THIERRY JEULIN
MARC YOR

Une décomposition non-canonique du drap brownien

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 322-347
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__322_0>

UNE DECOMPOSITION NON-CANONIQUE DU DRAP BROWNIEN

Th. Jeulin[1] *et M. Yor*[2]

(1) U.F.R. de Mathématiques, Université Paris 7, Tour 45-55, 5ème Etage - 2, Place Jussieu - 75251 PARIS CEDEX 05

(2) Laboratoire de Probabilités - Université P. et M. Curie - Tour 56 - 3ème Etage - 4, Place Jussieu - 75252 PARIS CEDEX 05

1. Introduction.

(1.1) Soit $(B_t, t \geq 0)$ mouvement brownien réel, issu de 0. Dans un travail récent [4], nous avons considéré le processus :

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t \frac{ds}{s} B_s \qquad (t \geq 0). \tag{1.a}$$

qui possède les propriétés remarquables suivantes :

(α) $(\tilde{B}_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien réel ;

(β) pour tout $t \geq 0$, la variable B_t est indépendante de $(\tilde{B}_s, s \leq t)$.

Le second paragraphe du présent article consiste en l'étude d'un problème inverse, formulé comme suit :
on définit, sur l'espace canonique $\Omega_* = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ le processus des coordonnées $X_t(\omega) = \omega(t)$, et la filtration qu'il engendre $(\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s, s \leq t\}, t \geq 0)$. Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des probabilités P sur $(\Omega_*, \mathcal{F}_\infty)$ telles que :

(i) $\left(\tilde{X}_t = X_t - \int_0^t \frac{ds}{s} X_s \; ; \; t \geq 0\right)$ est un mouvement brownien réel

(on suppose ici seulement que l'intégrale $\int_0^t \frac{ds}{s} X_s$ est définie comme :

$\lim_{\varepsilon\to 0}$ p.s. $\int_\varepsilon^t \frac{ds}{s} X_s$ c'est-à-dire que l'intégrale converge p.s. en 0, mais on ne suppose pas a priori qu'elle converge absolument).

(ii) pour tout $t \geq 0$, la variable X_t est P-indépendante de $(\tilde{X}_s, s\leq t)$.

Nous caractériserons les éléments de $\mathcal{I}$ de la façon suivante

Théorème 1 : *On désigne par* W *la mesure de Wiener sur* $(\Omega_*, \mathcal{F}_\infty)$.

*(*W *est la loi du mouvement brownien réel issu de* 0*).*

Soit P *une probabilité sur* $(\Omega_*, \mathcal{F}_\infty)$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $P \in \mathcal{I}$

2) P *est la loi de* $(B_t + Yt, t \geq 0)$, *avec* Y *variable aléatoire indépendante de* $(B_t, t \geq 0)$.

3) Il existe une fonction $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, *W-harmonique dans l'espace-temps, c'est-à-dire que :*

$$(h(t,X_t), t \geq 0) \text{ est une } (W,\mathcal{F}_t) \text{ martingale, d'espérance } 1,$$

telle que :

$$P = W^h,$$

où W^h *est la probabilité sur* $(\Omega_*, \mathcal{F}_\infty)$ *définie par :*

$$W^h_{|\mathcal{F}_t} = h(t,X_t)\cdot W_{|\mathcal{F}_t}.$$

Ce théorème montre les liens étroits qui existent entre le mouvement brownien $\tilde{B}$ associé à B au moyen de *(1.a)*, et les fonctions h harmoniques d'espace-temps, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

(1.2) Revenons maintenant au point de départ du sous-paragraphe **(1.1)**, c'est-à-dire à la décomposition <u>non-canonique</u> *(1.a)* du mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$ et aux propriétés (α) et (β).

Nous appelons la décomposition *(1.a)* <u>non-canonique</u> car, bien qu'elle permette d'écrire le mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$ sous la forme :

$$B_t = \tilde{B}_t + \int_0^t \frac{ds}{s} B_s \qquad (t \geq 0) \tag{1.a'}$$

de la somme d'un mouvement brownien $(\tilde{B}_t, t \geq 0)$ et d'un processus à variation bornée, cette décomposition n'est pas la "décomposition" de la (semi)-martingale $(B_t, t \geq 0)$ dans sa filtration propre $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$, car on aurait alors : $B_t = \tilde{B}_t$, d'où l'on déduirait $B \equiv 0$ (!)

Nous rappelons maintenant, toujours pour le mouvement brownien réel $(B_t, t \geq 0)$, quelques résultats obtenus en [4], qui complètent (α) et (β).

Notons encore, pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, s \leq t\}$, et définissons $\mathcal{G}_t = \sigma\{B_u - \frac{u}{t} B_t \ ; \ u \leq t\}$; rappelons que $(B_u - \frac{u}{t} B_t \ ; \ u \leq t)$ est un pont brownien de durée t. Alors :

(γ) $(\mathcal{G}_t)$ <u>est une filtration</u>, <u>et c'est la filtration naturelle du mouvement brownien</u> $(\tilde{B}_t, t \geq 0)$ <u>défini par</u> *(1.a)*.

En conséquence, pour tout $t \geq 0$, la tribu du passé de $\tilde{B}$, soit : $\sigma\{\tilde{B}_t, s \leq t\} \equiv \mathcal{G}_t$ est indépendante de la tribu du futur de B, soit $\sigma\{B_s, s \geq t\}$.

De plus, on a, pour tout couple (s,t) tel que : $0 < s < t$, l'égalité : $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_s \vee \mathcal{G}_t$, et, bien que la tribu-germe $\bigcap_{s>0} \mathcal{F}_s$ soit triviale, l'égalité : $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t$ n'est pas satisfaite, puisque la variable B_t est indépendante de la tribu $\mathcal{G}_t$ (plus généralement, pour les problèmes de l'échange de l'intersection et du supremum de familles de tribus, voir H. von Weizsäcker [5]).

Remarquons par ailleurs, de façon tout-à-fait indépendante de ce qui précède, une relation importante qui lie les mouvements browniens B et $\tilde{B}$, à savoir :

$$d\left(\frac{B_t}{t}\right) = \frac{d\tilde{B}_t}{t} \qquad (t > 0) \tag{1.b}$$

Cette relation nous servira beaucoup par la suite.

Nous rappelons maintenant une propriété ergodique du couple $(B,\tilde{B})$, également obtenue en [4].

Pour cela, nous nous plaçons sur l'espace canonique $\Omega_* = C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ sur lequel on considère le processus des coordonnées $(X_t(\omega) \equiv \omega(t), t \geq 0)$, et la mesure de Wiener W. On note encore $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s, s \leq t\}$.

Alors, la transformation $T : (X_t)_{t\geq 0} \longrightarrow \left(X_t - \int_0^t \frac{ds}{s} X_s\ ,\ t \geq 0\right)$ est bien définie W p.s., et laisse W invariante. De plus, on a :

(δ) T <u>est fortement mélangeante</u> ; <u>en fait</u>, <u>pour tout</u> $t > 0$, <u>la tribu</u> $\bigcap_n (T^n)^{-1}(\mathcal{F}_t)$ <u>est triviale</u>.

Ce résultat découle de façon essentielle de la formule :

$$T^n(X)_t = \int_0^t dX_s\, L_n(\log \frac{t}{s}), \tag{1.c}$$

où $(L_n, n \in \mathbb{N})$ est la suite des polynômes de Laguerre, qui forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}_+, e^{-u}du)$; rappelons la formule explicite

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{k!} (-x)^k. \tag{1.d}$$

(1.3) Nous nous proposons de dégager, dans le paragraphe 3 du présent article, des propriétés analogues aux propriétés (α), (β), (γ), (δ), ci-dessus, pour le mouvement brownien réel, qui seront obtenues alors pour le drap brownien $(B_{s,t}\ ;\ s \geq 0, t \geq 0)$ supposé nul sur les axes. Nous réunissons ces résultats dans l'énoncé suivant.

<u>Théorème 2</u> : *Soit* $(B_{s,t}\ ;\ s \geq 0, t \geq 0)$ *un drap brownien. Alors :*

1) le processus

$$\tilde{B}_{s,t} = B_{s,t} - \int_0^s \frac{du}{u} B_{u,t} - \int_0^t \frac{dv}{v} B_{s,v} + \int_0^s \frac{du}{u} \int_0^t \frac{dv}{v} B_{u,v}$$

est un drap brownien ;

de plus, on a : $$B_{s,t} = st \int_s^\infty \int_t^\infty \frac{d\tilde{B}_{u,v}}{uv} .$$

2) si l'on note, pour $s,t \geq 0$, $\mathcal{G}_{s,t}$ *la tribu engendrée par le pont :*

$$\{\tilde{B}^{(s,t)}_{u,v} \equiv B_{u,v} - \frac{u}{s} B_{s,v} - \frac{v}{t} B_{u,t} + \frac{uv}{st} B_{s,t} \ ; \ u \leq s, v \leq t\},$$

on a : $$\mathcal{G}_{s,t} = \sigma\{\tilde{B}^{(s,t)}_{u,v} \ ; \ u \leq s,\ v \leq t\},$$

aux ensembles négligeables près ;

de plus, $\mathcal{G}_{s,t}$ *est indépendante de la tribu* $\sigma\{(B_{u,t}\ ;\ B_{s,v})\ ;\ u \leq s,\ v \leq t\}$.

3) si l'on note T_2 *la transformation de* $\Omega^{(2)}_* \equiv C(\mathbb{R}^2_+, \mathbb{R})$ *dans lui-même définie par :*

$$T_2(X)_{s,t} \equiv X_{s,t} - \int_0^s \frac{du}{u} X_{u,t} - \int_0^t \frac{dv}{v} X_{s,v} + \int_0^s \frac{du}{u} \int_0^t \frac{dv}{v} X_{u,v} ,$$

où $(X_{s,t})$ *désigne le processus des coordonnées,*

cette transformation laisse la probabilité $W^{(2)}$ *, loi du drap brownien, invariante, et elle est fortement mélangeante ; en fait, pour tous* $s,t \geq 0$, *la tribu* $\bigcap_n (T_2^n)^{-1} (\mathcal{F}_{s,t})$ *est* $W^{(2)}$*-triviale.*

Nous présentons maintenant, pour le drap brownien, un théorème analogue au théorème 1, bien que moins complet ; ce théorème est dû, pour l'essentiel, à O. Brockhaus [1].

Soit $\mathcal{I}^{(2)}$ l'ensemble des probabilités P sur $\Omega^{(2)}_*$ telles que :

(i) $T_2(X)$ existe P-p.s., c'est-à-dire :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{X_{u,t}}{u} du, \quad \lim_{\eta \to 0} \int_\eta^1 \frac{X_{s,v}}{v} dv \quad , \text{ et}$$

$$\lim_{(\varepsilon,\eta)\to(0,0)} \int_\varepsilon^1 \int_\eta^1 \frac{X_{u,v}}{uv}\, du\, dv \quad \text{existent} \quad P\text{-p.s.}$$

et $T_2(X)$ est un drap brownien ;

(ii) pour tous $s,t \geq 0$, la tribu $\sigma\{T_2(X)_{u,v}\ ;\ u \leq s,\ v \leq t\}$ est indépendante de $\sigma\{(X_{u,t}\ ,\ X_{s,v})\ ;\ u \leq s,\ v \leq t\}$.

Nous pouvons maintenant énoncer le

Théorème 3 : *Une probabilité* P *définie sur* $\Omega_*^{(2)}$ *appartient à* $\mathcal{I}^{(2)}$ *si, et seulement si, c'est la loi d'un processus :*

$$\{B_{s,t} + sU_t + tV_s\ ;\ s,t \geq 0\}$$

où B *est un drap brownien, indépendant du couple de processus* (U,V) *indexés par* $\mathbb{R}_+$ *, les processus* U *et* V *étant continus, nuls en* 0*, et tels que :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dt}{t} U_t \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dt}{t} V_t \quad \text{existent} \quad P\text{-p.s.}$$

Rappelons que la loi d'un processus de la forme $\{B_{s,t} + \Phi(s,t)\ ;\ s \geq 0, t \geq 0\}$, où B est un drap brownien, et Φ une fonction déterministe, est localement équivalente à celle du drap brownien si, et seulement si :

$$\Phi(s,t) = \int_0^s \int_0^t du\, dv\, \varphi(u,v),$$

avec $\varphi \in L^2([0,s] \times [0,t], du\, dv)$, pour tous $s,t > 0$.

Il résulte donc du Théorème 3 que, contrairement à ce qui se passe pour l'ensemble $\mathcal{I}$ caractérisé dans le Théorème 1, il existe de nombreux éléments $P \in \mathcal{I}^{(2)}$ qui ne sont pas localement équivalents à $W^{(2)}$.

(1.4) Enfin, dans le paragraphe 4 du présent article, en nous inspirant à la fois de notre travail pour le mouvement brownien réel [4] et de l'article de Föllmer [3], nous associons au drap brownien $(B_{s,t}\ ;\ s \geq 0, t \geq 0)$ deux autres draps browniens :

$$B^{(1)}_{s,t} = B_{s,t} - \int_0^s \frac{du}{u} B_{u,t} \qquad \text{et} \quad B^{(2)}_{s,t} = B_{s,t} - \int_0^t \frac{dv}{v} B_{s,v}\ ,$$

et nous remarquons que la filtration du drap brownien $\tilde{B}$ introduit dans le Théorème 2 ci-dessus n'est autre que l'intersection des filtrations de $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$, alors que le supremum des filtrations de $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$ n'est pas la filtration propre d'un drap brownien, car cette filtration ne satisfait pas la célèbre condition (F4) de Cairoli - Walsh [2].

2. Démonstration du Théorème 1.

(2.1) Soit $(\beta_t, t \geq 0)$ mouvement brownien réel issu de 0, défini sur un espace de probabilité. Nous commençons par décrire toutes les solutions (trajectorielles) de l'équation :

$$(S) \qquad X_t = \beta_t + \int_0^t \frac{ds}{s} X_s ,$$

où, comme dans l'Introduction, nous supposons seulement que $\lim_{\varepsilon \to 0}$ p.s. $\int_\varepsilon^1 \frac{ds}{s} X_s$ existe.

Le lemme suivant est un cas très particulier des résultats de [4], nous donnons néanmoins sa démonstration pour la commodité du lecteur.

Lemme 1 : *$(X_t, t \geq 0)$ est solution de (S) si, et seulement si, il existe une v.a. Y telle que :*

$$(2.a) \qquad X_t = t \left(Y - \int_t^\infty \frac{d\beta_u}{u} \right) \qquad (t > 0).$$

Démonstration : On a, d'après la formule d'Itô, pour $0 < s < t$:

$$\frac{1}{t} X_t = \frac{1}{s} X_s + \int_s^t \frac{d\beta_u}{u} .$$

Comme $\int^\infty \frac{du}{u^2} < \infty$, le membre de droite converge p.s., lorsque $t \longrightarrow \infty$.

Il en est donc de même du membre de gauche ; posons donc :

$Y = \lim_{t\to\infty} \text{p.s.}\ \frac{1}{t} X_t$. On a alors :

$$\frac{1}{s} X_s = Y - \int_s^\infty \frac{d\beta_u}{u} \text{ , c'est-à-dire } (2.a). \qquad \square$$

Remarque : Le processus $\left(X_t^{(o)} \equiv t \int_t^\infty \frac{d\beta_u}{u}\ ,\ t > 0\right)$ est un mouvement brownien réel, qui peut être prolongé par continuité en $t = 0$ par : $X_o^{(o)} = 0$; une conséquence de la formule *(2.a)* est alors que, pour toute solution X de (S), l'intégrale $\int_0 \frac{ds}{s} X_s$ est absolument convergente. $\square$

(2.2) Soit maintenant $P \in \mathcal{I}$. Posons, de façon à faire coïncider les notations en (i) et (S) : $\beta = \tilde{X}$, et, d'autre part, définissons :

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \sigma\{\tilde{X}_s, s \le t\} \equiv \sigma\{\beta_s, s \le t\}.$$

Pour prouver 2), il nous suffit de montrer, à l'aide de *(2.a)*, que la variable Y est indépendante de $\tilde{\mathcal{F}}_\infty \equiv \sigma\{\beta_s, s \ge 0\}$, et on déduira alors de la représentation *(2.a)* le résultat cherché, à savoir :

$$(2.b) \qquad X_t = B_t + Yt\ , \qquad \text{avec } B_t = -t \int_t^\infty \frac{d\beta_u}{u}\ .$$

Comme nous venons de le remarquer ci-dessus, il est immédiat que $(B_t, t > 0)$ ainsi défini est un mouvement brownien.

Pour montrer l'indépendance de Y et $\tilde{\mathcal{F}}_\infty$, remarquons que, par hypothèse, on a l'égalité suivante :

$$E\left[E(Z|\tilde{\mathcal{F}}_t)\varphi\left(Y - \int_t^\infty \frac{d\beta_u}{u}\right)\right] = E(Z)\ E\left(\varphi(Y - \int_t^\infty \frac{d\beta_u}{u})\right)$$

pour toute variable $Z \in L^2(\tilde{\mathcal{F}}_\infty)$, et toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue, bornée.

On en déduit, en faisant tendre t vers + ∞ :

$$E[Z\varphi(Y)] = E[Z]\ E[\varphi(Y)],$$

ce qui équivaut à l'indépendance de $\mathcal{F}_\infty$ et Y.

(2.3) Nous montrons maintenant que 2) implique 3);

Posons $\nu(dy) = P(Y \in dy)$ et $h_y(t,x) = \exp(y\,x - \frac{y^2 t}{2})$, puis :

$$h(t,x) = \int \nu(dy)\ \exp(yx - \frac{y^2 t}{2}) \equiv \int \nu(dy)\ h_y(t,x).$$

D'après 2), et la relation d'absolue continuité entre les lois de $(B_s, s \le t)$ et $(B_s + ys, s \le t)$ (c'est-à-dire : le théorème de Girsanov, dans sa version la plus simple), on a :

$$P = \int \nu(dy)\ W^{h_y} = W^h\ ,\ \text{c'est-à-dire 3).}$$

(2.4) Nous montrons finalement que 3) implique 1). Ceci découle de ce que W appartient à l'ensemble $\mathcal{I}$ (voir l'Introduction), et du lemme élémentaire suivant.

<u>**Lemme 2**</u> : *Soient* Q *et* Q' *deux probabilités équivalentes sur un espace mesurable* $(\Omega,\mathcal{F})$. *On note* $D = \frac{dQ'}{dQ}$.

Soient $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *deux sous-tribus de* $\mathcal{F}$.

Supposons que D *soit* $\mathcal{B}$*-mesurable, et que* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *soient indépendantes sous* Q. *Alors,* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *sont indépendantes sous* Q' , *et* $Q'|_{\mathcal{A}} = Q|_{\mathcal{A}}$.

Pour nos besoins, nous appliquons le lemme 2 à $Q = W|_{\mathcal{F}_t}$, $Q' = W^h|_{\mathcal{F}_t}$, $\mathcal{A} = \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B} = \sigma(X_t)$. □

3. <u>La filtration des ponts du drap brownien est une filtration brownienne.</u>

(3.1) $(B_{s,t}\ ;\ s \ge 0, t \ge 0)$ désigne un drap brownien à valeurs réelles, nul sur les axes. On note $\mathcal{F}_{a,b} \equiv \sigma\{B_{s,t}\ ;\ s \le a, t \le b\}$ $(a,b \ge 0)$, et $\mathcal{G}_{a,b}$ la tribu engendrée par les variables G de l'espace gaussien de B qui sont orthogonales aux variables : $\{B_{x,y}\ ;\ (x,y) \notin R_{a,b}\}$ (ici, et dans la suite, on note : $R_{a,b} = [0,a] \times [0,b]$).

Ainsi définie, la famille $(\mathcal{G}_{a,b}\ ;\ a \geq 0, b \geq 0)$ est, à l'évidence, croissante pour l'ordre partiel sur $\mathbb{R}^2_+$.

On a, pour a et b fixés, une première description de la tribu $\mathcal{G}_{a,b}$.

Proposition 1 : *Fixons* $a > 0$, *et* $b > 0$.

1) Une variable G *satisfait les propriétés ci-dessus si, et seulement si :*

$$G = \int_0^a \int_0^b g(u,v)dB_{u,v}\ ,$$

où $g \in L^2([0,a] \times [0,b], du\, dv)$, *et vérifie en outre les propriétés suivantes :*

$$\text{(3.a)} \qquad ds\ p.s.,\ \int_0^b g(s,v)dv = 0,\ et\quad dt\ p.s.,\ \int_0^a g(u,t)du = 0.$$

2) $\mathcal{G}_{a,b}$ *est la tribu engendrée par le pont* $(\tilde{\beta}^{a,b}_{s,t}\ ;\ s \leq a, t \leq b)$, *défini par :*

$$\tilde{\beta}^{a,b}_{s,t} = B_{s,t} - \frac{s}{a} B_{a,t} - \frac{t}{b} B_{s,b} + \frac{st}{ab} B_{a,b}\ .$$

Démonstration : 1) G est une variable de l'espace gaussien de B, qui est orthogonale aux variables $\{B_{(x,y)}\ ;\ (x,y) \notin R_{a,b}\}$ si, et seulement si, elle s'écrit sous la forme : $G = \int_0^\infty \int_0^\infty g(u,v)dB_{u,v}$, avec $g \in L^2(\mathbb{R}^2_+, du\ dv)$, et, de plus : $\int_0^x \int_0^y g(u,v)du\, dv = 0$, pour tout couple $(x,y) \notin R_{a,b}$.

Cette condition équivaut à ce que : $g = g\, 1_{R_{a,b}}$, du dv p.s., et aux conditions *(3.a)*.

2) Nous commençons par remarquer que les variables $\{\tilde{\beta}^{a,b}_{s,t}\ ;\ s \leq a, t \leq b\}$ sont bien de la forme indiquée en 1).

En effet, on a : $\tilde{\beta}^{a,b}_{s,t} = \int_0^a \int_0^b g_{s,t}(u,v)dB_{u,v}$,

où $g_{s,t}(u,v) = 1_{(u\le s,v\le t)} - \frac{s}{a} 1_{(u\le a,v\le t)} - \frac{t}{b} 1_{(u\le s,v\le b)} + \frac{st}{ab} 1_{(u\le a,v\le b)}$ et on vérifie immédiatement que la fonction $g_{s,t}$ satisfait la condition *(3.a)*.

Inversement, si une variable gaussienne G vérifie les propriétés de la partie 1) de la Proposition, on montre aisément que :

$$G \equiv \int_0^a \int_0^b g(u,v)dB_{u,v} \equiv \int_0^a \int_0^b g(u,v)d\tilde{\beta}^{a,b}_{u,v} ;$$

ceci complète la démonstration de la partie 2) de la Proposition. □

(3.2) Pour construire un drap brownien $(\tilde{B}_{s,t} ; s \ge 0, t \ge 0)$ qui soit associé à $(B_{s,t} ; s \ge 0, t \ge 0)$ de manière analogue à la façon dont le mouvement brownien $(\tilde{B}_t, t \ge 0)$, défini par *(1.a)*, est associé à $(B_t, t \ge 0)$, nous présentons une construction de $\tilde{B}$ qui utilise de manière essentielle la stabilité de la loi du mouvement brownien réel par inversion du temps.

Ainsi, il existe un mouvement brownien $(\beta_t, t \ge 0)$ tel que :

$$B_t = t\, \beta_{1/t} \qquad (t > 0).$$

On peut alors réécrire la formule *(1.a)* en termes de β, il vient :

$$\tilde{B}_t = t\, \beta_{1/t} - \int_0^t du\, \beta_{1/u}$$

$$= t\, \beta_{1/t} - \int_{1/t}^{\infty} \frac{dv}{v^2}\, \beta_v = - \int_{1/t}^{\infty} \frac{dv}{v^2} (\beta_v - \beta_{1/t})$$

(3.b)
$$= - \int_{1/t}^{\infty} \frac{d\beta_u}{u} ,$$

par intégration par parties.

<u>**Remarque 1**</u> : En formalisant cette suite d'égalités, nous remarquons que l'on

a :

(3.c) $$\tilde{B} = T(B), \quad \text{où} \quad T = J \circ I,$$

chacune des transformations I et J étant définie sur l'espace de Wiener et préservant la mesure de Wiener. Précisément, on définit :

(3.d) $$I(X)_t = t\, X_{1/t} \quad \text{et} \quad J(X)_t = -\int_{1/t}^{\infty} \frac{dX_u}{u} = t\, X_{1/t} - \int_{1/t}^{\infty} \frac{du\, X_u}{u^2}$$

($(X_u, u \geq 0)$ doit être compris ici comme une trajectoire brownienne générique).

(3.3) En nous inspirant fortement de la construction faite en **(3.1)**, nous associons un drap brownien $(\tilde{B}_{s,t}\ ;\ s \geq 0, t \geq 0)$ à un drap brownien donné $(B_{s,t}\ ;\ s \geq 0, t \geq 0)$.

Tout d'abord, il existe un drap brownien $(\beta_{h,k}\ ;\ h \geq 0, k \geq 0)$ tel que :

(3.e) $$B_{s,t} = st\, \beta_{1/s,\,1/t}\,.$$

Définissons alors :

(3.f) $$\tilde{B}_{s,t} = \int_{1/s}^{\infty} \int_{1/t}^{\infty} \frac{d\beta_{h,k}}{hk}\,.$$

Il est immédiat que $\tilde{B}$ est un drap brownien.
On a maintenant, à partir de *(3.f)* :

$$\tilde{B}_{s,t} = \int_{1/s}^{\infty} \frac{du}{u^2} \int_{1/t}^{\infty} \frac{dv}{v^2} \left(\int_{1/s}^{u} \int_{1/t}^{v} d\beta_{h,k} \right)$$

(3.g) $$= \int_{1/s}^{\infty} \frac{du}{u^2} \int_{1/t}^{\infty} \frac{dv}{v^2} \left(\beta_{u,v} - \beta_{u,1/t} - \beta_{1/s,v} + \beta_{1/s,1/t}\right),$$

soit, en utilisant à nouveau *(3.e)* :

(3.h) $$\tilde{B}_{s,t} = B_{s,t} - \int_0^s \frac{du}{u} B_{u,t} - \int_0^t \frac{dv}{v} B_{s,v} + \int_0^s \frac{du}{u} \int_0^t \frac{dv}{v} B_{u,v}\,.$$

Remarque 2 : En utilisant le même formalisme qu'en *(3.b)* et *(3.c)*, nous remarquons que l'on a ainsi obtenu $\tilde{B}$ à partir de B de la façon suivante :

(3.i) $$\tilde{B} = T_2(B), \quad \text{où} \quad T_2 = J_2 o I_2 , \quad \text{avec :}$$

$$I_2 = I \otimes I \quad \text{et} \quad J_2 = J \otimes J \quad \text{(voir la formule (3.e))}.$$

L'extension de ces définitions au drap brownien à k paramètres est maintenant évidente :

$$\tilde{B}_{(k)} = T_k(B_{(k)}) \ , \ \text{où} \ \ T_k = J_k o I_k \ ,$$

avec : $I_k = I \otimes \ldots \otimes I$ et $J_k = J \otimes J \ldots \otimes J$ (k fois).

Nous laissons au lecteur intéressé le soin d'énoncer et de démontrer les Propositions ci-dessous pour le drap brownien à k paramètres.

Nous pouvons maintenant démontrer la

Proposition 2 : *La filtration* $(\mathcal{G}_{s,t} \ ; \ s \geq 0, t \geq 0)$ *est la filtration naturelle du drap brownien* $(\tilde{B}_{s,t} \ ; \ s \geq 0, t \geq 0)$.

Démonstration : Fixons $a > 0$, $b > 0$.

1) Nous commençons par montrer que, pour tout $(s,t) \in R_{a,b}$, la variable $\tilde{B}_{s,t}$ satisfait les propriétés de l'assertion 1) de la Proposition 1, c'est-à-dire qu'elle s'écrit sous la forme :

$$\tilde{B}_{s,t} = \int_0^s \int_0^t dB_{u,v} \ \tilde{g}(u,v),$$

avec :

$$\tilde{g}(u,v) = 1_{(u\leq s, v\leq t)} - \int_0^s \frac{dh}{h} 1_{(u\leq h, v\leq t)} - \int_0^t \frac{dk}{k} 1_{(u\leq s, v\leq k)}$$
$$+ \int_0^s \frac{dh}{h} \int_0^t \frac{dk}{k} 1_{(u\leq h, v\leq t)}.$$

On vérifie ensuite immédiatement que $\tilde{g}$ satisfait les conditions (3.a).

2) Inversement, il nous suffit de montrer que les variables $\{\tilde{\beta}^{a,b}_{s,t} \ ; \ s \leq a, t \leq b\}$ sont des intégrales de Wiener par rapport à

$(\tilde{B}_{u,v}\ ;\ u \le a, v \le b)$. Pour cela, nous utiliserons la formule :

$$(3.i) \qquad B_{s,t} = st \int_s^\infty \int_t^\infty \frac{d\tilde{B}_{u,v}}{uv},$$

que nous démontrerons ci-dessous. Admettant pour l'instant cette formule *(3.i)*, nous en déduisons, par définition de $\tilde{\beta}^{a,b}$:

$$\tilde{\beta}^{a,b}_{s,t} = st \int_s^a \int_t^b \frac{d\tilde{B}_{u,v}}{uv} \qquad (s \le a, t \le b),$$

ce qui donne en particulier le résultat cherché. □

Nous montrons maintenant la formule *(3.i)* en développant le membre de droite à l'aide de *(3.h)*. En effet, on a, d'après *(3.h)* :

$$(3.j) \qquad \int_s^\infty \int_t^\infty \frac{d\tilde{B}_{u,v}}{uv} = \int_s^\infty \int_t^\infty \frac{dB_{u,v}}{uv} - \int_s^\infty \frac{du}{u^2} \left(\int_t^\infty \frac{d_v(\tilde{B}_{u,v})}{v} \right)$$
$$- \int_t^\infty \frac{dv}{v^2} \left(\int_s^\infty \frac{d_u(B_{u,v})}{u} \right) + \int_s^\infty \frac{du}{u^2} \left(\int_t^\infty \frac{dv}{v^2} B_{u,v} \right).$$

Nous remarquons maintenant, grâce à la formule d'Itô appliquée à $(B_{u,v}\ ;\ v \ge t)$ que l'on peut écrire la somme du second et du quatrième termes du membre de droite de *(3.j)* comme :

$$\int_s^\infty \frac{du}{u^2} \left(\frac{B_{u,t}}{t}\right) = - \int_s^\infty \frac{du}{u^2} \int_t^\infty \frac{d_v(\tilde{B}_{u,v})}{v} + \int_s^\infty \frac{du}{u^2} \int_t^\infty \frac{dv}{v^2} B_{u,v}.$$

On peut donc réécrire *(3.j)* sous la forme équivalente :

$$(3.j') \qquad \int_s^\infty \int_t^\infty \frac{d\tilde{B}_{u,v}}{uv} = \int_s^\infty \int_t^\infty \frac{dB_{u,v}}{uv} + \int_s^\infty \frac{du}{u^2} \left(\frac{B_{u,t}}{t}\right) - \int_t^\infty \frac{dv}{v^2} \int_s^\infty \frac{d_u(B_{u,t})}{u}.$$

Pour démontrer la formule *(3.i)*, il nous suffit donc maintenant de montrer que $\frac{B_{s,t}}{st}$ est égal, p.s., au membre de droite de *(3.j')*.

Or, en appliquant tout d'abord la formule d'Itô pour $(\frac{B_{u,t}}{ut},\ s \le u \le s+h)$, puis, en laissant tendre h vers $+\infty$, on obtient :

$$(3.k) \qquad \frac{B_{s,t}}{st} = -\int_s^\infty \frac{d_u(B_{u,t})}{ut} + \int_s^\infty \frac{du}{u^2 t} B_{u,t}.$$

Nous décomposons maintenant le premier terme du membre de droite de *(3.k)* en utilisant cette fois la formule d'Itô pour $(B_{u,v}\ ;\ t \le v \le t+k)$, et en laissant tendre k vers $+\infty$. Il vient :

$$-\frac{B_{u,t}}{t} = \int_t^\infty \frac{d_v(B_{u,v})}{v} - \int_t^\infty \frac{B_{u,v}dv}{v^2}.$$

Lorsque l'on reporte cette identité en *(3.k)*, ceci nous donne l'égalité de $\frac{B_{s,t}}{st}$ et du membre de droite de *(3.j')*, ce qui est la relation cherchée. □

(3.4) Nous nous intéressons maintenant aux propriétés ergodiques de la transformation T_2 définie sur $\Omega_*^{(2)} \equiv C(\mathbb{R}_+^2,\mathbb{R})$ au moyen de :

$$(3.h') \qquad T_2(X)_{s,t} \equiv X_{s,t} - \int_0^s \frac{du}{u} X_{u,t} - \int_0^t \frac{dv}{v} X_{s,v} + \int_0^s \frac{du}{u}\int_0^t \frac{dv}{v} X_{u,v}\ ;$$

cette formule est bien en accord avec *(3.h)*.

T_2 laisse invariante la loi du drap brownien $(B_{s,t}\ ;\ s \ge 0, t \ge 0)$.

De même que pour l'étude à un paramètre [4], les propriétés d'ergodicité de T_2 découleront simplement de la

Proposition 3 : *On a, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la formule :*

$$(3.j) \qquad T_2^n(X)_{s,t} = \int_0^s\int_0^t dX_{u,v}\, L_n(\log \tfrac{s}{u})\, L_n(\log \tfrac{t}{v})$$

où L_n *désigne toujours le polynôme de Laguerre de degré* n.

Démonstration : Notons $X_{s,t}^{(n)} = T_2^n(X)_{s,t}$, et procédons par récurrence. Supposons donc que la formule *(3.j)* soit vraie pour n. On a alors :

$$X^{(n+1)}_{s,t} = T_2(X^{(n)})_{s,t}$$

$$= \int_0^s \int_0^t dX_{u,v}\, L_n(\log \frac{s}{u})\, L_n(\log \frac{t}{v})$$

$$- \int_0^s \frac{dh}{h} \left(\int_0^h \int_0^t dX_{u,v}\, L_n(\log \frac{h}{u})\, L_n(\log \frac{t}{v})\right)$$

$$- \int_0^t \frac{dk}{k} \left(\int_0^s \int_0^k dX_{u,v}\, L_n(\log \frac{s}{u})\, L_n(\log \frac{k}{v})\right)$$

$$+ \int_0^s \int_0^t \frac{dh}{h}\frac{dk}{k} \left(\int_0^h \int_0^k dX_{u,v}\, L_n(\log \frac{h}{u})\, L_n(\log \frac{k}{v})\right)$$

$$= \int_0^s \int_0^t dX_{u,v}\{\quad\},$$

où $\{\quad\} = \left(L_n(\log \frac{s}{u}) - \int_u^s \frac{dh}{h}\, L_n(\log \frac{h}{u})\right)\left(L_n(\log \frac{t}{v}) - \int_v^t \frac{dk}{k}\, L_n(\log \frac{k}{v})\right)$

$$= (L_{n+1}(\log \frac{s}{u}))\, (L_{n+1}(\log \frac{t}{v})),$$

en vertu de la relation de récurrence des polynômes de Laguerre :

$$L_{n+1}(x) = L_n(x) - \int_0^x dz\, L_n(z). \tag{3.k}$$

(Cette relation *(3.k)* découle, par exemple, très simplement de la formule explicite *(1.d)*). □

Nous montrons maintenant la

Proposition 4 : *Pour tous* $s,t \geq 0$, *la tribu* $\bigcap_n (T_2^n)^{-1} (\mathcal{F}_{s,t})$ *est triviale (aux ensembles négligeables près).*

En conséquence, la transformation T_2 *est fortement mélangeante.*

Démonstration : Nous la ferons pour $s = t = 1$. Introduisons les notations :

$$\Phi = \bigcap_n (T_2^n)^{-1} (\mathcal{F}_{1,1}), \quad \text{et} \quad \partial \quad \text{pour le bord du rectangle} \quad R_{1,1}.$$

Remarquons tout d'abord que, par construction, $(T_2^n)^{-1} (\mathcal{F}_{1,1})$ est indépendante de $T^{n-1}(B)_\partial$. En conséquence, la tribu Φ est indépendante de la tribu engendrée par $\{T^k(B)_\partial \ ; \ k = 0,1,2,\dots\}$. Il suffit donc de montrer que la tribu engendrée par cette suite est $\mathcal{F}_{1,1}$.

Par isomorphisme d'espaces de Hilbert, il suffit de montrer que la famille, indexée par $\mathcal{I} = \{(n,x,y) \in \mathbb{N} \times]0,1] \times]0,1]\}$, des fonctions de (h,k) :

$$L_n(\log \frac{1}{h})\, L_n(\log \frac{y}{k})\, 1_{(k\le y)} \quad \text{et} \quad 1_{(h\le x)}\, L_n(\log \frac{x}{h})\, L_n(\log \frac{1}{k})$$

est totale dans $L^2([0,1]^2 \ ; \ dh\, dk)$.

Il est bien sûr équivalent de montrer que la famille, indexée par $\mathcal{J} = \{(n,a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+\}$, des fonctions de (u,v) $(\in \mathbb{R}_+^2)$:

$$L_n(u)\, L_n(v-b)\, 1_{(v\ge b)} \quad \text{et} \quad L_n(u-a)\, 1_{(u\ge a)}\, L_n(v)$$

est totale dans $L^2(\mathbb{R}_+^2 \ ; \ e^{-(u+v)}du\, dv)$.

Notons $\mathcal{L}$ la fermeture dans ce dernier espace L^2 de l'espace vectoriel engendré par la famille indexée par $\mathcal{J}$. Il nous suffit de montrer que, pour tous $n,m \in \mathbb{N}$, la fonction $L_n(u)\, L_m(v)$ appartient à $\mathcal{L}$.

Fixons $n \in \mathbb{N}$; en intégrant $L_n(u)\, L_n(v-b)\, 1_{(v\ge b)}$ par rapport à $db\, 1_{[c,\infty)}(b)$, il n'est pas difficile de montrer que la fonction $H(u,v)$ ainsi obtenue appartient à $\mathcal{L}$. Or, on a :

$$\int_c^\infty db\, L_n(v-b) 1_{(v\ge c)} = \int_0^{v-c} dx\, L_n((v-c)-x)\, 1_{(v\ge c)}$$

$$= \int_0^{v-c} dy\, L_n(y)\, 1_{(v\ge c)} = (L_n(v-c) - L_{n+1}(v-c))\, 1_{(v\ge c)}\,,$$

d'après la relation *(3.k)*.

Ainsi, on obtient : $H(u,v) = L_n(u)\, (L_n(v-c) - L_{n+1}(v-c)) 1_{(v\ge c)}$.

En conséquence, la fonction $L_n(u)\, L_{n+1}(v-c)\, 1_{(v\ge c)}$ appartient à $\mathcal{L}$.

En itérant ce procédé, on montre que, pour tous $m \ge n$, la fonction

$L_n(u)\, L_m(v-c)\, 1_{(v\geq c)}$ appartient à $\mathscr{L}$.

En faisant de même avec la famille $L_m(u-a)\, 1_{(u\geq a)}\, L_m(v)$, on montre que $L_n(u-c)\, 1_{(u\geq c)}\, L_m(v)$ appartient à $\mathscr{L}$, pour tous $n \geq m$. Finalement, en prenant $c = 0$, on a ainsi montré que, pour tous $n,m \in \mathbb{N}$, $L_n(u)\, L_m(v)$ appartient à $\mathscr{L}$. □

(3.3) Pour la démonstration du Théorème 3, nous utiliserons le

Lemme 3 : *Soit* $\gamma : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *fonction continue telle que, pour tous* $s,t > 0$,

$$\int_0^s \frac{du}{u}\,\gamma(u,t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^s \frac{du}{u}\,\gamma(u,t), \qquad \int_0^t \frac{dv}{v}\,\gamma(s,v) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\eta\to 0} \int_\eta^t \frac{dv}{v}\,\gamma(s,v)$$

et

$$\int_0^s \int_0^t \frac{du\,dv}{uv}\,\gamma(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{(\varepsilon,\eta)\to(0,0)} \int_\varepsilon^s \int_\eta^t \frac{du\,dv}{uv}\,\gamma(u,v)$$

existent.

Posons

$$T_2(\gamma)_{s,t} = \gamma(s,t) - \int_0^s \frac{du}{u}\,\gamma(u,t) - \int_0^t \frac{dv}{v}\,\gamma(s,v) + \int_0^s \int_0^t \frac{du\,dv}{uv}\,\gamma(u,v).$$

On a alors : $T_2(\gamma) \equiv 0$ *si, et seulement si :*

$$\gamma(s,t) = t\,f(s) + s\,g(t),$$

où f *et* g *sont deux fonctions continues sur* $\mathbb{R}_+$, *nulles en* 0, *telles que :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x}\,f(x) \quad \textit{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x}\,g(x) \quad \textit{existent.}$$

Démonstration du lemme :

a) Si la fonction γ s'écrit : $\gamma(s,t) = t\,f(s) + s\,g(t)$, les fonctions f et g vérifiant les conditions énoncées ci-dessus, on a :

$$\int_\varepsilon^s \frac{du}{\varepsilon}\,\gamma(u,t) = g(t)\,(s-\varepsilon) + t\int_\varepsilon^s \frac{du}{u}\,f(u)$$

$$\int_\eta^t \frac{dv}{v}\,\gamma(s,v) = f(s)\,(t-\eta) + s\int_\eta^t \frac{dv}{v}\,g(v)$$

$$\int_\varepsilon^s\int_\eta^t \frac{du\,dv}{uv}\,\gamma(u,v) = (t-\eta)\int_\varepsilon^s \frac{f(u)du}{u} + (s-\varepsilon)\int_\eta^t \frac{g(v)}{v}\,dv.$$

Ces trois intégrales convergent donc lorsque $(\varepsilon,\eta) \longrightarrow (0,0)$.

b) Inversement, on a, pour $0 < \varepsilon < s$ et $0 < \eta < t$, et toute fonction continue $\gamma : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$T_2(\gamma)_{s,t} - T_2(\gamma)_{\varepsilon,t} - T_2(\gamma)_{s,\eta} + T_2(\gamma)_{\varepsilon,\eta}$$

$$= \gamma(s,t) - \gamma(\varepsilon,t) - \gamma(s,\eta) + \gamma(\varepsilon,\eta) + \int_\varepsilon^s\int_\eta^t \frac{du\,dv}{uv}\,\gamma(u,v)$$

$$- \int_\varepsilon^s \frac{du}{u}\,(\gamma(u,t) - \gamma(u,\eta)) - \int_\eta^t \frac{dv}{v}\,(\gamma(s,v) - \gamma(\varepsilon,v)).$$

Si, comme on le suppose dans la suite, $T_2(\gamma) \equiv 0$, alors, pour $0 < \eta \le t$ fixés, la fonction Γ définie pour $s \ge \varepsilon$ par :

$$\Gamma(s) = \gamma(s,t) - \gamma(s,\eta) - \int_\eta^t \frac{dv}{v}\,(\gamma(s,v) - \gamma(\varepsilon,v))$$

vérifie : $0 = \Gamma(s) - \Gamma(\varepsilon) - \displaystyle\int_\varepsilon^s \frac{\Gamma(x)}{x}\,dx + C\log(\frac{s}{\varepsilon})$.

où l'on a posé $C = \displaystyle\int_\eta^t \gamma(\varepsilon,v)\,\frac{dv}{v}$.

Γ est de classe C^1 sur $[\varepsilon,\infty[$, et on a : $\Gamma'(s) - \frac{1}{s}\Gamma(s) + \frac{C}{s} = 0$, c'est-à-dire : $\frac{d}{ds}\left(\frac{\Gamma}{s} - \frac{C}{s}\right) = 0$, soit : $\Gamma(s) = \frac{s}{\varepsilon}\,\Gamma(\varepsilon) + C(1 - \frac{s}{\varepsilon})$; on en déduit :

$$\gamma(s,t) - \gamma(s,\eta) = \frac{s}{\varepsilon}\,(\gamma(\varepsilon,t) - \gamma(\varepsilon,\eta)) + \int_\eta^t \frac{dv}{v}\,\gamma(s,v) - \frac{s}{\varepsilon}\int_\eta^t \frac{dv}{v}\,\gamma(\varepsilon,v).$$

Maintenant, $0 < \varepsilon \le s$ étant fixés, la fonction

$$H : v(>0) \longrightarrow H(v) = \frac{\gamma(s,v)}{s} - \frac{\gamma(\varepsilon,v)}{\varepsilon}$$

vérifie : $$H(t) - H(\eta) = \int_\eta^t \frac{dv}{v} H(v) \text{ , d'où l'on déduit :}$$

$$\frac{H(t)}{t} = \frac{H(\eta)}{\eta}$$

et : $$\frac{\gamma(s,t)}{st} = \frac{\gamma(s,\eta)}{s\eta} + \frac{\gamma(\varepsilon,t)}{\varepsilon t} - \frac{1}{\varepsilon\eta}\gamma(\varepsilon,\eta).$$

Finalement, $\dfrac{\gamma(s,t)}{s} - \dfrac{t\,\gamma(s,1)}{s} \equiv g(t)$ ne dépend que de t, et il reste à définir $f(s) = \gamma(s,1)$.

La continuité de f et g sur $\mathbb{R}_+$ découle de celle de γ sur $\mathbb{R}_+^2$; l'existence de $T_2(\gamma)$ impose :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{f(x)dx}{x} \quad \text{existe ;}$$

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{g(x)dx}{x} \quad \text{existe.} \qquad \square$$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 3.

a) Si $X_{s,t} = B_{s,t} + s\,U_t + t\,V_s$, où B est un drap brownien, et U et V sont deux processus continus indexés par $\mathbb{R}_+$ et satisfaisant :

$$U_0 = V_0 = 0, \quad \text{et :} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x} U_x \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x} V_x \quad \text{existent,}$$

alors $T_2(X) \equiv T_2(B)$ est un drap brownien, et la tribu

$\sigma\{T_2(X)_{u,v} \ ; \ u \le s,\ v \le t\}$ est indépendante de $\sigma\{(B_{u,t} \ ; \ B_{s,v}) \ ; \ u \le s, v \le t\}$ d'après le théorème 2, et donc de $\sigma\{(X_{u,t} \ ; \ X_{s,v}) \ ; \ u \le s, v \le t\}$ si le couple (U,V) est indépendant de B.

b) Inversement, si $P \in \mathcal{G}^{(2)}$, alors $\tilde{X} \equiv T_2(X)$ est un drap brownien, de même que $\xi : (s,t) \longrightarrow \xi_{s,t} = st \displaystyle\int_s^\infty \int_t^\infty \frac{d\tilde{X}_{u,v}}{uv}$.

De plus, on a : $T_2(\xi) = \tilde{X}$, et $T_2(X-\xi) = 0$.

D'après le lemme 3, on a :

$$X_{s,t} - \xi_{s,t} = sU_t + t\, V_s .$$

L'indépendance de (U,V) et ξ résulte de l'hypothèse (ii) faite sur P ;

on remarque en effet que, pour $0 < s \le u$, et $0 < t \le v$,

on a : $\displaystyle\frac{X_{s,v}}{sv} - \frac{X_{u,t}}{ut} - \frac{X_{u,v}}{uv} \equiv \frac{X_{s,t}}{st} - \int_s^u \int_t^v \frac{d\tilde{X}_{x,y}}{xy}$ qui est P-indépendant de

$\sigma\{\xi_{a,b}$; $a \le u, b \le v\}$, et converge,, quand $(u,v) \longrightarrow (\infty,\infty)$, vers :

$$\frac{U_t}{t} + \frac{V_s}{s} . \qquad \square$$

4. <u>Une sous-filtration non brownienne de la filtration du drap brownien.</u>

(4.1) En nous inspirant à la fois de notre travail pour le mouvement brownien réel [4] et de l'article de Föllmer [3], il nous a semblé naturel d'associer au drap brownien B les deux draps browniens :

$$\text{(4.a)} \qquad B^{(1)}_{s,t} \equiv B_{s,t} - \int_0^s \frac{du}{u} B_{u,t} \quad ; \quad B^{(2)}_{s,t} \equiv B_{s,t} - \int_0^t \frac{dv}{v} B_{s,v}.$$

Nous remarquons maintenant que $\tilde{B}$ peut s'écrire de deux manières différentes, en fonction de $B^{(1)}$ d'une part, et de $B^{(2)}$, d'autre part ; en effet , on a :

$$\text{(4.b)} \qquad \tilde{B}_{s,t} \equiv B^{(1)}_{s,t} - \int_0^t \frac{dv}{v} B^{(1)}_{s,v} \equiv B^{(2)}_{s,t} - \int_0^s \frac{du}{u} B^{(2)}_{u,t} .$$

Introduisons maintenant $\mathcal{G}^{(i)}_{a,b} \equiv \sigma\{B^{(i)}_{s,t}$; $s \le a, t \le b\}$, $i = 1,2$,

et $\mathcal{H}^-_{a,b} = \mathcal{G}^{(1)}_{a,b} \cap \mathcal{G}^{(2)}_{a,b}$, puis $\mathcal{H}^+_{a,b} = \mathcal{G}^{(1)}_{a,b} \vee \mathcal{G}^{(2)}_{a,b}$.

Nous montrons maintenant la

Proposition 5 : *1)* $\mathcal{H}^{+}_{a,b}$ *est la tribu engendrée par les variables de l'espace gaussien* $(B_{s,t}\ ;\ s \le a, t \le b)$, *indépendantes de (ou orthogonales à) la variable* $B_{a,b}$;

2) $\mathcal{G}_{a,b} = \mathcal{H}^{-}_{a,b}$

Démonstration : 1) Il suffit de montrer que, si $f \in L^2(R_{a,b}\ ;\ du\,dv)$ est telle que :

$$E\left[\left(\iint_{R_{a,b}} f(u,v)dB_{u,v}\right)B^{(i)}_{s,t}\right] = 0, \tag{4.c}$$

pour tous $s \le a$, et $t \le b$, et $i = 1,2$, alors f est constante.
Or, on peut réécrire *(4.c)*, pour $i = 1$, sous la forme :

$$\int_0^s dh \int_0^t dv\ f(h,v) - \int_0^s \frac{du}{u} \int_0^u dh \int_0^t dv\ f(h,v) = 0,$$

soit, en dérivant par rapport à s, puis par rapport à t :

$$f(s,t) = \frac{1}{s} \int_0^s dh\ f(h,t) \quad , \ ds\,dt \text{ p.s.}$$

Il n'est alors pas difficile de déduire de ce résultat que f ne dépend que de t, puis, par symétrie, que f est constante.

2) Il découle immédiatement du fait que $\mathcal{G}_{a,b} \equiv \sigma\{\tilde{B}_{s,t}\ ;\ s \le a, t \le b\}$ et des formules *(4.b)* que l'on a :

$$\mathcal{G}_{a,b} \subseteq \mathcal{G}^{(1)}_{a,b} \cap \mathcal{G}^{(2)}_{a,b} \equiv \mathcal{H}^{-}_{a,b} .$$

Il nous reste à montrer l'inclusion inverse ; pour cela, nous nous appuyons sur les descriptions suivantes de $\mathcal{G}^{(1)}_{a,b}$ et $\mathcal{G}^{(2)}_{a,b}$:

$$\mathcal{G}^{(1)}_{a,b} \equiv \sigma\left\{\iint_{R_{a,b}} f(u,v)dB_{u,v}\ ,\ \text{indépendante de}\ (B_{a,t}\ ;\ t \le b)\right\}$$

$$\mathcal{G}^{(2)}_{a,b} \equiv \sigma\left\{\iint_{R_{a,b}} f(u,v)dB_{u,v}\ ,\ \text{indépendante de}\ (B_{s,b}\ ;\ s \le a)\right\}.$$

En conséquence, on a :

$$\mathcal{H}^-_{a,b} \equiv \mathcal{G}^{(1)}_{a,b} \cap \mathcal{G}^{(2)}_{a,b} = \sigma\left\{\iint_{R_{a,b}} f(u,v)dB_{u,v} \text{ , indépendante de } B_{\partial R_{a,b}}\right\}$$

et donc, par définition de $\mathcal{G}_{a,b}$:

$$\mathcal{H}^-_{a,b} = \mathcal{G}_{a,b}. \qquad \square$$

Nous avons rappelé ci-dessus que $(\mathcal{G}_{a,b}\ ;\ a \geq 0, b \geq 0)$ est la filtration naturelle d'un drap brownien ; nous allons maintenant montrer la

Proposition 6 : $(\mathcal{H}^+_{a,b}\ ;\ a \geq 0, b \geq 0)$ *n'est pas la filtration naturelle d'un drap brownien, car elle ne vérifie pas la propriété (F4), c'est-à-dire :*

$\mathcal{H}^+_{\infty,b}$ et $\mathcal{H}^+_{a,\infty}$ ne sont pas conditionnellement indépendantes, sachant $\mathcal{H}^+_{a,b}$.

Démonstration : Il découle de [4] que, pour tout t fixé, on a :

$$\sigma\{B_{s,t}\ ;\ s \geq 0\} = \sigma\{B^{(1)}_{s,t}\ ;\ s \geq 0\},$$

et donc : $\mathcal{G}^{(1)}_{\infty,b} = \sigma\{B_{s,t}\ ;\ s \geq 0,\ t \leq b\} = \mathcal{F}_{\infty,b}$,

ce qui implique que : $\mathcal{H}^+_{\infty,b} \equiv \mathcal{G}^{(1)}_{\infty,b} \vee \mathcal{G}^{(2)}_{\infty,b} = \mathcal{F}_{\infty,b}$.

Par symétrie, on a : $\mathcal{H}^+_{a,\infty} = \mathcal{F}_{a,\infty}$.

En conséquence, la variable $B_{a,b}$ est mesurable à la fois par rapport à $\mathcal{H}^+_{a,\infty}$ et $\mathcal{H}^+_{\infty,b}$, et est indépendante de $\mathcal{H}^+_{a,b}$ (d'après la proposition 5).
La propriété (F4) n'est donc pas réalisée pour la filtration
$(\mathcal{H}^+_{a,b}\ ;\ a \geq 0, b \geq 0)$. $\square$

Il serait intéressant de mieux comprendre les relations qui peuvent exister entre $(\mathcal{H}^+_{a,b})$ martingales et $(\mathcal{F}_{a,b})$ martingales ; nous continuons de travailler sur ce sujet.

(4.2) L'introduction des draps browniens $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$ associés à B

au moyen de la formule *(4.a)* permet de donner une seconde démonstration de la propriété de mélange fort de la transformation T_2 (voir la Proposition 4) qui préserve la loi $W^{(2)}$ du drap brownien.

Dans ce but, introduisons les transformations θ_1 et θ_2 sur l'espace canonique $\Omega_*^{(2)} \equiv C(\mathbb{R}_+^2,\mathbb{R})$ définies par :

$$(4.d) \qquad \theta_1(X)_{s,t} \equiv X_{s,t} - \int_0^s \frac{du}{u} X_{u,t} \; ; \; \theta_2(X)_{s,t} \equiv X_{s,t} - \int_0^t \frac{dv}{v} X_{s,v} \, .$$

En accord avec les formules *(4.a)* et *(4.b)*, remarquons que θ_1 et θ_2 laissent $W^{(2)}$ invariante et que, de plus, on a :

$$(4.e) \qquad T_2 = \theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1 .$$

Une conséquence importante de *(4.e)* est que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(4.f) \qquad T_2^n = \theta_1^n \circ \theta_2^n = \theta_2^n \circ \theta_1^n .$$

Pour prouver, comme nous le faisons dans la démonstration de la Proposition 4 que, pour $s,t \geq 0$ fixés, la tribu $\bigcap_{n\geq 0} (T_2^n)^{-1} (\mathcal{F}_{s,t})$ est $W^{(2)}$-triviale, il nous suffit, en conséquence de *(4.f)*, de montrer, par exemple, que $\bigcap_{n\geq 0} (\theta_1^n)^{-1} (\mathcal{F}_{s,t})$ est $W^{(2)}$-triviale, ce que nous montrons maintenant.

Proposition 7 : *Pour* $i = 1,2$, *et tous* $s,t \geq 0$, *la tribu* $\bigcap_{n\geq 0} (\theta_i^n)^{-1}(\mathcal{F}_{s,t})$ *est* $W^{(2)}$*-triviale.*

En conséquence, les transformations θ_1 *et* θ_2 *, et a fortiori* T_2 *, sont fortement mélangeantes.*

Démonstration : Nous commençons par remarquer les variantes immédiates suivantes de la formule *(1.c)* :

$$(4.g) \qquad \theta_1^n(X)_{s,t} = \int_0^s d_u(X_{u,t}) L_n(\log \frac{s}{u}) \; ; \; \theta_2^n(X)_{s,t} = \int_0^t d_v(X_{s,v}) L_n(\log \frac{t}{v}).$$

D'autre part, nous avons déjà remarqué, dans le point 2) de la démonstration de la Proposition 5 que, pour $s,t \geq 0$ fixés, la tribu $\mathcal{G}_{s,t}^{(1)} \equiv \theta_1^{-1}(\mathcal{F}_{s,t})$ est la tribu engendrée par les variables $B(f)_{s,t} \equiv \iint_{R_{s,t}} f(u,v)dB_{u,v}$, où $f \in L^2(R_{s,t}\ ;\ du\,dv)$, qui sont orthogonales à $(B_{s,t}\ ;\ v \le t)$.

En conséquence, la tribu $\bigcap_{n\ge 0} (\theta_1^n)^{-1}\ (\mathcal{F}_{s,t})$ est engendrée par les variables $B(f)_{s,t}$, où $f \in L^2(R_{s,t}\ ;\ du\,dv)$, qui sont orthogonales aux variables

$$\{\theta_1^n(B)_{s,v}\ ;\ n \in \mathbb{N}, v \le t\}.$$

A l'aide de la formule *(4.g)*, il nous suffit, pour démontrer que la tribu $\bigcap_{n\ge 0} (\theta_1^n)^{-1}\ (\mathcal{F}_{s,t})$ est $W^{(2)}$-triviale, de prouver que l'ensemble des fonctions de (u,v) :

$$\{L_n(\log \frac{s}{u})\ \varphi(v)\ ;\ n \in \mathbb{N},\ \varphi \in b(\mathcal{B}[0,t])\}$$

est total dans $L^2(R_{s,t}\ ;\ du\,dv)$, ce qui découle immédiatement de la totalité des polynômes de Laguerre $(L_n, n \in \mathbb{N})$ dans $L^2(\mathbb{R}_+, e^{-x}dx)$. □

Remerciements : Nous remercions vivement H. Föllmer de nous avoir communiqué un preprint de son article [3], dont une version plus complète, exposée à Paris en Janvier 1992, est en préparation.

REFERENCES

[1] O. BROCKHAUS : Der Zusammenhang zwischen Suffizienter Statistik und Drift beim Brownschen Blatt.
Diplomarbeit. Bonn (Feb. 1992).

[2] R. CAIROLI, J.B. WALSH : Stochastic integrals in the plane.
Acta Math., 134, p. 111-183 (1975).

[3] H. FOLLMER : Martin boundaries on Wiener space.
In : "Diffusion processes and related Problems in Analysis", volume I.
M. Pinsky, ed. p. 3-17. Birkhaüser (1990).

[4] T. JEULIN, M. YOR : Filtration des ponts browniens, et équations différentielles stochastiques linéaires.
Sém. Probas. XXIV, Lect. Notes in Maths. 1426, p. 227-265 (1990).

[5] H. von WEIZSACKER : Exchanging the order of taking suprema and countable intersection of σ-algebras.
Ann. I.H.P., 19, p. 91-100 (1983).