2 afin de décrire entièrement la mesure $\hat{\mathbb{P}}$: en appliquant la propriété forte de Markov au temps $H(0)$, on obtient que

$$\begin{array}{l}\text{sous } \hat{\mathbb{P}}\text{, conditionnellement à } N_{H(0)} = -y \quad (y \geq 0)\ ,\quad X \circ \theta_{H(0)} \\ \text{est indépendant de } \mathcal{F}_{H(0)} \text{ et a même loi que } X \circ k_{\sigma(y)} \text{ sous } \mathbb{P}_0\ .\end{array} \tag{7}$$

Cette relation permet également de décrire la loi de la dernière excursion de X sous $\hat{\mathbb{P}}$: introduisons $\check{\mathbb{P}}$, l'image de $\hat{\mathbb{P}}$ par retournement du temps au temps de mort, i.e. $\check{\mathbb{P}}(\omega \in \cdot) = \hat{\mathbb{P}}(\check{\omega} \in \cdot)$ avec $\check{\omega}(t) = \omega(\zeta - t)$ $(t \leq \zeta)$. Ainsi, la loi de la dernière excursion de X retournée à son temps de mort sous $\hat{\mathbb{P}}$, est celle de $X \circ k_{H(0)}$ sous $\check{\mathbb{P}}$.

Corollaire 3. *Notons* $i = \inf\{x : s'(x) > s'(0)\}$ *, la borne inférieure du support de la mesure* $s''(dx)$ *sur* $]0,\infty[$.

(i) Si $i > 0$ *, alors* $\check{\mathbb{P}}(H(0) = 0) = s'(0)/s(i)$, $\check{\mathbb{P}}(0 < H(0) < \zeta) = 0$,

et la loi de $X \circ k_{H(0)}$ *sous* $\check{\mathbb{P}}(\cdot,\ H(0) > 0)$ *est* $s'(0)\ \mathfrak{n}(\cdot,\ H(i) = \infty)$.

(ii) Si $i = 0$ *, alors* $\check{\mathbb{P}}(H(0) > 0) = 0$.

Remarque. L'hypothèse (1-iii) garantit que $s'(0) > 0$ dès que $\ell > 0$.

Preuve. (i) Le processus $(\sigma(y) : y \geq 0)$ étant un subordinateur stable d'exposant 1/2 sous $\mathbb{P}_0$ (c'est l'inverse du supremum d'un brownien), en particulier, pour chaque $y > 0$, $\lim_{z\uparrow\uparrow y} \sigma(z) = \sigma(y)$ $\mathbb{P}_0$-p.s. Comme $X_{\sigma(\cdot)}$ est identiquement nul d'après (5), ceci montre que pour chaque $y > 0$, $\mathbb{P}_0$-p.s., $\sigma(y)$ est un point d'accumulation à gauche des zéros de X . D'autre part, lorsque $\ell > 0$, alors d'après (3), la fonctionnelle N est constante sur toutes les excursions de X qui n'atteignent pas ℓ , et attribue une valeur strictement négative à celles qui atteignent ℓ . On déduit de (7) que $\hat{\mathbb{P}}$-p.s., soit la première excursion de X n'atteint pas ℓ et alors la fin de cette excursion est également le temps de mort de X , soit la première excursion atteint ℓ et alors le temps de mort de X est un point d'accumulation à gauche des zéros de X . Comme la mesure d'excursion n de la diffusion est invariante par retournement du temps au temps de mort (voir par exemple [12], section 3.3), et comme $n(H(\ell) < \zeta) = 1/s(\ell)$, la partie (i) découle du Théorème 2.

(ii) Si $\ell = 0$, alors on voit grâce à (3) que $\mathbb{P}_0$-p.s., la fonctionnelle N est strictement décroissante immédiatement à gauche de toute extrémité droite d'intervalle d'excursion de X . Par conséquent, une extrémité droite d'intervalle d'excursion de X ne peut pas être un instant en lequel N atteint son suprémum, et donc $\check{\mathbb{P}}(H(0) > 0) = 0$. □

b) Conditionnement par l'âge. Nous nous intéressons maintenant au comportement de la diffusion au voisinage du temps en lequel S-B commence l'excursion hors de 0 qui enjambe un temps fixe t . Désignons par $A_t = \inf\{s \geq 0 : S_{t-s} = B_{t-s}\}$ l'âge de cette excursion à l'instant t . Nous savons d'après Getoor [8] que la loi de $(X_{t-a+s} : s \leq a)$ sous $\mathbb{P}_0(\cdot \mid A_t = a)$ est la même que la loi de $(X_s : s \leq a)$ sous la mesure de probabilité conditionnelle $\hat{\mathbb{P}}(\cdot \mid \zeta > a)$, où ζ est la durée de vie sous $\hat{\mathbb{P}}$. La description de $\hat{\mathbb{P}}(\cdot \mid \zeta > a)$ que nous allons donner fait intervenir la loi conditionnelle $\mathbb{P}_0(\cdot \mid N \leq 0)$ qui a été étudiée dans [4]. Nous rappelons brièvement ci-dessous comment cette dernière loi a été introduite (voir Théorème III.1 dans [4]).

Sous $\mathbb{P}_0$, pour tout $\varepsilon > 0$, le processus $(X_t - N_t + \varepsilon : t < \sigma(\varepsilon))$ est un mouvement brownien issu de ε et tué en 0 . C'est en particulier une martingale. On note $\mathbb{P}_0(\cdot \mid N \le \varepsilon)$ la mesure de probabilité sur Ω qui est donnée sur la tribu $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \le t)$ par

$$\mathbb{P}_0(\cdot \mid N \le \varepsilon)\Big|_{\mathcal{F}_t} = (1/\varepsilon)\ \mathbb{P}_0(\cdot \times (X-N+\varepsilon)_t \times \mathbf{1}_{\{t<\sigma(\varepsilon)\}})\Big|_{\mathcal{F}_t} .$$

Désignons par $\rho = \sup\{t : S_t < S_\zeta\}$, le dernier instant en lequel S croît, et décomposons la trajectoire à l'instant ρ . Sous $\mathbb{P}_0(\cdot \mid N \le \varepsilon)$, $X \circ k_\rho$ et $X \circ \theta_\rho$ sont indépendants, $X \circ k_\rho$ a même loi que $X \circ k_{H(u)}$ sous $\mathbb{P}_0$, où u désigne une v.a. indépendante uniformément distribuée sur $[0,\varepsilon]$, et enfin, la loi de $X \circ \theta_\rho$ ne dépend pas de ε et est notée $\mathbb{P}_0(\cdot \mid N \le 0)$.

Nous avons la relation d'absolue continuité suivante:

Théorème 4. $\hat{\mathbb{P}}(\cdot \mid \zeta > a)_{|\mathcal{F}_a} = (a\pi/2)^{1/2}\ \mathbb{P}_0[\cdot \times (X-N)_a^{-1} \mid N \le 0]_{|\mathcal{F}_a}$.

Preuve. Fixons donc $a > 0$, et notons $g = \rho \circ k_a = \sup\{t < a : S_t = B_t\}$ le dernier instant avant a en lequel S croît. En particulier, $g \in \mathfrak{G}$ d'après (5). Nous savons d'une part (voir par exemple les sections XX.37-43 de [5]) que sous $\mathbb{P}_0$, conditionnellement à $g = t$, le processus $(X_s \circ \theta_t : s < a-t)$ a pour loi $\hat{\mathbb{P}}(\cdot \mid \zeta > a-t)$ et est indépendant de $\mathcal{F}_t$. D'autre part la loi du couple (S_g, g) a été déterminée par P. Lévy (voir par exemple [11] p.102): pour tout $0 \le t \le a$ et $x \ge 0$, on a

$$\mathbb{P}_0(g \in dt\ ,\ S_g \in dx) = (\pi\sqrt{t(a-t)})^{-1}\ (x/t)\ \exp-(x^2/2t)\ dx\ dt\ .$$

En utilisant l'additivité de la fonctionnelle N et le fait que $X_g = 0$, on a : $X_a - N_a = (X-N)_{a-g} \circ \theta_g - S_g$. On déduit de ce qui précède et de la définition même de la loi $\mathbb{P}_0(\cdot \mid N \le \varepsilon)$, que la loi de $(X_s \circ \theta_g : s < a-g)$ sous $\mathbb{P}_0(\cdot \mid N \le \varepsilon)$ est

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^a dt \int_0^\varepsilon dx\ (\pi\sqrt{t(a-t)})^{-1}\ (x/t)\ \exp-(x^2/2t)\ \hat{\mathbb{P}}(\cdot \circ k_{a-t} \times (\varepsilon - x + X - N)_{a-t} \mid \zeta > a-t)\ .$$

Un calcul simple permet de vérifier que la famille des mesures

$$(1/\varepsilon)\ \mathbf{1}_{\{0 \le t \le a\ ,\ 0 \le x \le \varepsilon\}}\ (\pi\sqrt{t(a-t)})^{-1}\ (x/t)\ \exp-(x^2/2t)\ dx\ dt$$

converge étroitement vers $(2/a\pi)^{1/2}\ \delta_{(0,0)}(dx,dt)$ quand ε tend vers 0. On en déduit que la loi de $(X_s\circ\theta_g : s < a-g)$ sous $\mathbb{P}_0(\cdot \mid N \le \varepsilon)$ converge au sens des distributions finies dimensionnelles vers

$$(2/a\pi)^{1/2}\ \hat{\mathbb{P}}(\cdot\circ k_a \times (X-N)_a \mid \zeta > a)\ .$$

Enfin, il découle de la description de la décomposition de la trajectoire à l'instant ρ sous $\mathbb{P}_0(\cdot \mid N \le \varepsilon)$ rappelée au début de cette sous-section que cette même famille de lois converge au sens des distributions finies dimensionnelles vers $\mathbb{P}_0(\cdot\circ k_a \mid N \le 0)$. Comme $(X-N)_a > 0$ $\hat{\mathbb{P}}(\cdot \mid \zeta > a)$-p.s., ceci prouve le Théorème. □

Le Théorème 4 est à rapprocher d'une identité de Imhof [9] que nous rappelons maintenant: la loi $\mathbb{M}$ du méandre brownien M étant celle de l'excursion brownienne positive, conditionnée à avoir une durée de vie supérieure à 1, et tuée au temps 1, alors sous la mesure de probabilité

$$(2/\pi)^{1/2}\ M_1 \times \mathbb{M}\ ,$$

le processus canonique est un $BES_0(3)$ (processus de Bessel de dimension 3 issu de 0) sur l'intervalle de temps $[0,1]$. D'autre part, nous savons d'après le Corollaire 3 de [4] que, sous $\mathbb{P}_0(\cdot \mid N \le 0)$, $X-N$ est un $BES_0(3)$. Nous déduisons alors du Théorème 3 et de l'identité d'Imhof que

$$\text{sous } \hat{\mathbb{P}}(\cdot \mid \zeta > 1)\ ,\quad (X-N)\circ k_1 \text{ est un méandre brownien.} \tag{8}$$

On peut bien sûr également établir (8) directement en utilisant l'additivité de N et la décomposition canonique (2) de la diffusion. Si nous savions que l'équation $X-N \overset{(d)}{=} BES_0(3)$ détermine la loi de X, alors on pourrait déduire le Théorème 4 de l'identité d'Imhof, de (8) et du Corollaire 3 de [4]. Mais comme nous n'avons pas fait d'hypothèses particulières sur la régularité de la fonction d'échelle $\mathfrak{s}$, les techniques usuelles (voir par exemple [6]) ne permettent pas d'affirmer que toute solution de l'équation $X-N \overset{(d)}{=} BES_0(3)$ a nécessairement pour loi $\mathbb{P}_0(\cdot \mid N \le 0)$.

Des arguments analogues à ceux du Théorème 4 permettent par exemple de décrire la loi $\hat{\mathbb{P}}$ conditionnellement à la hauteur $\sup\{X_t - N_t : t < \zeta\}$. Plus précisément, fixons $a > 0$ et introduisons

$$T = \inf\{t : X_t - N_t = a\}\ .$$

Grâce à (2) et à l'additivité de N, on voit que la loi de $X-N$ sous $\hat{\mathbb{P}}$ est la mesure d'Itô des excursions browniennes positives. On a donc

$$\hat{\mathbb{P}}(\sup\{X_t - N_t : t < \zeta\} \geq a)$$
$$= \hat{\mathbb{P}}(T < \zeta) = 1/a \; .$$

Nous laissons au lecteur la preuve de la

Proposition 5. $X \circ k_T$ *a même loi sous* $\hat{\mathbb{P}}(\cdot \mid T < \zeta)$ *que sous* $\mathbb{P}_0(\cdot \mid N \leq 0)$.

Remarque. Ici encore, si on savait que l'équation $X-N \overset{(d)}{=} BES_0(3)$ caractérise la loi de la solution, alors on pourraît déduire la Proposition 5 du Corollaire 3 de [4] et de la description de Williams (section II.67 dans [14]) de la mesure des excursions browniennes positives.

Références

[1] J. Azema et M. Yor: Sur les zéros des martingales continues, *Séminaire de Probabilités XXVI*.

[2] M.T. Barlow et M. Yor: Sur la construction d'une martingale continue de valeur absolue donnée; *Séminaire de Probabilités XIV*, Lect. Notes in Maths. 784 (1979) 62-75, Springer-Verlag.

[3] J. Bertoin: How does a reflected one-dimensional diffusion bounce back?; Forum Math. (à paraître).

[4] J. Bertoin: Conditioning a reflected one-dimensional diffusion via its canonical decomposition; prépublication n°84 du Laboratoire de Probabilités de l'Université Paris VI.

[5] C. Dellacherie, B. Maisonneuve et P.A. Meyer: *Probabilités et Potentiel*, chapitres XVII à XXIV; Hermann (à paraître).

[6] N. El Karoui et M. Chaleyat-Maurel: Un problème de réflection et ses applications au temps local et aux équations différentielles

stochastiques sur $\mathbb{R}$; dans Azéma, J. et Yor, M (éds): *Temps locaux, Asterisque* **52-53** (1978) 63-88.

[7] M. FUKUSHIMA: *Dirichlet forms and Markov processes* (1980) North-Holland.

[8] R.K. GETOOR: Excursions of a Markov process; *Ann. Probab.* **7-2** (1979) 244-266.

[9] J.P. IMHOF: Density factorizations for Brownian motion, meander and the three-dimensional Besel process, and applications; *J. Appl. Probab.* **3** (1984) 500-510.

[10] K. ITÔ: Poisson point processes attached to Markov processes; *Proceedings 6^{th} Berkeley Symposium on Math. Stat. Prob. vol. III* (1970) 225-239, University of California press.

[11] I. KARATZAS et S.E. SHREVE: *Brownian motion and stochastic calculus* (1987) Springer.

[12] J. PITMAN et M. YOR: A decomposition of Bessel bridges; *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* **59** (1982), 425-457.

[13] L.C.G. ROGERS: A new identity for real Lévy processes; *Ann. Inst. Henri Poincaré* **20-4** (1984), 21-34.

[14] D. WILLIAMS: *Diffusions, Markov processes, and martingales, vol. 1: Foundations.* Wiley and Sons, New-York (1979).