SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JACQUES AZÉMA
PAUL-ANDRÉ MEYER
MARC YOR

Martingales relatives

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 307-321
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__307_0>

MARTINGALES RELATIVES

par J. Azéma, P.A. Meyer et M. Yor

Cet exposé résulte d'un échange entre d'une part J. Azéma et M. Yor, cherchant à caractériser les martingales nulles sur les zéros d'une martingale continue, et d'autre part P.A. Meyer qui cherchait à présenter pour le livre [7] les constructions de sousmartingales nulles sur un ensemble aléatoire (Azéma [2]). Il est vite apparu que les deux sujets étaient très proches. La rédaction actuelle de l'article d'Azéma–Yor [3] se limite aux martingales continues, tandis que les aspects généraux, concernant les filtrations et semimartingales arbitraires, ont été rassemblés ici. Les deux articles peuvent être lus de manière indépendante, mais la plupart des exemples détaillés figurent dans [3].

Afin que l'exposé soit cohérent et lisible, nous n'avons pas hésité à présenter à nouveau certains résultats de [3].

Notations et rappels

1 Nous travaillons sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t))$ satisfaisant aux conditions habituelles. Soit M un ensemble aléatoire optionnel dans $]\,0,\infty\,[$ (*cf.* la remarque plus bas). Nous utiliserons les notations courantes

$$(1.1) \qquad D_t = \inf\{s > t \;:\; s \in \mathrm{M}\} \quad , \quad g_t = \sup\{s < t \;:\; s \in \mathrm{M}\} \quad (g_0 = 0)\;.$$

Ces deux processus sont croissants, le premier continu à droite, le second continu à gauche. On pose aussi $G_t = g_{t+}$, et $d_t = D_{t-}$ $(d_0 = 0)$. La v.a. g_∞, qui jouera un rôle fondamental dans la suite, sera notée L. Enfin, on désigne par $\mathbf{G}$ l'ensemble des extrémités gauches d'intervalles contigus à $\overline{\mathrm{M}}$.

La plupart du temps, M pourra être supposé fermé. Cependant, dans le cas des ensembles aléatoires prévisibles seule la fermeture à gauche est permise.

REMARQUE. Le fait de travailler sur des ensembles aléatoires dans $]\,0,\infty\,[$ nous permet d'utiliser sans ambiguïté la convention $\sup(\emptyset) = 0$, alors que sur $[\,0,\infty\,[$ il faudrait ajouter un point $0- < 0$. On peut toujours ramener l'intervalle $[\,0,\infty\,[$ à $]\,0,\infty\,[$ par un artifice : poser $\mathcal{F}'_t = \mathcal{F}_{t-1}$ pour $t \geq 1$, $\mathcal{F}_0$ pour $t < 1$, et raisonner sur l'ensemble M décalé de 1 vers la droite.

Fins d'ensembles prévisibles et optionnels

2 Rappelons, pour la commodité du lecteur, certains résultats de [1] qui nous serviront constamment. Etant donné un "temps" arbitraire L (une v.a. à valeurs dans $[\,0,+\infty\,]$), on note a^L et A^L les projections duales prévisible et optionnelle du processus croissant brut $I_{\{t \geq L > 0\}}$. Le potentiel de a^L, projection optionnelle de $I_{]\,0,L\,[}$, est noté $c^L_t = \mathbb{P}\{t < L \,|\, \mathcal{F}_t\}$, et le potentiel gauche de A^L, projection optionnelle de $I_{]\,0,L\,]}$, est noté C^L. On a $C^L_+ = c^L$, et $C^L_- = c^L_-$ est projection prévisible de $I_{]\,0,L\,]}$. Si L *évite les temps d'arrêt,* c'est à dire si $\mathbb{P}\{T = L > 0\} = 0$ pour tout t. d'a. T, $A^L = a^L$ est continu et l'on a $C^L = c^L$.

Etant donné un processus croissant B, nous désignons par $\Gamma(B)$ l'ensemble des points de croissance à gauche de B, $\Gamma(B) = \{t > 0 \ : \ \forall s < t \ \ B_s < B_t\}$; il porte la mesure aléatoire dB, d'où son nom de ***support gauche de*** B. Si B est optionnel (prévisible) $\Gamma(B)$ l'est aussi.

THÉORÈME 2.1. *a) L'ensemble $\Gamma(a^L)$ contient le graphe de L (dans $]0,\infty]$). Si L est la fin d'un ensemble prévisible, L est aussi la fin de $\Gamma(a^L)$ qui est alors (à un ensemble évanescent près) le plus petit ensemble prévisible fermé à gauche contenant $[L]$.*

b) L'ensemble $\{c_-^L = 1\}$ est (à un ensemble évanescent près) le plus grand ensemble prévisible contenu dans $]0,L]$. Si L est la fin d'un ensemble prévisible, L est aussi la fin de l'ensemble $\{c_-^L = 1\}$.

On a un énoncé analogue dans le cas optionnel, en remplaçant a^L par A^L, c_-^L par C^L ; de plus l'ensemble $\{C^L = 1\}$ est fermé dans $]0,\infty]$.

L'ensemble $\{C^L = 1\}$, qui est le plus grand ensemble optionnel contenu dans $]0,L]$, sera appelé de manière imagée ***l'ombre optionnelle*** de L, et de même pour ***l'ombre prévisible*** $\{c_-^L = 1\}$. On dit qu'un fermé aléatoire optionnel est ***saturé*** s'il est égal à l'ombre optionnelle de sa fin ; il est alors fermé.

Si l'on cherche à évaluer L "par la droite", en cherchant le plus petit temps d'arrêt majorant L , on a le résultat suivant.

THÉORÈME 2.2. *Soit L un temps arbitraire. Les ensembles $\{c^L = 0\}$, $\{c_-^L = 0\}$ et $\{C^L = 0\}$ sont contenus dans $[L,\infty[$, et ont la même borne inférieure T, qui est le plus petit t. d'a. majorant L.*

Pour être complets, rappelons une amélioration des résultats précédents due à Jeulin [8], p. 61–63, et concernant un fermé gauche mesurable M — le cas le plus important étant celui des intervalles stochastiques déterminés par des temps arbitraires, $]0,L]$ ou plus généralement $]\lambda,L]$ $(\lambda \leq L)$ (alors M^c est aussi un fermé gauche). Noter que lorsque $\mathrm{M} =]0,L]$, la fonction c n'est pas égale à c^L, mais à c_-^L. Ce résultat ne sera pas utilisé dans la suite de l'exposé.

THÉORÈME 2.3. *Soit M un ensemble mesurable contenu dans $]0,\infty[$; on désigne par C et c les projections optionnelle et prévisible de I_{M}.*

a) Si M est fermé à gauche, les ensembles $\{C = 1\}$ et $\{c = 1\}$ sont fermés à gauche, et sont respectivement (aux ensembles évanescents près) le plus grand ensemble optionnel et le plus grand ensemble prévisible contenu dans M. Si M est fermé, l'ensemble $\{C = 1\}$ l'est aussi.

b) Si M^c est fermé à gauche, les processus C et c sont strictement positifs sur M.

3 Nous présentons maintenant quelques remarques simples, mais probablement nouvelles. La principale concerne la manière dont certaines propriétés se propagent d'une fin d'optionnel L à tous les points de G, l'ensemble des extrémités gauches d'intervalles contigus à l'ombre optionnelle M de L — ce sera encore un leitmotiv de cet exposé, en théorie des martingales relatives.

THÉORÈME 3.1. *a) Tout ensemble optionnel H contenant $]L,\infty[$ contient M^c.*

b) Tout ensemble optionnel K contenant $[L]$ contient G.

DÉMONSTRATION. *a)* H^c est un ensemble optionnel situé à gauche de L, donc contenu dans l'ombre M de L.

b) Il est facile de voir que, si $(K_t)_{t>0}$ est un processus optionnel, le processus $Z_t = K_{G_t}$ (nul sur $\{G_t = 0\}$) l'est aussi. On notera que $Z_t = K_t$ pour $t \in \mathbf{G}$. Prenant pour (K_t) l'indicatrice de K, pour $t > L$ on a $G_t = L$ donc $Z_t = 1$, et a) entraîne que $Z_t = 1$ sur $\mathbf{M}^c$; le résultat en découle.

Prenant pour K le complémentaire d'un graphe de temps d'arrêt, on obtient une remarque due à M.A. Zanoun :

COROLLAIRE 3.2. *Si L évite les temps d'arrêt, il en est de même de $\mathbf{G}$.*

Cette propriété de propagation permet de préciser le théorème 2.1. Soit L une fin d'ensemble optionnel, et soit $\mathbf{M}$ son ombre, qui est le plus grand fermé optionnel à gauche de L, tandis que le support S de dA^L est le plus petit fermé optionnel de fin L. Quelle est la relation précise entre les deux?

THÉORÈME 3.3. *On a $S = \overline{\mathbf{G}}$, et $S = \mathbf{M}$ si (et seulement si) $\mathbf{M}$ est d'intérieur vide.*

DÉMONSTRATION. Puisque $\overline{\mathbf{G}}$ est un fermé optionnel de fin L, le caractère minimal de S entraîne $S \subset \overline{\mathbf{G}}$, sans faire intervenir la saturation de $\mathbf{M}$. Dans l'autre sens, le th. 2.4 b) entraîne que S contient $\mathbf{G}$.

Le fait que $\mathbf{M} = \overline{\mathbf{G}}$ si et seulement si $\mathbf{M}$ est d'intérieur vide est une propriété topologique des fermés de $\mathbb{R}$, que nous laissons au lecteur.

REMARQUE. Si $\mathbf{M}$ est d'intérieur vide, le plus petit et le plus grand des fermés optionnels $\mathbf{H}$ de fin L sont identiques, et il y a donc unicité de $\mathbf{H}$.

On peut encore préciser cela : soit $\mathbf{H}$ un fermé optionnel dans $]0, \infty[$, de fin L, et soit $\mathbf{M}$ l'ombre de L — nous devons distinguer ici $\mathbf{G} = \mathbf{G_M}$ et $\mathbf{G_H}$. On a alors $\mathbf{G} \subset \mathbf{G_H}$; en effet, soit $t \in \mathbf{G}$; l'intervalle $]t, D_t[$ est contenu dans $\mathbf{M}^c \subset \mathbf{H}^c$, et donc dans un intervalle contigu à $\mathbf{H}$, et il nous suffit de montrer que $t \in \mathbf{H}$. Or $\mathbf{H}$ contient $[L]$ et donc $\mathbf{G}$ d'après (3.1).

On voit donc que tous les ensembles optionnels de fin L, s'obtiennent, soit en faisant des trous dans l'intérieur de $\mathbf{M}$, soit en élargissant vers la droite les intervalles contigus à $\mathbf{M}$, mais sans avoir le droit d'enlever des points de $\mathbf{G}$. Les deux opérations sont impossibles si $\mathbf{M}$ a un intérieur vide, d'où alors l'unicité.

Enfin, nous avons le résultat très simple suivant :

THÉORÈME 3.4. *Les mesures aléatoires ε_L et $\sum_{g \in \mathbf{G}} \varepsilon_g$ sont équivalentes sur la tribu optionnelle (rappelons que $\mathbf{M}$ est saturé).*

DÉMONSTRATION. Si N est un ensemble optionnel négligeable pour la première, N^c contient le graphe de L, donc aussi $\mathbf{G}$, et N est aussi négligeable pour la seconde mesure.

Ce théorème peut aussi s'énoncer en disant que les projections duales optionnelles des deux mesures sont équivalentes, ce qui exprime que le temps local de $\mathbf{M}$ au sens de la théorie des excursions est équivalent à la mesure aléatoire dA^L.

Application aux martingales continues

4 L'application suivante de (3.3) anticipe sur la théorie des martingales relatives donnée plus loin et dans [3], et on fera donc bien de l'omettre temporairement. On désigne par (M_t) une martingale continue nulle en 0, et on pose comme d'habitude $S_t = \sup_{s \leq t} M_s$. On fait les hypothèses suivantes

1) $M_\infty = \lim_{t\to\infty} M_t$ existe et est finie p.s.

2) On a $M_\infty < S_\infty$ p.s. .

3) L'ensemble $\{t : M_t = S_t\}$ est d'intérieur vide.

Par exemple, un mouvement brownien arrêté à un temps d'arrêt fini T satisfait aux hypothèses 1) et 3), et peut satisfaire ou non à l'hypothèse 2). On a le résultat suivant :

THÉORÈME 4.1. *Le support de la mesure aléatoire dS_t est exactement l'ensemble aléatoire* $\mathbf{H} = \{t : M_t = S_t\}$.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que (M_t) appartienne à la classe $\mathcal{H}^1$. Alors le processus $Y_t = S_t - M_t$ est une martingale relative continue (n° 7; l'hypothèse $Y_\infty > 0$ joue ici un rôle essentiel); l'ensemble $\mathbf{H}$ de ses zéros est donc saturé de fin L finie, la mesure aléatoire dS est équivalente à dA^L, et on peut appliquer (3.3).

Pour nous affranchir de l'appartenance à $\mathcal{H}^1$, considérons le temps d'arrêt $T = \inf\{t : S_t - M_t \geq a\}$ $(a>0)$, et remarquons d'abord que M^T appartient à $\mathcal{H}^1$. En effet, pour $t \leq T$ on a $M_t + a \geq S_t$ et le processus $M^T + a$ est une martingale locale positive, donc une surmartingale, et son espérance en tout temps d'arrêt est donc bornée par a. Il en résulte que $\mathbb{E}[S_T] \leq a$, donc M^T est bornée supérieurement par une v.a. intégrable. Comme on a aussi $M^T \geq -a$ on a bien $M^T \in \mathcal{H}^1$.

Sur l'ensemble $\{T < \infty\}$ on a $S_T - M_T = a > 0$; sur $\{T = \infty\}$ cette différence vaut $S_\infty - M_\infty > 0$, et on peut appliquer le résultat précédent à M^T. Après quoi on fait tendre a vers 0.

REMARQUE. On peut remplacer les deux hypothèses 1) et 2) par l'existence d'une suite de t. d'a. finis $T_n \uparrow \infty$ tels que $M_{T_n} < S_{T_n}$ p.s..

REMARQUE. Plaçons nous sous les hypothèses 1) et 2) précédant le th. 4.1, et supposons que $M \in \mathcal{H}^1$. *Alors M atteint son maximum en l'unique point* $L = \sup\{t : M_t = S_t\}$ $= \sup\{t : M_t = S_\infty\}$. En effet, comme $M_L = S_\infty$, $S.$ ne croît plus après L ; or L appartient au support de dS ; comme il n'est pas point de croissance à droite il est point de croissance à gauche, ce qui signifie que la valeur S_∞ n'est pas atteinte avant L.

Si l'on ajoute l'hypothèse 3), le même raisonnement donne un résultat un peu meilleur : *pour tout u, la propriété $M_u < S_u$ entraîne que le maximum de M sur $[0,u]$ est atteint en un seul point.* Posons en effet $g = \sup\{t < u : M_t = S_t\}$; alors comme $M_g = S_g$ le th. 4.1 nous dit que le point g appartient au support de dS, et pour la même raison que ci-dessus il doit être point de croissance à gauche.

5 Nous allons énoncer le théorème 2.1 dans un langage un peu différent, dont l'importance apparaîtra plus loin. Revenons à la v.a. L, et donnons nous une v.a. intégrable σ arbitraire. Nous considérons la mesure aléatoire $\sigma I_{\{L>0\}}\varepsilon_L$, et ses deux projections, prévisible dv_t^σ et optionnelle dV_t^σ — lorsque $\sigma = 1$, ce sont les mesures notées précédemment da^L et dA^L. Nous considérons d'autre part la projection optionnelle (y_t^σ) de $\sigma I_{[L,\infty[}$, qui est pour $\sigma \geq 0$ une *sous*martingale continue à droite uniformément intégrable, et la projection optionnelle Y^σ du processus continu à gauche $\sigma I_{]L,\infty[}$ (pour $\sigma \geq 0$ une sousmartingale forte régulière). Lorsque $\sigma = 1$, ce sont les deux processus $1 - c^L$ et $1 - C^L$. Voici une extension facile du théorème 2.1 :

THÉORÈME 5.1. *Supposons que σ soit strictement positive sur* $\{L<\infty\}$.

1) Si L est une fin d'ensemble prévisible, l'ombre prévisible de L est l'ensemble $\{y_-^\sigma = 0\}$, *et porte* dv^σ.

2) Si L est une fin d'ensemble optionnel, l'ombre optionnelle de L est l'ensemble $\{Y^\sigma = 0\}$, et porte dV^σ. En particulier, l'ensemble $\{Y^\sigma = 0\}$ est fermé.

La démonstration est immédiate. Dans le cas optionnel, par exemple, l'ensemble $\{Y = 0\}$ ne dépend pas du choix de σ (théorème de section optionnel) et les ensembles optionnels négligeables pour dV n'en dépendent pas non plus. On peut donc se ramener au théorème 2.1 en remplaçant σ par 1.

Lorsque σ n'est pas >0, on peut seulement affirmer que y_-, Y s'annulent sur les ombres correspondantes.

6 Nous indiquons maintenant la forme optionnelle de la "formule de balayage" (Azéma–Yor [4]), moins connue que la forme prévisible.

L'ensemble $\mathbf{M}$ est ici fermé *à droite*. On désigne par Y une semimartingale, non nécessairement continue à droite, admettant une décomposition canonique $Y = N + A$, où N est une martingale locale continue à droite et A un processus à variation finie *prévisible* A

THÉORÈME 6.1. *Supposons que l'on ait $Y = 0$ sur $\mathbf{M}$.*

a) Supposons A continu à droite. Alors pour tout processus prévisible borné (Z_t), le processus $U_t = Z_{g_t}$ est prévisible, et l'on a

$$U_t Y_t = U_0 Y_0 + \int_0^t U_s \, dY_s \tag{6.1}$$

b) Supposons $\mathbf{M}$ fermé, A continu à gauche, et posons $A_{t+} = B_t$. Alors pour tout processus optionnel borné (Z_t), le processus $U_t = Z_{G_t}$ est optionnel, et le processus $Y'_t = U_t Y_t$ admet une décomposition $N' + B'_-$ du même type que Y, avec $B'_t = \int_0^t U_s \, dB_s$. En particulier, si la mesure dB est portée par $\mathbf{M}$ il en est de même de dB'.

DÉMONSTRATION. Le cas prévisible étant bien connu, nous traitons seulement le cas optionnel. Tout d'abord, on peut se ramener par arrêt au cas où N appartient à la classe $\mathcal{H}^1$. Nous allons établir que $U_t Y_t - \int_0^{t-} U_s dB_s$ est une martingale continue à droite, en commençant par le cas où Z est l'indicatrice d'un intervalle stochastique $[0, T[$; le processus U est alors l'indicatrice de l'intervalle $[0, R[$ avec $R = d_T$, et comme $Y_{d_T} = 0$ sur $\{d_T < \infty\}$, le processus $Y' = UY$ est égal au processus arrêté Y^R, tandis que le processus $A'_t = \int_0^{t-} U_s dB_s$ est égal à $(B^{R-})_- = (A_-)^R$. La différence $Y' - A'$ est donc égale à la martingale arrêtée N^R. On considère ensuite le cas où Z est une combinaison linéaire finie d'indicatrices d'intervalles $[S_i, T_i[$, puis on étend le résultat par classes monotones. On peut remarquer que si Z est borné par 1 en valeur absolue, la norme $\mathcal{H}^1$ de N' est bornée par celle de N.

Le résultat s'applique en particulier dans le cas des martingales càd. ($A = 0$), mais il faut bien noter pour b) l'hypothèse que $\mathbf{M}$ est fermé, alors que l'ensemble des zéros d'une martingale càd. n'est en général pas fermé.

Martingales relatives

7 Comme pour la formule du balayage, nous avons affaire à des processus qui se présentent sous deux aspects, une forme *droite* continue à droite, et une forme (dite *gauche*) qui ne l'est pas nécessairement ; cette seconde forme est la plus intéressante.

Soient M un ensemble aléatoire et Y un processus optionnel. Nous dirons que Y est une *martingale relative* associée à M dans chacun des deux cas suivants

1) (cas droit) M *est prévisible, Y est continu à droite, Y_t est intégrable pour tout t, et pour $s<t$ on a*

$$Y_s = \mathbb{E}\,[Y_t I_{\{G_t \le s\}} \,|\, \mathcal{F}_s] \;. \tag{7.1}$$

2) (cas gauche) M *est optionnel, Y_T est intégrable pour tout t. d'a. borné T, et pour tout couple de t. d'a. bornés $S \le T$ on a*

$$Y_S = \mathbb{E}\,[Y_T I_{\{G_T < S\}} \,|\, \mathcal{F}_S] \;. \tag{7.2}$$

On prendra garde dans le cas droit que le processus (G_t) est relatif à $\overline{\mathrm{M}}$. Lorsque $\mathrm{M} = \emptyset$ on retrouve les martingales ordinaires. Nous verrons d'autres raisons justifiant le nom de martingales relatives donné à ces processus.

La propriété (7.1) ou (7.2) entraîne que le processus $|Y|$ est majoré par la martingale $\mathbb{E}\,[|Y_u| \,|\, \mathcal{F}_t]$ sur tout intervalle borné $[0,u]$, et il n'y a donc aucune difficulté d'intégrabilité. Pour simplifier la discussion, nous ajoutons à la définition des martingales relatives (sauf mention expresse du contraire) *l'intégrabilité uniforme des variables aléatoires Y_u*.

Si Φ est une fonction convexe positive nulle en 0, le processus $\Phi\mathrm{o}Y$ est une sousmartingale positive ordinaire sous la seule réserve de l'intégrabilité. Prenant $\Phi(t) = t^{\pm}$, on voit que Y est différence de deux sousmartingales positives de la classe (D), continues à droite dans le cas droit et fortes régulières dans le cas gauche. La limite Y_∞ existe donc, p.s. et dans L^1, et les deux propriétés (7.1–2) deviennent

$$Y_s = \mathbb{E}\,[Y_\infty I_{\{L \le s\}} \,|\, \mathcal{F}_s] \;, \tag{7.3}$$

$$Y_S = \mathbb{E}\,[Y_\infty I_{\{L < S\}} \,|\, \mathcal{F}_S] \;, \tag{7.4}$$

On reconnaît les processus y^σ et Y^σ, avec $\sigma = Y_\infty$.

Inversement, ces propriétés entraînent que les processus sont des martingales relatives. Prenons par exemple le cas droit, et vérifions la propriété (7.1), et même son extension à un couple de temps d'arrêt $S \le T$. D'abord, le second membre de (7.3) peut être interprété comme une projection optionnelle, continue à droite. Ensuite, l'ensemble $\{L \le S\}$ est l'intersection $\{L \le T\} \cap \{G_T \le S\}$ (et de même en remplaçant partout $\le$ par $<$). On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,[Y_T I_{\{G_T \le S\}} \,|\, \mathcal{F}_S\,] &= \mathbb{E}\,[Y_\infty I_{\{L \le T\}} I_{\{G_T \le S\}} \,|\, \mathcal{F}_S\,] \\ &= \mathbb{E}\,[Y_\infty I_{\{L \le S\}} \,|\, \mathcal{F}_S\,] = Y_S \end{aligned} \tag{7.5}$$

qui étend (7.1) en une relation entre t. d'a.. Le raisonnement est le même pour (7.4).

Les relations (7.3–4) ne faisant intervenir que la fin L de l'ensemble M, les martingales relatives sont les mêmes pour M et pour son saturé. On peut aussi parler de *martingales relatives associées à L*.

REMARQUES. a) Comme les martingales ordinaires, les martingales relatives sont uniquement déterminées par leur v.a. à l'infini, sous une condition d'intégrabilité uniforme.

b) En prenant $S = T$ dans (7.2), on voit que $Y = 0$ sur l'ensemble $\{G_S = S\}$, et on en déduit que $Y = 0$ sur $\overline{\mathrm{M}}$. Ceci n'est pas nouveau, puisque Y est un processus de la forme Y^σ, et donc nul en fait sur l'ombre optionnelle de L. De même, dans la décomposition canonique $Y = N + V_-$ on sait que dV est porté par $\overline{\mathrm{M}}$: voir plus loin la réciproque de cette propriété. On a des considérations analogues pour les martingales relatives droites.

c) Soient Y une martingale relative associée à L et T un temps d'arrêt. Alors le processus arrêté $Y' = Y^T$ est une martingale relative associée à $L' = G_T$. Cela revient à remplacer M par $\mathrm{M} \cap]0, T]$.

8 Nous allons donner une autre caractérisation des martingales relatives au moyen de leur décomposition canonique. Soit $Y = N + V_\pm$ une semimartingale, où N est une martingale uniformément intégrable et V est un processus à variation intégrable continu à droite, prévisible dans le cas $+$, optionnel dans le cas $-$ (mais V_- est prévisible).

THÉORÈME 8.1. *1) Supposons que l'on ait $Y = N + V$, et que le processus prévisible continu à droite V soit porté par l'ensemble $\mathrm{M} = \{Y_- = 0\}$. Alors Y est une martingale relative droite associée à la fin L de* M. *Plus précisément, on a $Y = y^\sigma$ avec $\sigma = Y_\infty$.*

2) Supposons que l'on ait $Y = N + V_-$, que l'ensemble $\mathrm{M} = \{Y = 0\}$ soit fermé, et que V soit porté par M. *Alors on a de même $Y = Y^\sigma$ avec $\sigma = Y_\infty$, et Y est une martingale relative gauche associée à L.*

DÉMONSTRATION. Nous commençons par le second cas. Soit T un t. d'a.; sur l'ensemble $\{T > L\}$ on a $d_T = \infty$; sur l'ensemble $\{T \leq L, L > 0\}$ on a $d_T \in \mathrm{M}$ donc $Y_{d_T} = 0$. Par conséquent, avec le choix de $\sigma = Y_\infty$ on a

$$\begin{aligned} Y_T^\sigma = \mathbb{E}[Y_\infty I_{\{T>L>0\}} \,|\, \mathcal{F}_T] &= \mathbb{E}[Y_{d_T} \,|\, \mathcal{F}_T] = \mathbb{E}[N_{d_T} + V_{d_T-} \,|\, \mathcal{F}_T] \\ &= N_T + V_{T-} = Y_T \ . \end{aligned}$$

Le premier cas est plus subtil, et se trouve dissimulé dans un article de Barlow–Yor [6]. Soit s un instant fixe, et soit $S = D_s$. Introduisons le t. d'a.

$$R = S_A \quad \text{avec } A = \{Y_{S-} = 0, \, s < S\}.$$

Le graphe de R est l'intersection des ensembles $]0, S]$, $]s, \infty]$, $\{Y_- = 0\}$; il est donc prévisible. Montrons d'abord que

$$Y_s = \mathbb{E}[Y_S^{R-} \,|\, \mathcal{F}_s]$$

Pour cela, on décompose Y en $N + V$, et on a

$$N_s = N_s^{R-} = \mathbb{E}[N_S^{R-} \,|\, \mathcal{F}_s]$$

parce que N^{R-} est une martingale, R étant prévisible. On a d'autre part $V_S^{R-} = V_s$. En effet, sur A on a $V_S^{R-} = V_{S-} = V_s$ car $dV = 0$ sur $]s, D_s[$; sur A^c on a $R = \infty$ et $V_S^{R-} = V_S$, mais ou bien $s = S$, ou bien $Y_{S-} \neq 0$, auquel cas V ne saute pas à l'instant S et on a encore $V_S = V_s$.

Il reste alors à vérifier que $Y_S^{R-} = Y_\infty I_{\{L \leq s\}}$. D'abord, sur l'ensemble $\{L \leq s\}$ on a $S = \infty = R$ et l'égalité est évidente. Sur l'ensemble $\{s < L\}$ le second membre est nul et on a $S<\infty$; Y_S^{R-} vaut Y_{S-} sur A (et il est alors nul par définition de A) et Y_S sur A^c ; dans ce dernier cas on a $S=s$ ou $S\notin \mathrm{M}$, ce qui exclut que S soit isolé à droite, donc $Y_S=0$. □

Ce théorème permet de donner de nombreux exemples de martingales relatives. D'abord, toute martingale u.i. ordinaire X est une martingale relative droite (gauche) associée à $\{X_-=0\}$ (*resp.* $\{X=0\}$ si cet ensemble est fermé). Voici trois exemples moins évidents, de martingales relatives associées à l'ensemble M des zéros d'un mouvement brownien, dans diverses filtrations. On remarquera que la théorie précédente s'applique sur tout intervalle $[0,t]$, mais que les conditions d'intégrabilité n'ont pas lieu jusqu'à l'infini.

Soit (B_t) un mouvement brownien standard issu de 0. Le premier exemple est celui de la sousmartingale $Y_t = |B_t|$, M étant l'ensemble des zéros de B et le processus croissant associé à Y étant le temps local usuel L de M. Ce processus est une martingale relative, soit dans la filtration naturelle de B, soit dans sa propre filtration naturelle (strictement plus petite).

Le second exemple est celui de la sousmartingale $Y_t = S_t - B_t$, en posant comme d'habitude $S_t = \sup_{s\leq t} B_s$; le processus croissant est dans ce cas S_t et la filtration naturelle de $Y=S-B$ est celle de B, car $S_t = \int_0^t I_{\{Y_s=0\}}\, dY_s$. Il est bien connu que le couple (Y,S) est identique en loi à un couple $(Y' = |B'|, L')$ du type du premier exemple, où B' est un mouvement brownien engendrant une filtration plus grosse que celle de Y'.

Pour le troisième exemple, on pose $G_t = \sup\{s\leq t \,:\, B_s=0\}$, et $Y_t = \sqrt{t-G_t}$. Alors on peut montrer (Azéma [2]) que Y est, *dans sa filtration naturelle, qui est celle de l'ensemble des zéros du brownien,* une sousmartingale continue à droite, dont l'ensemble des zéros est M — dans la filtration brownienne, ce n'est pas une semimartingale. Le processus croissant prévisible associé à Y, dans la petite filtration, est proportionnel au temps local brownien, et il est donc continu, et porté par M.

Martingales nulles à l'instant L

9 Nous considérons une v.a. honnête L, et nous cherchons à déterminer les martingales (ordinaires) nulles à l'instant L. Nous aurons besoin des trois tribus $\mathcal{F}_L^-$, $\mathcal{F}_L$ et $\mathcal{F}_L^+$, engendrées par les valeurs à l'instant L des processus prévisibles, optionnels et progressifs respectivement. Les deux premières tribus sont égales si L évite les t. d'a. Noter que l'ensemble $\{L=0\}$ appartient à $\mathcal{F}_L^-$.

THÉORÈME 9.1. *Soit $X_t = \mathbb{E}[X_\infty \,|\, \mathcal{F}_t]$ une martingale uniformément intégrable. Pour que X soit nulle à l'instant L sur l'ensemble $\{0<L\leq\infty\}$, il est nécessaire que*

$$\mathbb{E}[X_\infty \,|\, \mathcal{F}_L^-] = 0 \quad \text{sur } \{L>0\}, \tag{9.1}$$

et suffisant que

$$\mathbb{E}[X_\infty \,|\, \mathcal{F}_L] = 0 \quad \text{sur } \{L>0\}, \tag{9.2}$$

cette condition entraînant que X s'annule sur l'ombre M *de L.*

Les conditions (9.1) et (9.2) étant équivalentes lorsque L évite les t. d'a., on a dans ce cas une caractérisation complète des martingales nulles à l'instant L.

DÉMONSTRATION. Commençons par une remarque concernant les martingales u.i. positives (X_t). Soient σ une v.a. positive bornée, et V^σ la projection duale optionnelle du processus croissant $\sigma I_{\{0<L\leq t\}}$. On a par définition de celui-ci

$$\mathbb{E}[\sigma X_L, L>0] = \mathbb{E}[\int X_s dV_s^\sigma] = \mathbb{E}[X_\infty V_\infty^\sigma] .$$

Comme L est une fin d'optionnel, on a $V_\infty^\sigma = V_L^\sigma$, et l'on peut remplacer X_∞ par $\mathbb{E}[X_\infty \,|\, \mathcal{F}_L]$. Nous désignons cette v.a. par X'_∞ et introduisons la martingale correspondante (X'_t). On peut alors remonter les calculs

$$\mathbb{E}[X'_\infty V_\infty^\sigma] = \mathbb{E}[\int X'_s dV_s^\sigma] = \mathbb{E}[\sigma X'_L \,,\, L>0]$$

Comme σ est arbitraire, on en déduit que $X_L = X'_L$ sur $\{L>0\}$. Ce résultat s'étend alors par différence au cas d'une martingale uniformément intégrable (X_t) non nécessairement positive. Ainsi, toute martingale de la forme $X_t = \mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{F}_t]$, où X est orthogonale à $\mathcal{F}_L$ sur $\{L>0\}$, est nulle à l'instant L.

Montrons ensuite que, si (9.2) est satisfaite, X est en fait nulle sur toute l'ombre $\mathbf{M}$ de L. Soit K une v.a. honnête majorée par L ; on montre aisément que $\mathcal{F}_K \subset \mathcal{F}_L$, et par conséquent (9.2) entraîne $\mathbb{E}[X_\infty \,,\, K>0 \,|\, \mathcal{F}_K] = 0$, et à nouveau $X_K = 0$. Appliquant cela à $K = G_T$ où T est un t. d'a., on voit que $X_T = 0$ sur l'ensemble $\{T>0 \,,\, T \in \mathbf{M}\}$. D'après le théorème de section optionnel, cela entraîne que $X = 0$ sur $\mathbf{M}$.

Passons à (9.1), et supposons que X soit nulle à l'instant L. Le processus optionnel positif $|X|$ est nul p.p. pour la mesure $\varepsilon_L I_{\{L>0\}}$, donc aussi pour sa projection optionnelle dA. Soit $\mathbf{H}$ le support (fermé) de cette mesure, qui admet pour fin L. On a $X=0$ aux points isolés de $\mathbf{H}$, qui sont des sauts de A, et aussi, X étant càd., aux points de $\mathbf{H}$ non isolés à droite. On applique alors la forme habituelle (droite) de la formule de balayage (qui n'exige pas que X soit nulle sur $\mathbf{H}$ entier), d'après laquelle $H_t = Z_{g_t} X_t$ est une martingale (évidemment u.i.) pour tout processus prévisible borné Z. Soit D le début de $\mathbf{H}$; on a $X_D = 0$ sur $\{D<\infty\}$, donc

$$0 = \mathbb{E}[H_D \,,\, D \in \mathbf{H}] = \mathbb{E}[H_\infty \,,\, D \in \mathbf{H}] = \mathbb{E}[Z_L X_\infty \,,\, L>0]$$

comme Z est arbitraire, on obtient (9.1).

REMARQUE. Le résultat concernant les martingales admet une version un peu moins précise concernant les processus Y^σ : si nous posons $\sigma' = \mathbb{E}[\sigma \,|\, \mathcal{F}_L]$, le processus $V^{\sigma'}$ est (presque évidemment) égal à V^σ, et les processus Y^σ et $Y^{\sigma'}$ ne diffèrent donc que d'une martingale nulle sur l'ombre de L.

Désormais, nous allons nous intéresser surtout aux fins d'optionnels L (v.a. honnêtes), et aux martingales relatives correspondantes, qui sont du type gauche, et nulles sur toute l'ombre $\mathbf{M}$ de L. L'étude analogue pour les fins de prévisibles ne semble pas passionnante.

Martingales relatives et martingales ordinaires

10 Nous allons dans cette section grossir la filtration $\mathcal{F}_t$ à la manière de Jeulin [8] en une filtration $(\mathcal{G}_t)$ dans laquelle la v.a. honnête L devient un t. d'a.. Nous posons alors pour $t \geq 0$ $\mathcal{H}_t = \mathcal{G}_{L+t}$, et on voit aisément que $\mathcal{H}_0$ est égale à $\mathcal{F}_L^+$, tribu en général différente de $\mathcal{F}_L$.

D'après Jeulin [8], tout processus $\mathcal{G}$-optionnel est de la forme

$$UI_{]0,L[} + VI_{[L]} + WI_{]L,\infty[}$$

où U, W sont $\mathcal{F}$-optionnels, et V est $\mathcal{F}$-progressif. D'autre part, on peut imposer à W d'être nul sur l'ombre de L, et le processus est alors unique. En effet, la différence entre deux choix possibles de W est un processus $\mathcal{F}$-optionnel G nul sur $]L,\infty[$, et donc l'ensemble $\{G \neq 0\}$ est contenu dans l'ombre de L.

Soit alors $(H_t)_{t>0}$ un processus optionnel$/\mathcal{H}$; le processus $K_t = H_{t-L} I_{\{t>L\}}$ est optionnel$/\mathcal{G}$, et il existe donc un unique processus (J_t) optionnel$/\mathcal{F}$, tel que $J = K$ sur $]L,\infty]$, et nul sur l'ombre de L. Nous poserons $J = \Pi(H)$ (la notation d'Azéma–Yor [3] est $\rho(H)$). Ainsi, pour $H_t = Y^\sigma_{L+t} = y^\sigma_{L+t}$ on a $\Pi(H) = Y^\sigma$.

Nous fixons une v.a. intégrable $\xi > 0$, que nous supposons pour simplifier d'intégrale 1 (elle ne l'est pas toujours dans les applications), et introduisons la loi $\mathbb{Q} = \xi \cdot \mathbb{P}$. Nous considérons une v.a. intégrable σ, et posons $\rho = \sigma/\xi$, intégrable par rapport à $\mathbb{Q}$. Nous calculons d'après Jeulin [8] la martingale $U_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\rho \,|\, \mathcal{G}_t]$

$$U_t = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\rho I_{\{t<L\}} \,|\, \mathcal{F}_t]}{\mathbb{Q}\{t < L \,|\, \mathcal{F}_t\}} I_{\{t<L\}} + \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\rho I_{\{t \geq L\}} \,|\, \mathcal{F}_t]}{\mathbb{Q}\{t \geq L \,|\, \mathcal{F}_t\}} I_{\{t \geq L\}}$$

(la valeur sur le graphe de L se définit par un passage à la limite). Nous exprimons cela en fonction d'espérances $/\mathbb{P}$

$$\frac{\mathbb{E}[\sigma I_{\{t<L\}} \,|\, \mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}[\xi I_{\{t<L\}} \,|\, \mathcal{F}_t]} I_{\{t<L\}} + \frac{\mathbb{E}[\sigma I_{\{t \geq L\}} \,|\, \mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}[\xi I_{\{t \geq L\}} \,|\, \mathcal{F}_t]} I_{\{t \geq L\}}$$

ou enfin (avec des notations expliquées plus loin)

$$\frac{X^\sigma}{X^\xi} I_{]0,L[} + \frac{Y^\sigma}{Y^\xi} I_{[L,\infty[} \,. \tag{10.1}$$

Commençons par le second terme. Les processus qui devraient figurer ici sont les versions continues à droite Y^ξ_+, Y^σ_+ ; néanmoins, le $+$ est inutile sur $]L,\infty]$, et l'expression se définit sur le graphe de L par continuité à droite. Il est donc inutile d'alourdir la notation. Pour le premier terme, X^ξ est défini comme la version continue à droite de la surmartingale $\mathbb{E}[\xi I_{\{t<L\}} \,|\, \mathcal{F}_t]$, et on sait qu'elle ne s'annule pas sur $]0,L[$.

Nous traduisons la moitié droite de la formule dans le langage des martingales relatives associées à l'ombre M de L : celles-ci sont exactement les processus Y^σ avec $\sigma \in L^1(\mathbb{P})$, tandis que le processus (où l'on pourrait aussi bien utiliser des y^σ)

$$\eta_t = \frac{Y^\sigma_{L+t}}{Y^\xi_{L+t}} \qquad (t > 0) \tag{10.2}$$

est la martingale $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\rho \,|\, \mathcal{H}_t]$, $\rho = \sigma/\xi$ étant un élément arbitraire de $L^1(\mathbb{Q})$. Il y a donc *bijection* entre vraies martingales / $(\mathcal{H}, \mathbb{Q})$ uniformément intégrables et martingales relatives — ce qui est une autre justification pour ce nom.

REMARQUE. Notons une extension partielle de la formule du balayage aux processus progressifs (Stricker [10]). Soit Y une martingale relative droite associée à M (prévisible, contenu dans $\{Y_- = 0\}$), et soit U un processus uniformément borné, progressif, constant sur les intervalles semi-ouverts $[G_t, D_t[$ contigus à M — autrement dit, un processus du type Z_{G_t}, avec Z progressif. On se propose de montrer que le processus adapté $X = UY$ est encore une martingale relative associée à M. D'abord, X est continu à droite partout : sur les intervalles $[G_t, D_t[$ de manière évidente, et aussi aux points de $\overline{\mathrm{M}} \setminus \mathrm{G}$, car on y a $Y = Y_+ = 0$ donc $X = X_+ = 0$. Ensuite, la définition des martingales relatives s'écrit, pour $s < t$

$$Y_s = \mathbb{E}\,[Y_t I_{\{G_t \leq s\}} \,|\, \mathcal{F}_s] \ .$$

Sur tout l'intervalle contigu $[s, D_s[$ le processus U est constant, et donc on a

$$\mathbb{E}\,[X_t I_{\{G_t \leq s\}} \,|\, \mathcal{F}_s\,] = U_s\,\mathbb{E}\,[Y_t I_{\{G_t \leq s\}} \,|\, \mathcal{F}_s\,] = U_s Y_s = X_s$$

qui est la propriété désirée.

11 Voici deux conséquences importantes, la seconde desquelles est le *théorème quotient* d'Azéma–Yor [3] .

COROLLAIRE 1. *La martingale relative Y^σ s'exprime à partir de la martingale $\eta^\rho_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\rho \,|\, \mathcal{H}_t]$, où $\rho = \sigma/\xi$, par la formule*

$$Y^\sigma = Y^\xi\, \Pi(\eta) \ . \tag{11.1}$$

DÉMONSTRATION. Les deux côtés sont des processus optionnels, égaux sur $]L, \infty[$ et nuls sur l'ombre de L. □

COROLLAIRE 2. *Si Y est une martingale relative associée à L, le rapport Y_t/Y^ξ_t admet p.s. une limite à droite finie en tout point de* G.

DÉMONSTRATION. Plaçons nous d'abord à l'instant L en supposant d'abord $\sigma \geq 0$. La martingale (10.1) admet à l'instant L la limite finie $\ell = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\rho \,|\, \mathcal{G}_L]$, et reste nulle pour $t > 0$ sur l'ensemble $\{\ell = 0\}$. Revenant à la filtration $(\mathcal{F}_t)$, on voit que le rapport Y^σ_t/Y^ξ_t admet pour $t \downarrow\downarrow L$ la limite finie $\mathbb{E}\,[\sigma \,|\, \mathcal{F}^+_L] / \mathbb{E}\,[\xi \,|\, \mathcal{F}^+_L]$, cette limite étant > 0 sur l'ensemble $\{\sigma > 0\}$. On en déduit qu'un rapport de la forme

$$\frac{Y^\tau_t}{Y^\sigma_t} = \frac{\mathbb{E}\,[\tau\,,\, L < t \,|\, \mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}\,[\sigma\,,\, L < t \,|\, \mathcal{F}_t]}$$

où $\tau \in L^1(\mathbb{P})$ n'est pas nécessairement positive, admet pour $t \downarrow\downarrow L$ la limite finie $\mathbb{E}\,[\tau \,|\, \mathcal{F}^+_L] / \mathbb{E}\,[\sigma \,|\, \mathcal{F}^+_L]$ sur l'ensemble où le dénominateur est > 0. Cela constitue une agréable extension des résultats classiques connus pour les temps d'arrêt.

Soit ensuite T un temps d'arrêt / $\mathcal{F}$, et posons $\mathrm{M}' = \mathrm{M} \cap]0, T]$, dont la fin est $L' = G_T$. On peut appliquer le résultat précédent à L' et aux processus Y^σ, Y^ξ arrêtés à T. Cela entraîne que le rapport Y^σ_t/Y^ξ_t admet p.s. une limite à droite finie à l'instant

G_T sur l'ensemble $\{T \notin \mathrm{M}\}$. Autrement dit, la discussion précédente s'applique non seulement à l'instant L, mais au début de chaque excursion hors de l'ombre.

La bijection entre martingales relatives et martingales $/(\mathcal{H}, \mathbb{Q})$ a plusieurs conséquences intéressantes sur la structure des martingales relatives. En effet, toute martingale se décompose de manière unique en une martingale constante (dans le temps) et une martingale nulle à l'origine, et cela conduit à distinguer deux types de martingales relatives.

Dire que la martingale η^ρ est constante signifie que la v.a. terminale ρ est mesurable $/\mathcal{H}_0 = \mathcal{F}_L^+$. Il existe alors un processus progressif (U_t) tel que $\rho = U_L$. Montrons qu'alors le processus Y^σ $(\sigma = \rho\xi)$ peut s'écrire

$$Y_t^\sigma = U_{G_t} Y_t^\xi \; . \tag{11.2}$$

En effet, les deux membres sont égaux pour $t > L$, et nuls sur l'ombre de L. Il reste donc seulement à vérifier que le côté droit est un processus optionnel $/\mathcal{F}$, ce que nous laisserons au lecteur, avec l'indication que ce processus est nul sur M, et continu à droite sur M^c. La signification intuitive de cette formule est que les excursions de Y^σ ont la même forme que les excursions de Y^ξ, à un facteur près (de signe quelconque, éventuellement nul) qui est choisi au début de chaque intervalle contigu.

Dans l'exemple des zéros du mouvement brownien (B_t) sur $[0,1]$, avec $Y^\sigma = B$, $Y^\xi = |B|$, le processus (U_{G_t}) fixe les signes des excursions browniennes.

La nullité à l'instant initial de la martingale $/(\mathcal{H}, \mathbb{Q})$ η^ρ s'exprime sur σ par la relation $\mathbb{E}[\sigma \,|\, \mathcal{F}_L^+] = 0$. En particulier, on a $\mathbb{E}[\sigma \,|\, \mathcal{F}_L] = 0$, et *ces processus sont des martingales*$/\mathbb{P}$. Intuitivement, la nullité en 0 de la martingale associée exprime que Y^σ *tend vers* 0 *plus vite que* Y^ξ *à l'instant* L, et cette propriété ne dépend pas de ξ en vertu du théorème quotient.

Comme ci-dessus, on peut se demander si cette propriété a lieu seulement au début de la dernière excursion ou en tout point de G. A cet effet, nous arrêtons Y à un temps d'arrêt T, ce qui remplace σ par $\tau = \mathbb{E}[\sigma I_{\{L<T\}} \,|\, \mathcal{F}_T]$, et L par $K = G_T$. Or l'ensemble $\{L < T\}$ appartient à $\mathcal{F}_L$, et la relation $\mathbb{E}[\sigma \,|\, \mathcal{F}_L^+] = 0$ entraîne la même propriété pour τ. Les v.a. K, L étant honnêtes avec $K \leq L$, on a $\mathcal{F}_K^+ \subset \mathcal{F}_L^+$, et on a bien finalement $\mathbb{E}[\tau \,|\, \mathcal{F}_K^+] = 0$.

EXEMPLE (voir Jeulin [8], p. 124). Revenons au cas de l'ensemble des zéros du mouvement brownien sur $[0,u]$. La sousmartingale Y^σ correspondant à $\sigma = 1$ vaut

$$Y_t = 1 - 2\Phi(u-t, |B_t|) \quad \text{où} \quad \Phi(u,x) = \int_x^\infty \frac{dy}{\sqrt{2\pi u}} e^{-y^2/2u} \; .$$

On peut calculer le processus croissant associé en utilisant les formules d'Ito et de Tanaka : la dérivée $\Phi'_x(t,x)$ étant égale à $(-1/\sqrt{2\pi t})\, e^{-x^2/2t} = -p(t,x)$, et les autres termes disparaissant, nous avons

$$Y_t = 2\int_0^t p(u-s, |B_s|)\, d|B_s| \; .$$

La partie à variation finie vaut donc

$$dV_t = 2p(u-t, 0)\, d\Lambda_t = (2/\sqrt{2\pi(u-G_t)})\, d\Lambda_t \; .$$

D'après la formule du balayage, le processus

$$Z_t = \sqrt{(\pi/2)(u - G_t)}\,\left(1 - 2\Phi(u - t, |B_t|)\right)$$

est une sousmartingale dont le processus croissant associé est Λ, et par conséquent la différence $M = Z - |B|$ est une martingale. Il est très facile de voir qu'en chaque début d'excursion le rapport $Z_t / |B_t|$ a une limite égale à 1, donc M tend vers 0 plus vite que $|B|$ en chaque début d'excursion, et finalement *M est une martingale du second type.*

On peut faire une autre remarque intéressante. La sousmartingale $Y_t = \mathbb{P}\{L \leq t \,|\, \mathcal{F}_t\}$ est définie à partir de l'ensemble aléatoire $\mathbf{M}$ seulement, et il en est de même de Z_t ; lorsqu'on fait tendre u vers l'infini, on obtient $|B_t|$ comme limite. Ainsi, ce processus peut être reconstruit de manière naturelle à partir de l'ensemble aléatoire $\mathbf{M}$.

REMARQUE. La méthode que nous avons utilisée pour construire une martingale relative $Y \geq 0$ associée à un fermé aléatoire $\mathbf{M}$ échoue lorsque $\mathbf{M}$ est p.s. non borné. En effet, l'ombre de $L = \infty$ est $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ et non $\mathbf{M}$. Si l'on cherche à représenter $\mathbf{M}$ comme réunion d'ensembles $\mathbf{M}_n$ à fin bornée et à passer à la limite, il faut renormaliser les sousmartingales $\mathbb{P}\{t > L_n \,|\, \mathcal{F}_t\}$ qui tendent vers 0 lorsque $n \to \infty$. C'est pourquoi Azéma [2] propose de passer à la limite sur des martingales relatives $Y^n \geq 0$ dont le processus croissant soit le *temps local de* $\mathbf{M}_n$.

L'exemple précédent est une illustration de cette idée : nous avons construit par renormalisation des sousmartingales Y (qui tendent vers 0 lorsque $u \to \infty$) les sousmartingales Z, et vérifié que celles-ci ont pour limite $|B|$. Mais on ignore si ce phénomène est général, et le problème posé par Azéma n'a été résolu (en utilisant les systèmes de sortie) que dans la "filtration lente" $(\mathcal{F}_{G_t})$. On consultera à ce sujet le chapitre XX de [7].

Martingales relatives et théorème de Gilat

12 Nous allons appliquer ce qui précède à un cas particulier du *théorème de Gilat.* Celui-ci affirme que toute sousmartingale positive peut être considérée comme la valeur absolue d'une martingale définie sur un espace élargi. La démonstration originale de Gilat n'était pas constructive, mais reposait sur un argument de convergence vague à partir du cas discret. Depuis lors, d'autres démonstrations en ont été données, directement en temps continu. Nous allons en traiter ici un cas particulier en suivant Barlow dans Barlow–Yor [6]. L'idée est de transformer une sousmartingale en martingale en tirant au sort le signe de ses excursions, et ce raisonnement nous intéresse en raison de sa parenté avec la "formule du balayage". Barlow [5] a pu donner une démonstration (assez difficile) du théorème de Gilat complet en mélangeant ce cas particulier avec celui des sousmartingales strictement positives, traité par Protter–Sharpe [9].

On considère une martingale relative droite Y, et l'adhérence $\mathbf{M}$ de l'ensemble prévisible $\{Y_- = 0\}$. On désigne par (D_n) une suite de t. d'a. à graphes disjoints épuisant l'ensemble $\mathbf{D}$, et par $]\,G_n, D_n\,[$ l'énumération correspondante des intervalles contigus à $\mathbf{H}$. On peut supposer que $D^0 = D$ et, contrairement à l'habitude, on considérera l'intervalle initial $]\,0, D^0\,[$ comme un intervalle contigu à $\mathbf{M}$.

Nous allons d'abord expliquer comment on réalise un "tirage au sort au début de chaque intervalle contigu à $\mathbf{M}$".

Nous élargissons l'espace Ω en le remplaçant par $\Omega' = \Omega \times W$, où $W = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, les applications coordonnées sur Ω' étant notées π et ξ^n. Comme d'habitude, on identifie une v.a. f sur Ω à la v.a. $f \circ \pi$ sur Ω' sans changer de notation, et la tribu $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{F}_t$ se transporte sur Ω'. La loi de probabilité sur Ω' est $\mathbb{P} \otimes \mu^{\mathbb{N}}$ où μ est une loi de probabilité admettant un moment du premier ordre égal à 0 — le cas particulier traité par Barlow consistant à prendre pour μ une loi de Bernoulli symétrique.

On appelle $\mathcal{G}_t$ la tribu sur Ω' engendrée par $\mathcal{F}_t$ et par toutes les v.a. $\xi^m I_{\{D^m \leq t\}}$. On définit encore la tribu plus grosse $\mathcal{H}_t$ par adjonction de la v.a. correspondant à l'excursion enjambant t, c'est à dire

$$U_t = \sum \xi^n I_{\{G^n \leq t < D^n\}} \, .$$

Nous laisserons le lecteur vérifier que l'on définit bien ainsi deux filtrations; on ignore si elles sont continues à droite, mais peu importe.

Voici la remarque essentielle. Soit φ une fonction borélienne sur $\mathbb{R}$, bornée pour commencer. On a

$$\mathbb{E}\left[\varphi(U_t) \,|\, \mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{G}_t\right] = \mu(\varphi) \, . \tag{12.1}$$

En effet, on a pour n fixé

$$\mathbb{E}\left[\varphi(\xi^n) I_{\{G^n \leq t < D^n\}} \,|\, \mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{G}_t\right] = \mu(\varphi) \mathbb{P}\{G^n \leq t < D^n \,|\, \mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{G}_t\} = \mu(\varphi) I_{\{G^n \leq t < D^n\}}$$

car la trace sur $\{G^n \leq t < D^n\} \in \mathcal{F}_\infty$ de $\mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{G}_t$ est contenue dans la tribu, indépendante de ξ^n, $\mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{T}(\xi^m, m \neq n)$. En sommant sur n on obtient (12.1).

Appliquant cela au calcul de $\mathbb{E}\left[f g_t \varphi(U_t)\right]$, où les trois fonctions sont bornées, f est mesurable $/\mathcal{F}_\infty$ et g_t mesurable $/\mathcal{G}_t$, on montre aisément que

$$\mathbb{E}\left[f \,|\, \mathcal{H}_t\right] = \mathbb{E}\left[f \,|\, \mathcal{F}_t\right]$$

et cela s'étend à la filtration $(\mathcal{H}_t)$ rendue continue à droite (nous ne changerons pas de notation). Il en résulte en particulier que Y reste une martingale relative associée à M dans la nouvelle filtration.

D'après l'extension de la formule de balayage à la fin du n° 8, il en est de même pour $X = UY$. Pour montrer que X est une martingale $/\mathcal{H}$, il suffit alors de montrer que pour $s < t$

$$\mathbb{E}\left[X_t I_{\{G_t > s\}} \,|\, \mathcal{H}_s\right] = 0 \, .$$

Or nous avons $X_t = \varphi(U_t) Y_t$, φ étant l'application identique de $\mathbb{R}$, et sur l'ensemble $\{G_t > s\} \in \mathcal{F}_\infty$ la tribu $\mathcal{H}_s$ est contenue dans $\mathcal{G}_t$, car l'excursion en cours à l'instant s est achevée à l'instant t. On applique alors (12.1) et on voit que l'on obtient bien une martingale.

Remarque. Ce procédé a d'autres applications. On peut par exemple prendre pour Y la valeur absolue d'un mouvement brownien, et pour μ une loi de probabilité sur le plan, de moyenne nulle. On obtient alors une martingale plane qui lance les excursions browniennes dans des directions aléatoires autour de l'origine. Ces martingales ont été introduites par Walsh dans *Temps Locaux* (Azéma–Yor [4], p. 37–45), et leur filtration fait l'objet d'une étude de Barlow, Pitman et Yor dans *Sém. Prob. XXIII*.

RÉFÉRENCES.

AZÉMA (J.) [1]. Quelques applications de la théorie générale des processus, *Inv. Math.,* **18**, 1972, p. 293–336.

AZÉMA (J.) [2]. Sur les fermés aléatoires, *Sém. Prob. XIX,* LN **1123**, 1985, p. 397-495.

AZÉMA (J.) et YOR (M.) [3]. Sur les zéros des martingales continues, ce volume.

AZÉMA (J.) et YOR (M.) [4]. *Temps Locaux* (ouvrage collectif), *Astérisque*, **52-53**, Soc. Math. de France 1976.

BARLOW (M.T.) [5]. Construction of a martingale with given absolute value, *Ann. Prob.,* **9**, 1981, p. 314-320.

BARLOW (M.T.) et YOR (M.) [6]. Sur la construction d'une martingale continue de valeur absolue donnée, *Sém. Prob. XIV,* LN **784**, 1980, p. 62-75.

DELLACHERIE (C.), MAISONNEUVE (B.) et MEYER (P.A.) [7]. *Probabilités et Potentiels E, Chap. XVII à XXI,* Hermann, Paris, 1992.

JEULIN (T.) [8]. *Semimartingales et grossissement d'une filtration,* Springer Lecture Notes in M., **833**, 1980.

PROTTER (Ph.) et SHARPE (M.J.) [9]. Martingales with given absolute value, *Ann. Prob.,* **7**, 1979, p. 1056-1058.

STRICKER (C.) [10]. Semimartingales et valeur absolue, *Sém. Prob. XIII,* LN **721**, 1979, p. 472-477.

Note sur les épreuves. Une partie des résultats de ce travail ont été étendus par M.A. Zanoun au cas de fermés droits aléatoires.