Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Dominique Bakry
Dominique Michel

Sur les inégalités FKG

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 170-188
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__170_0>

Sur les inégalités FKG.

Dominique Bakry et Dominique Michel

Laboratoire de Statistique et Probabilités, Université PAUL SABATIER,
118, route de Narbonne, 31062, TOULOUSE Cedex.

0— Introduction.

Les inégalités de corrélation dont nous allons parler ici sont des outils qui ont été développés dans le cadre de l'étude de la mécanique statistique des systèmes de spins sur $\{-1,+1\}$. Il s'agit en fait de propriétés de certaines mesures sur $\{-1,+1\}^{S}$, où S est un ensemble fini. Nombre d'entre elles ont été généralisées à des situations plus compliquées.

Ces inégalités de corrélation sont des outils essentiels pour l'étude des mesures de GIBBS associés à des hamiltoniens ferromagnétiques. En particulier, l'inégalité de FORTUIN, KASTELYN et GINIBRE (inégalité FKG), joue un rôle essentiel, tant pour construire des mesures de GIBBS par des procédés limites que pour caractériser l'unicité de cette mesure. Dans les systèmes de spins, elle assure que, sous une mesure associée à un hamiltonien attractif, la corrélation de deux fonctions croissantes est positive.

D'autres inégalités de corrélation jouent un grand rôle dans l'étude de la façon dont les diverses variables macroscopiques de la mécanique statistique (magnétisation, énergie) varient en fonction des paramètres. Parmi celles-ci, citons les inégalités de GRIFFITH, KELLY, et SHERMAN (inégalités GKS), dont nous ne parlerons pas ici, ainsi que l'inégalité de GRIFFITH, HURST et SHERMAN (inégalité GHS), qui exprime que la corrélation triple des spins associés à trois points distincts est négative, moyennant des conditions assez restrictives sur le hamiltonien. Cette dernière inégalité est essentielle pour étudier les propriétés de la fonction magnétisation, et demeure à nos yeux assez mystérieuse.

On peut trouver dans les livres de ELLIS [*El*] ou de PRUM [*Pru*] des démonstrations élémentaires de ces inégalités. La méthode que nous utilisons ici repose sur l'utilisation de semigroupes markoviens symétriques judicieusement choisis. L'utilisation de tels semigroupes pour obtenir des inégalités de corrélation a été initialisée par HOLLEY [*H*] :

sa méthode utilisant le couplage est exposée dans le livre de LIGETT [L]. La démarche que nous proposons ici repose sur l'introduction d'opérateurs de dérivations partielles D_i, et n'utilise en fait pas la structure d'ordre de l'espace sur lequel nous travaillons: une fonction f est croissante si les fonctions $D_i f$ sont positives. De même, la notion d'attractivité du hamiltonien s'exprime également en termes des opérateurs D_i. Ainsi, un autre choix des D_i pourrait donner d'autres inégalités de corrélation, non liées à une structure d'ordre. Nous avons essayé d'utiliser cette idée pour obtenir les inégalités GKS, mais nous n'y sommes pas arrivés.

Ce papier est organisé de la façon suivante: dans une première partie, nous exposons notre méthode dans le cas le plus simple, qui est celui de $\mathcal{R}^n$, muni de la mesure gaussienne(*). Nous montrons alors comment la même démarche s'étend à d'autre types de mesures sur $\mathcal{R}^n$. Dans la seconde partie, nous utilisons le même formalisme pour obtenir l'inégalité FKG classique sur les système de spins. Puis, dans une troisième partie, nous montrons comment généraliser cette méthode pour obtenir des inégalités du type GHS. En fait, le résultat que nous obtenons est assez décevant dans ce cadre: notre méthode ne permet pas d'obtenir les inégalités GHS dans tous les cas, bien qu'elle puisse s'étendre à des hamiltoniens plus généraux que ceux considérés dans [GHS].

1— L'inégalité FKG dans $\mathcal{R}^n$.

Nous commençons par exposer l'inégalité FKG dans le cas le plus simple, qui est celui de $\mathcal{R}^n$, muni d'une mesure gaussienne. Elle peut alors s'énoncer de la manière suivante:

nous dirons qu'une fonction f définie sur $\mathcal{R}^n$ est croissante si, pour tout couple de points $x = (x_i)$ et $y = (y_i)$, on a

$$\{\forall i,\ x_i \leq y_i\} \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(y).$$

(*) Une démonstration élémentaire en a été donnée par KAHANE dans ce cas.

Théorème 1.1.—*Soit* (J_{ij}) *une matrice symétrique réelle* $n\times n$ *dont tous les coefficients* J_{ij} *sont positifs, pour* $i\neq j$, *et telle que la forme quadratique* $Q(x)=\sum_{ij}J_{ij}x^ix^j$ *soit définie négative. Soit* μ *la mesure de probabilité*

$$\mu(dx)=\frac{\exp(Q(x))}{Z}\,dx,$$

où dx *désigne la mesure de* LEBESGUE *sur* $\mathcal{R}^n$, *et* Z *la constante de normalisation.*

Alors, si f *et* g *sont deux fonctions croissantes de carré intégrable par rapport à la mesure* μ, *elles sont positivement corrélées :*

$$\int f(x)g(x)\,\mu(dx)\geq\int f(x)\,\mu(dx)\int g(x)\,\mu(dx).$$

Preuve. Pour le prouver, on peut se ramener immédiatement au cas où f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, bornées avec des dérivées premières bornées. Dans ce cas, l'hypothèse se traduit par

$$\forall i,\ \frac{\partial f}{\partial x_i}\geq 0\,;\ \frac{\partial g}{\partial x_i}\geq 0.$$

Introduisons le semigroupe d'ORNSTEIN-UHLENBECK associé à la mesure μ : c'est le semigroupe markovien $(\mathbf{P}_t)_{t\geq 0}$, symétrique par rapport à la mesure μ, et de générateur

$$\mathbf{L}=\sum_i\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\sum_{i,j}J_{ij}x_j\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Nous avons, pour toute fonction borélienne bornée h, $\mathbf{P}_0(h)=h$ et $\mathbf{P}_\infty(h)=\int h\,d\mu$. Nous nous servirons en outre des deux propriétés suivantes du semigroupe $(\mathbf{P}_t)$:

1— Pour toute fonction f borélienne et bornée, et pour tout $t>0$, $\mathbf{P}_t(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et
$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}_tf=\mathbf{L}\mathbf{P}_tf.$$

2— Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, de carré intégrable ainsi que $L(f)$ et $L(g)$, alors
$$\int\mathbf{L}(f)g\,d\mu=\int\mathbf{L}(g)f\,d\mu=-\int\nabla f.\nabla g\,d\mu,$$
où $\nabla f.\nabla g=\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}$.

Nous pouvons alors écrire

$$\int fg\,d\mu-\int f\,d\mu\int g\,d\mu=-\int_0^\infty\frac{d}{dt}\{\int\mathbf{P}_t(f)\,g\,d\mu\}\,dt.$$

L'intervertion des signes de dérivation et d'intégration ne pose aucun problème, et nous obtenons

$$\int fg\,d\mu-\int f\,d\mu\int g\,d\mu=-\int_0^\infty\{\int\mathbf{L}\mathbf{P}_t(f)\,g\,d\mu\}\,dt=\int_0^\infty\{\int\nabla\mathbf{P}_t(f).\nabla g\,d\mu\}\,dt.$$

Supposons que nous ayons montré que, pour toute fonction f croissante et de classe $\mathcal{C}^1$, $\mathbf{P}_t f$ est encore une fonction croissante. Nous aurons alors, pour f et g croissantes $\nabla \mathbf{P}_t f . \nabla g \geq 0$, et donc $\int fg \, d\mu - \int f \, d\mu \int g \, d\mu \geq 0$, ce qui est le résultat annoncé.

Ceci fait l'objet du lemme suivant :

Lemme 1.2.—*Sous les hypothèses du théorème et avec les notations qui précèdent, si f est croissante, il en va de même de $\mathbf{P}_t f$.*

Preuve. Tout repose sur l'observation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{L} = \mathbf{L}\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_j J_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Sur l'espace produit $\mathcal{R}^n \times \{1, \cdots, n\}$, introduisons la fonction

$$F(x,i,t) = \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{P}_t f(x).$$

C'est une fonction bornée, comme on peut le voir en écrivant la forme explicite du semigroupe $\mathbf{P}_t$. Elle est solution de l'équation

$$\begin{cases} F(x,i,0) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\,; \\ \frac{\partial}{\partial t}F(x,i,t) = \hat{\mathbf{L}}F(x,i,t), \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\hat{\mathbf{L}}G(x,i) = \mathbf{L}_x G(x,i) + \sum_j J_{ij}G(x,j)$, formule qui peut s'écrire de façon plus succinte, sur l'espace produit, sous la forme

$$\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L}\otimes I + I \otimes J,$$

où J est un opérateur qui opère sur l'espace $\{1, \cdots, n\}$ par $JG(i) = \sum_j J_{ij}G(j)$. Soit $(M_{ij}(t))$ la matrice $\exp(tJ)$. Sous les hypothèses sous lesquelles nous nous sommes placées, la matrice $M(t)$ a tous ses coefficients positifs. (Il s'agit là d'un exercice élémentaire sur les matrices à coefficients positifs en dehors de la diagonale.) Or, il n'est pas difficile de voir que la seule solution à l'équation (1.1) qui soit bornée est

$$F(x,i,t) = \exp(t\hat{\mathbf{L}})F(x,i,0) = \sum_j M_{ij}(t)\mathbf{P}_t F(x,j,0).$$

Ceci revient à dire que

$$\exp(t(\mathbf{L}\otimes I + I\otimes J)) = \exp(t\mathbf{L})\otimes\exp(tJ).$$

Le semigroupe $\mathbf{P}_t$ préservant la positivité des fonctions, et la matrice $M(t)$ étant à coefficients positifs, la positivité de la fonction $F(x,i,0)$ entraîne donc celle de $F(x,i,t)$.
□

La méthode que nous avons exposée s'étend sans trop de difficultés à d'autre mesures sur $\mathcal{R}^n$ que la mesure gaussienne. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.3.—*Soit $H(x)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{R}^n$, ayant toutes ses dérivées bornées jusqu'à l'ordre 2, telle que* $\exp H(x)$ *soit intégrable pour la mesure de* LEBESGUE *et telle que, pour $i \neq j$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(H) \geq 0$. Désignons par μ la mesure de probabilité $\mu(dx) = \exp H(x)/Z\, dx$, où Z est une constante de normalisation. Alors, si deux fonctions f et g sont croissantes et de carré intégrable pour la mesure μ, elles sont positivement corrélées.*

Preuve. Il n'y a pas grand chose à changer à la démonstration précédente. Tout d'abord, nous nous ramenons au cas où la fonction H est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et où les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, bornées et de premières dérivées bornées. À la place du semigroupe d'ORNSTEIN-UHLENBECK, introduisons le semigroupe markovien $\mathbf{P}_t$ de générateur

$$\mathbf{L} = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}(H)(x) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Le fait que la fonction H ait ses dérivées secondes bornées entraîne qu'il n'y a aucune difficulté quant à la définition du semigroupe, ainsi que sur son caractère autoadjoint par rapport à la mesure μ. Les propriétés (1) et (2) du semigroupe restent vérifiées, si l'on remplace la mesure gaussienne du théorème précédent par la mesure μ.

La formule de commutateur donne maintenant

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{L} = \mathbf{L}\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(H)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Appelons comme plus haut $\hat{\mathbf{L}}$ l'opérateur défini sur $\mathcal{R}^n \times \{1, \cdots, n\}$ par

$$\hat{\mathbf{L}}G(x,i) = \mathbf{L}_x G(x,i) + \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} H(x) G(x,j),$$

et posons $F(x,i,t) = \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{P}_t f(x)$. On a

$$F(x,i,0) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\,; \ \frac{\partial}{\partial t}F(x,i,t) = \hat{\mathbf{L}}F(x,i,t), \tag{1.2}$$

Il n'est pas difficile de voir que, les fonctions $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}H(x)$ étant bornées, les fonctions $F(x,i,t)$ sont bornées.(*) Il ne nous reste plus qu'à observer que toute solution bornée de l'équation (1.2) est positive si sa valeur initiale est positive. (Cela revient à dire que le semigroupe $\hat{\mathbf{P}}_t = \exp t\hat{\mathbf{L}}$ préserve la positivité des fonctions.) Cela repose sur le lemme suivant :

(*) En fait, ce n'est pas indispensable; nous aurions pu travailler sur $\mathbf{L}^2(\mu)$, mais cela aurait compliqué un peu la rédaction du lemme qui suit.

Lemme 1.4.—*Soit $\mathbf{P}_t$ un semigroupe markovien symétrique par rapport à une mesure de probabilité μ sur un espace mesuré $(E, \mathcal{E}, \mu)$, de générateur $\mathbf{L}$. Soit $(M_{ij}(x))$ une matrice symétrique de fonctions boréliennes bornées sur E, telle que $M_{ij}(x) \geq 0$, pour tout $i \neq j$. Si $F(x,i,t)$ est une fonction définie sur $E \times \{1, \cdots, n\} \times \mathcal{R}_+$ solution, au sens de $\mathbf{L}^2(\mu)$, de l'équation*

$$\frac{\partial}{\partial t} F(x,i,t) = \mathbf{L}_x F(x,i,t) + \sum_j M_{ij}(x) F(x,j,t), \tag{1.3}$$

et si $F(x,i,0)$ est positive, il en va de même de $F(x,i,t)$.

Preuve. C'est dans ce lemme que réside la principale différence avec ce qui précède, car dans ce cas, nous n'avons pas, comme plus haut, d'expression explicite pour le semigroupe $\hat{\mathbf{P}}_t$: en effet, dans ce cas, les fonctions M_{ij} dépendent de x, et le semigroupe $\hat{\mathbf{P}}_t$ n'est pas un produit tensoriel. Pour simplifier les notations, nous noterons $\langle f \rangle$ à la place de $\int f \, d\mu$. De même, nous noterons $F_i(t)$ la fonction $x \to F(x,i,t)$, en omettant la variable x.

L'idée de la démonstration est de prouver que, si F est solution de (1.3), on a

$$\forall t \in \mathcal{R}_+, \ \sum_i \langle |F_i(t)| \rangle \leq \sum_i \langle F_i(t) \rangle.$$

Ceci entraîne évidemment que $|F| = F$, et donc que F est positive.

Pour cela, nous nous servons de la convexité de la fonction $|x|$, que l'on approche par des fonctions convexes régulières. D'autre part, on se servira du fait que $\hat{\mathbf{L}}$ est presque un générateur de Markov.

On se ramène d'abord au cas où M est une matrice markovienne en posant $\hat{M}_{ij} = M_{ij}$, si $i \neq j$, et $\hat{M}_{ii} = -\sum_{j \neq i} M_{ij}$. Posons $R_i(x) = \sum_j M_{ij}(x)$. L'équation (1.3) s'écrit alors

$$\frac{\partial F_i}{\partial t}(t) = (\mathbf{L}_x + R_i) F_i(t) + \sum_j \hat{M}_{ij} F_j(t).$$

Quitte à remplacer F par $exp(-\lambda t)F$, nous pouvons toujours supposer que $R_i(x) \leq 0$. Soit alors Φ une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^2$. (On prendra par la suite $\Phi(x) = \sqrt{x^2 + \varepsilon}$.) Nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_i \langle \Phi(F_i(t)) \rangle = \sum_i \langle \Phi'(F_i(t)) \{ (\mathbf{L}_x + R_i) F_i(t) + \sum_j \hat{M}_{ij} F_j(t) \} \rangle,$$

les dérivations sous le signe somme étant justifiées par nos hypothèses.

Tout d'abord, occupons nous du terme $\sum_i \langle \Phi'(F_i) \mathbf{L} F_i \rangle$. Soit F une fonction du domaine de $\mathbf{L}$. La fonction Φ étant convexe et le semigroupe $\mathbf{P}_t$ markovien, on peut écrire $\Phi(\mathbf{P}_t F) \leq \mathbf{P}_t(\Phi(F))$, ce qui donne, en dérivant cette inégalité en $t = 0$, $\Phi'(F)\mathbf{L}F \leq \mathbf{L}\Phi(F)$. Maintenant, la mesure μ étant invariante pour le semigroupe, on a $\langle \mathbf{L}\Phi(F) \rangle = 0$. On en déduit donc que, pour toute fonction F du domaine, $\langle \Phi'(F)\mathbf{L}F \rangle \leq 0$. Il ne reste qu'à appliquer l'inégalité précédente à chacun des termes de la somme.

Ensuite, nous avons

$$\sum_{i,j} \Phi'(F_i)\hat{M}_{ij}F_j = -1/2 \sum_{i\neq j} \hat{M}_{ij}\{F_i - F_j\}\{\Phi'(F_i) - \Phi'(F_j)\},$$

ceci parce que, pour tout i, $\sum_j \hat{M}_{ij} = 0$. Maintenant, la fonction Φ étant convexe, nous avons $\{F_i - F_j\}\{\Phi'(F_i) - \Phi'(F_j)\} \geq 0$. Pour $i \neq j$, il en va de même de $\hat{M}_{ij} = M_{ij}$: le second terme de la somme est donc également négatif.

Finalement, il reste

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_i \langle \Phi(F_i(t)) \rangle \leq \sum_i \langle \Phi'(F_i(t))R_i(x))F_i \rangle.$$

D'autre part, et pour les mêmes raisons, nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_i \langle F_i(t) \rangle = \sum_i \langle R_i(x))F_i \rangle.$$

Il vient donc

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_i \langle \Phi(F_i(t)) - F_i(t) \rangle \leq \sum_i \langle \Psi(F_i(t))R_i(x)) \rangle,$$

où Ψ désigne la fonction $x\Phi' - x$.

Appliquons ceci avec la fonction $\Phi(x) = \sqrt{x^2 + \varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Nous avons alors $\Psi(x) \geq -\varepsilon^{1/2}c^{3/2}$ où $c = (\sqrt{5} - 1)/2$. Les fonctions R_i étant négatives, nous obtenons, après intégration entre 0 et t,

$$\sum_i \langle \Phi(F_i(t)) - F_i(t) \rangle \leq \sum_i \langle \Phi(F_i(0)) - F_i(0) \rangle - c\varepsilon^{1/2} t \sum_i \langle R_i \rangle.$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre ε vers 0 pour obtenir le résultat, puisque $|F_i(0)| = F_i(0)$.
$\square$

2— Inégalité FKG sur les systèmes de spins.

Nous nous intéressons maintenant au cas où $\mathcal{R}^n$ est remplacé par l'espace $\Omega = \{-1, +1\}^S$, où S est un ensemble fini. (En mécanique statistique, S représente l'espace des sites et $\{-1, +1\}$ l'espace des phases.) Un point ω de Ω est défini par ses coordonnées ω_i, $i \in S$, que nous considérerons comme des applications $\Omega \to \mathcal{R}$. La mesure uniforme sur Ω, qui jouera le rôle que jouait la mesure de LEBESGUE dans $\mathcal{R}^n$ est celle qui fait des coordonnées des variables aléatoires de BERNOUILLI indépendantes :

$$d\omega = \otimes_{i\in S}(\frac{\delta_{-1} + \delta_{+1}}{2}).$$

Nous munissons Ω d'un ordre partiel en posant

$$\omega \leq \omega' \Leftrightarrow \forall i \in S,\ \omega_i \leq \omega'_i.$$

Cet ordre fait de Ω un treillis et nous noterons $\omega \wedge \omega'$ et $\omega \vee \omega'$ pour les sup et inf de ω et ω' respectivement.

Nous dirons qu'une fonction $f\ : \Omega \to \mathcal{R}$ est croissante si

$$\omega \leq \omega' \Rightarrow f(\omega) \leq f(\omega'),$$

et qu'une fonction $H\ : \Omega \to \mathcal{R}$ est attractive si

$$\forall(\omega, \omega') \in \Omega^2,\ H(\omega \wedge \omega') + H(\omega \vee \omega') \geq H(\omega) + H(\omega').$$

L'inégalité FKG s'énonce alors ainsi

Théorème 2.1.—*Soit H une fonction attractive sur Ω et soit μ la mesure de probabilité $d\mu(\omega) = \exp(H)/Z\, d\omega$, où Z est une constante de normalisation. Alors, si f et g sont deux fonctions croissantes sur Ω, elles sont positivement corrélées pour la mesure μ :*

$$\int fg\, d\mu \geq \int f\, d\mu \int g\, d\mu.$$

En mécanique statistique, la fonction H du théorème précédent s'appelle le hamiltonien. C'est ainsi que nous la désignerons dans la suite.

Pour comprendre l'analogue complet qu'il y a entre cette situation et la précédente, nous allons introduire sur Ω l'équivalent des opérateurs de dérivation partielle $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ et de l'opérateur $\mathbf{L}$.

Pour $i \in S$, appelons τ_i l'application $\Omega \to \Omega$ telle que

$$\tau_i(\omega)_i = -\omega_i\ ;\ \tau_i(\omega)_j = \omega_j,\ \forall i \neq j.$$

(τ_i est l'opération qui change le signe du spin de ω au site i.) Nous ferons opérer également τ_i sur les fonctions en posant $\tau_i(f)(\omega) = f(\tau_i\omega)$. Cela nous permet d'introduire les opérateurs $\nabla_i = \tau_i - I$, agissant sur les fonctions $f : \Omega \to \mathcal{R}$. Maintenant, si f et g sont deux fonctions réelles définies sur Ω, nous noterons $\nabla f.\nabla g$ la quantité $\sum_{i\in S} \nabla_i f \nabla_i g$. L'opérateur qui va jouer le rôle de $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ est alors l'opérateur

$$D_i(f)(\omega) = -\omega_i \nabla_i(f)(\omega).$$

Pour comprendre d'où vient cette définition, il suffit de remarquer que, pour toute fonction f, $\nabla(\omega_i).\nabla(f) = 2D_i(f)$; nous avons enlevé le facteur 2 dans la définition de D_i pour simplifier les calculs ultérieurs. Remarquons aussi que toute fonction $f\ : \Omega \to \mathcal{R}$ s'écrit de façon unique sous la forme $f(\omega) = A + \omega_i B$, où les fonctions A et B ne dépendent pas de la variable ω_i. (Ce sont des fonctions définies sur $\{-1, +1\}^{S\setminus i}$.) Alors, $D_i f = 2A$, et ne dépend pas de la variable ω_i.

Le lien entre les opérateurs D_i et les fonctions croissantes et attractives est donné par le résultat suivant :

Lemme 2.2.—
1— Une fonction f est croissante si et seulement si

$$\forall i \in S,\ D_i(f) \geq 0.$$

2— Une fonction H est attractive si et seulement si

$$\forall (i,j) \in S^2,\ i \neq j,\ D_iD_jH \geq 0.$$

Preuve. Pour prouver la première assertion, montrons d'abord que si f est croissante, $D_if \geq 0$. Si $\omega_i = +1$, $\tau_i(\omega) \leq \omega$, et donc $\nabla_i f(\omega) \leq 0$, tandis que, si $\omega_i = -1$, $\tau_i(\omega) \geq \omega$ et $\nabla_i f(\omega) \geq 0$. $\nabla_i f$ est donc toujours du signe de $-\omega_i$, c'est ce qu'on voulait voir.

Pour montrer la réciproque, il suffit de remarquer que, si $\omega \leq \omega'$, on peut toujours trouver une suite de points de Ω: $(\omega_0 = \omega \leq \omega_1 \leq \cdots \leq \omega_n = \omega')$ telle que deux points consécutifs de la suite ne diffèrent qu'en un site au plus. Pour montrer que f est croissante, on peut donc se ramener à démontrer que $f(\omega) \leq f(\omega')$, dans le cas où $\omega \leq \omega'$ sont deux points distincts tels qu'il existe un site $i \in S$ tel que $\omega' = \tau_i(\omega)$, ce qui implique que $\omega_i = -1$. Dans ce cas, $f(\omega') - f(\omega) = \nabla_i f(\omega) = D_i f(\omega) \geq 0$.

Pour la seconde assertion, montrons d'abord que, si la fonction H est attractive, et si i et j sont deux points distincts, alors $D_iD_jH(\omega) \geq 0$ en tout point ω de Ω. Or, si $i \neq j$, $D_iD_j = D_jD_i = \omega_i\omega_j\nabla_i\nabla_j$. Il suffit donc de démontrer que l'expression

$$\nabla_i\nabla_j(H)(\omega) = H(\tau_i\tau_j\omega) - H(\tau_i\omega) - H(\tau_j\omega) + H(\omega)$$

est du signe de $\omega_i\omega_j$. Si $\omega_i\omega_j \leq 0$, les points $\tau_i\omega$ et $\tau_j\omega$ sont les points $\omega \wedge \tau_i\tau_j\omega$ et $\omega \vee \tau_i\tau_j\omega$, dans cet ordre ou dans l'autre, selon les valeurs respectives de ω_i et ω_j. Il suffit donc d'appliquer la définition de l'attractivité à ω et $\omega' = \tau_i\tau_j\omega$ pour obtenir $\nabla_i\nabla_jH(\omega) \leq 0$. De même, si $\omega_i\omega_j \geq 0$, ω et $\tau_i\tau_j\omega$ sont les inf et sup de $\tau_i\omega$ et $\tau_j\omega$, dans cet ordre ou dans l'autre. Dans ce cas, il suffit d'appliquer la définition de l'attractivité aux points $\tau_i\omega$ et $\tau_j\omega$.

Réciproquement, montrons qu'une fonction H satisfaisant $D_iD_jH \geq 0$ pour tout couple de points distincts de S i et j vérifie $H(\omega \vee \omega') + H(\omega \wedge \omega') \geq H(\omega) + H(\omega')$. Si $\omega \leq \omega'$ ou $\omega' \leq \omega$, il n'y a rien à démontrer. Dans les autres cas, numérotons $(i_1, \cdots, i_k)$ les sites i où $\omega_i = -1$ et $\omega'_i = +1$, ainsi que $(j_1, \cdots, j_l)$ les sites j où $\omega_j = +1$ et $\omega'_j = -1$. Appelons alors ω_{pq} la configuration $\tau_{i_1} \cdots \tau_{i_p}\tau_{j_1} \cdots \tau_{j_q}\omega$, avec $0 \leq p \leq k$ et $0 \leq q \leq l$, et la convention $\tau_{i_0} = \tau_{j_0} = Id$. Ainsi, nous avons $\omega_{00} = \omega$, $\omega_{kl} = \omega'$, $\omega_{0l} = \omega \wedge \omega'$, et $\omega_{k0} = \omega \vee \omega'$. Nous en déduisons la formule

$$H(\omega \vee \omega') + H(\omega \wedge \omega') - H(\omega) - H(\omega') =$$
$$\sum_{p=0}^{k-1}\sum_{q=0}^{l-1}\{H(\omega_{p+1,q+1}) - H(\omega_{p+1,q}) - H(\omega_{p,q+1}) + H(\omega_{p,q})\}.$$

D'autre part, les configurations ω_{pq} et $\omega_{p+1,q+1}$ ne diffèrent qu'en deux sites, tandis que $\omega_{p+1,q} = \omega_{pq} \vee \omega_{p+1,q+1}$ et $\omega_{p,q+1} = \omega_{pq} \wedge \omega_{p+1,q+1}$.

On est donc ramené à vérifier la propriété d'attractivité dans le cas d'un couple (ω, ω') pour lequel il existe deux points i et j de S tels que $\omega' = \tau_i \tau_j \omega$, $\tau_i \omega$ et $\tau_j \omega$ représentant $\omega \wedge \omega'$ et $\omega \vee \omega'$ respectivement. Dans ce cas, la propriété d'attractivité découle directement de l'hypothèse $D_i D_j H \geq 0$. □

Avec ce lemme, la démonstration du paragraphe précédent peut se recopier mot pour mot, à condition toutefois d'introduire l'opérateur $\mathbf{L}$, générateur d'un semigroupe markovien $\mathbf{P}_t$ sur Ω, symétrique par rapport à la mesure μ. Nous allons voir plus bas qu'en fait nous avons un vaste choix, mais pour l'instant, nous allons partir de la formule

$$\int \mathbf{L} f g \, d\mu = \int f \mathbf{L} g \, d\mu = -\int \nabla f . \nabla g \, d\mu.$$

Si l'on veut que cette formule soit valable pour tout couple de fonctions f et g sur Ω, cela nous donne

$$\mathbf{L}(f) = \sum_{i \in S} (1 + \exp(\nabla_i H)) \nabla_i(f).$$

(Cette formule est une conséquence immédiate de ce que, pour la mesure uniforme $d\omega$, l'opérateur τ_i est autoadjoint.)

Cet opérateur $\mathbf{L}$ est le générateur d'un semigroupe de MARKOV $\mathbf{P}_t = \exp(t\mathbf{L})$ sur Ω, symétrique par rapport à la mesure μ, et vérifiant, comme dans le paragraphe précédent, et pour toute fonction f définie sur Ω,

$$\mathbf{P}_0 f = f; \ \mathbf{P}_\infty(f) = \lim_{t \to \infty} \mathbf{P}_t f = \int f \, d\mu.$$

Nous pouvons dès lors écrire comme plus haut

$$\int fg \, d\mu - \int f \, d\mu \int g \, d\mu = -\int_0^\infty \{ \int \mathbf{L}\mathbf{P}_t(f) \, g \, d\mu \} \, dt = \int_0^\infty \{ \int \nabla \mathbf{P}_t(f) . \nabla g \, d\mu \} \, dt.$$

Maintenant, on a, pour tout couple de fonctions f et g sur Ω,

$$\nabla f . \nabla g = \sum_{i \in S} D_i f D_i g,$$

si bien que, pour obtenir l'inégalité FKG, il suffit de vérifier que, si une fonction f est croissante, il en va de même de $\mathbf{P}_t f$. Pour cela, nous considérons la fonction $F(\omega, i, t)$ définie sur $\Omega \times S \times \mathcal{R}_+$ par

$$F(\omega, i, t) = D_i \mathbf{P}_t f(\omega);$$

elle est solution du système

$$F(\omega, i, 0) = D_i f(\omega) \geq 0; \ \frac{\partial}{\partial t} F(\omega, i, t) = \hat{\mathbf{L}} F(\omega, , i, t),$$

où $\hat{\mathbf{L}}$ est un opérateur sur $\Omega \times S$ que nous allons calculer plus bas. On a donc

$$F(\omega, i, t) = \exp(t\hat{\mathbf{L}}) F(\omega, i, 0),$$

et il suffit comme plus haut de verifier que l'opérateur $\exp(t\hat{\mathbf{L}})$ préserve la positivité. Or, nous travaillons ici sur un espace fini. Un opérateur $\mathbf{L}$ agissant sur un espace fini X se représente par une matrice $L(x,x')$ de telle façon que $\mathbf{L}f(x) = \sum_{x'\in X} L(x,x')f(x')$. Évidemment, le semigroupe $\mathbf{P}_t$ se représente alors par la matrice $\exp(tL)$. C'est un exercice élémentaire sur les matrices de MARKOV de montrer que la matrice $\exp(tL)$ a tous ses coefficients positifs pour tout $t > 0$ si et seulement si $L(x,x') \geq 0$, $\forall x \neq x'$. Il ne nous reste donc qu'à calculer l'opérateur $\hat{\mathbf{L}}$ et sa matrice $\hat{L}(x,x')$, pour les points x et x' de l'espace $\Omega \times S$.

Pour calculer $\hat{\mathbf{L}}$, nous partons des formules suivantes :

$$\nabla_i(ab) = b\nabla_i(a) + \tau_i(a)\nabla_i(b)\,;\ \nabla_i^2 = -2\nabla_i\,;\ \nabla_i D_j = D_j\nabla_i \text{ si } i \neq j.$$

Nous tirons de ceci, en posant $a_i = 1 + \exp(\nabla_i H)$,

$$\begin{aligned} D_i\mathbf{L} &= \sum_j D_i(a_j)\nabla_j + (\sum_{j\neq i}\tau_i(a_j)\nabla_j)D_i - 2\tau_i(a_i)D_i \\ &= \sum_{i\neq j}\omega_i\omega_j\nabla_i(a_j)D_j + (\sum_{j\neq i}\tau_i(a_j)\nabla_j)D_i - (a_i + \tau_i(a_i))D_i. \end{aligned}$$

On peut donc prendre comme opérateur $\hat{\mathbf{L}}$

$$\hat{\mathbf{L}}F(\omega,i) = \sum_{i\neq j}\omega_i\omega_j\nabla_i(a_j)F(\omega,j) + (\sum_{j\neq i}\tau_i(a_j)\nabla_j)F(\omega,i) - (a_i + \tau_i(a_i))F(\omega,i).$$

La matrice $\hat{L}((\omega,i),(\omega',j))$ associée à $\hat{\mathbf{L}}$ satisfait donc

$$\hat{L}((\omega,i),(\omega',j)) = \begin{cases} \tau_i(a_k), & \text{si } (\omega',j) = (\tau_k\omega, i) \text{ avec } k \neq i\,; \\ \omega_i\omega_j\nabla_i(a_j), & \text{si } \omega' = \omega \text{ et } j \neq i\,; \\ 0, & \text{dans tous les autres cas où } (\omega,i) \neq (\omega',j). \end{cases}$$

Or, $\tau_i(a_k) \geq 0$. D'après ce qui précède, $\exp(t\hat{\mathbf{L}})$ préserve donc la positivité dès que, pour tout couple (i,j) de points distincts de S, $\omega_i\omega_j\nabla_i(a_j) \geq 0$, où encore, en tenant compte de la définition de a_j,

$$\omega_i\omega_j\nabla_j(\exp(\nabla_i H)) \geq 0.$$

Mais, la fonction exponentielle étant croissante, $\nabla_i \exp(U)$ est toujours du signe de $\nabla_i U$, et tout revient donc à étudier le signe de $\omega_i\omega_j\nabla_i\nabla_j H$, pour $i \neq j$. Or, cette dernière expression est exactement D_iD_jH (ceci n'est vrai que pour $i \neq j$), et nous retrouvons exactement l'hypothèse d'attractivité du hamiltonien H. □

3— Différents types de semigroupes utilisables dans les systèmes de spins. Application à l'inégalité GHS.

Dans le paragraphe précédent, nous avons utilisé pour établir l'inégalité FKG un semigroupe de générateur $\mathbf{L} = \sum_i a_i(\omega)\nabla_i$, avec $a_i(\omega) = 1 + \exp(\nabla_i H)$. Nous allons voir ici que d'autres choix des fonctions a_i auraient mené au même résultat et que des méthodes analogues, utilisant des opérateurs biens choisis, peuvent donner d'autre types d'inégalités.

Tout d'abord, rappelons que nous cherchons à obtenir des opérateurs $\mathbf{P}_t = \exp(t\mathbf{L})$, qui soient des semigroupes markoviens symétriques par rapport à la mesure de probabilité $\mu(d\omega) = \exp(H)/Z\, d\omega$, et satisfaisant à la condition d'ergodicité

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}_t(f) = \int_\Omega f\, d\mu.$$

Ces conditions seront vérifiées dès que $\mathbf{L} = \sum_i a_i(\omega)\nabla_i$, avec

$$\begin{cases} \forall i \in S\,,\ a_i(\omega) > 0 \\ \tau_i a_i = \exp(-\nabla_i H) a_i. \end{cases} \tag{3.1}$$

La première hypothèse assure l'ergodicité du semigroupe. Pour voir en quoi la seconde est liée au caractère symétrique de l'opérateur $\mathbf{L}$, introduisons les notations

$$\begin{cases} \langle f\rangle = \int f\, d\mu\,; \\ \langle f\rangle_0 = \int f\, d\omega. \end{cases}$$

Nous savons que, pour tout couple de fonctions f et g sur Ω,

$$\langle \tau_i(f) g\rangle_0 = \langle f\tau_i(g)\rangle_0.$$

De ceci, nous en déduisons que

$$\langle e^H a_i \nabla_i(f) g\rangle_0 = \langle e^H a_i \tau_i(f) g\rangle_0 - \langle e^H a_i f g\rangle_0 =$$
$$\langle \tau_i(e^H a_i g) f\rangle_0 - \langle e^H a_i f g\rangle_0 = \langle e^H f (e^{\nabla_i H}\tau_i(a_i)\tau_i g - a_i g)\rangle_0.$$

Il s'ensuit que, dès que, pour un point i de S, $a_i = e^{\nabla_i H}\tau_i(a_i)$, nous avons pour tout couple de fonctions sur Ω

$$\langle a_i \nabla_i(f) g\rangle = \langle a_i \nabla_i(g) f\rangle.$$

Cette propriété (3.1) peut se réécrire sous la forme

$$a_i = \exp(\nabla_i H/2) b_i\ ,\ \text{avec } \nabla_i b_i = 0,$$

c'est à dire que la fonction b_i ne dépend pas de la variable ω_i. En particulier, nous pouvons prendre pour fonction b_i n'importe quelle fonction symétrique de $\nabla_i H$: c'est ce que nous avons fait dans le paragraphe précédent avec $b_i(\omega) = 2\mathrm{ch}(\nabla_i H/2)$.

Le choix de l'opérateur carré du champ $\Gamma(f,g)$ était lui aussi arbitraire. La seule propriété que nous lui demandons est de satisfaire l'identité

$$\langle \Gamma(f,g)\rangle = -\langle f\mathbf{L}g\rangle = -\langle g\mathbf{L}f\rangle. \tag{3.2}$$

Bien sûr, nous pouvons prendre comme d'habitude le carré du champ usuel

$$\Gamma(f,g) = \frac{1}{2}\{\mathbf{L}(fg) - f\mathbf{L}g - g\mathbf{L}f\};$$

dans le cas précédent, cela donne

$$\Gamma(f,g) = 1/2 \sum_i a_i(\omega)\nabla_i(f)\nabla_i(g).$$

En fait, pour vérifier (3.2), il suffit de prendre

$$\Gamma(f,g) = \frac{1}{2}\sum_i (a_i + a'_i)\nabla_i f \nabla_i g,$$

où a'_i vérifie $\tau_i(a'_i) = -\exp(-\nabla_i H)a'_i$, ou encore $a'_i = \exp(\nabla_i H/2)\omega_i b'_i$, avec $\nabla_i b'_i = 0$. En effet, dans ce cas, pour tout couple de fonctions f et g, nous avons

$$\langle a'_i(\omega)\nabla_i(f)\nabla_i(g)\rangle = 0,$$

par le même argument que précédement. C'est en particulier le cas lorsque nous choisissons $a'_i = \exp(\nabla_i H/2)F(\nabla_i H)$, où F est une fonction antisymétrique.

Dans le paragraphe précédent, nous avions $a_i = 2\exp(\nabla_i H/2)\mathrm{ch}(\nabla_i H/2)$, et nous avions $a'_i = 2\exp(\nabla_i H/2)\mathrm{sh}(\nabla_i H/2)$, de telle sorte que $\Gamma(f,g) = \sum_i \nabla_i f \nabla_i g$.

Si nous choisissons $a'_i = 0$, du fait de la positivité de a_i, il est clair que, si f et g sont deux fonctions croissantes, alors $\Gamma(f,g) \geq 0$. Dès lors, la démonstration du chapitre précédent peut s'appliquer dès que l'opérateur $\mathbf{P}_t$ préserve la croissance des fonctions. Les calculs faits plus haut ne dépendaient pas explicitement de la forme exacte des fonctions a_i. On a toujours

$$D_i\mathbf{L} = \sum_{i\neq j} \omega_i\omega_j\nabla_i(a_j)D_j + (\sum_{j\neq i}\tau_i(a_j)\nabla_j)D_i - (a_i + \tau_i(a_i))D_i.$$

Donc, l'opérateur $\hat{\mathbf{L}}$ défini sur $\Omega \times S$ préserve la positivité des fonctions dès que, pour tout couple de points distincts (i,j) de S, on a $\omega_i\omega_j\nabla_i(a_j) \geq 0$. C'est en particulier le cas, lorsque le hamiltonien H est attractif, dès que $a_i = F(\nabla_i H)$, où F est une fonction croissante. En effet, dans ce cas, $\nabla_j F(U)$ étant toujours du signe de $\nabla_j U$, $\omega_i\omega_j\nabla_i(a_j)$ est du signe de $\omega_i\omega_j\nabla_j\nabla_i H = D_i D_j H$.

L'inégalité GHS

L'inégalité GHS peut s'énoncer de la façon suivante : supposons que $H(\omega)$ soit un hamiltonien quadratique : $H(\omega) = \sum_{ij\in S^2} J_{ij}\omega_i\omega_j + \sum_{i\in S} h_i\omega_i$, où les coefficients J_{ij} et h_i sont des constantes. Comme plus haut, nous désignerons par $\langle f\rangle$ l'intégrale de la fonction f par rapport à la mesure de probabilité $\mu(d\omega) = \exp(H)/Z\, d\omega$. Supposons alors que tous les coefficients J_{ij} et h_i soient positifs. Dans ce cas, si i,j et k sont trois points de S, nous avons

$$\langle(\omega_i - \langle\omega_i\rangle)(\omega_j - \langle\omega_j\rangle)(\omega_k - \langle\omega_k\rangle)\rangle \leq 0. \tag{3.3}$$

Nous allons établir cette inégalité, (en fait, une inégalité plus forte), mais sous des hypothèses différentes sur le hamiltonien. Nous n'avons pas réussi à obtenir avec notre méthode l'inégalité GHS sous les mêmes hypothèses que $[GHS]$. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.1.—*Supposons que pour tous les points distincts de S, le hamiltonien H satisfasse à*

$$D_iD_jH \geq 0\,; \tag{$H1$}$$

$$D_i(I+\tau_j)H \geq 0\,; \tag{$H2$}$$

$$D_iD_jD_kH \leq 0\,; \tag{$H3$}$$

$$(\tau_i+\tau_j)D_kH \geq 0. \tag{$H4$}$$

Soit f une fonction satisfaisant:

$$\forall l \in S,\ D_lf \geq 0\,;\ \forall l \neq m \in S^2,\ D_lD_mf \leq 0.$$

Alors, pout tout couple de points $i \neq j$ de S, l'inégalité suivante est satisfaite

$$\langle (f-\langle f\rangle)(\omega_i - \langle\omega_i\rangle)(\omega_j - \langle\omega_j\rangle)\rangle \leq 0.$$

Remarquons que l'hypothèse (H2) n'est rien d'autre que l'hypothèse (H4) lorsque $k = i$ ou j.

Preuve. Tout d'abord, pour simplifier les notations, appelons 1 et 2 les points i et j de l'énoncé du théorème. Nous allons utiliser le semigroupe

$$\mathbf{L} = \sum_i a_i\nabla_i, \text{ avec } a_i = F(\nabla_iH),$$

où $F(x)$ est la fonction $\dfrac{\exp(x/2)}{2\mathrm{ch}(x/2)}$. (Ce semigroupe a été introduit dans le cas du modèle d'Ising en dimension 1 par Glauber [G].) C'est donc bien un semigroupe vérifiant (3.1). Il a la particularité de satisfaire l'identité

$$\forall i,\ (I+\tau_i)(a_i) = 1,$$

ceci provenant de $\tau_i\nabla_i = -\nabla_i$ et de la propriété de F: $F(x)+F(-x) = 1$. D'autre part, nous allons poser

$$\Gamma(f,g) = \sum_i b_i\nabla_f\nabla_ig, \text{ avec } b_i = G(\nabla_iH)/2,$$

où $G(x)$ est la fonction $1/\mathrm{ch}^2(x/2)$. D'après ce que nous avons vu plus haut, ce choix est compatible avec celui de $\mathbf{L}$, à cause de la formule

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x/2)} = e^{x/2}\frac{1-\mathrm{th}(x/2)}{\mathrm{ch}(x/2)}.$$

Comme d'habitude, $\mathbf{P}_t$ désigne le semigroupe $\exp(t\mathbf{L})$. Remarquons que la fonction F étant croissante, d'après ce que nous venons de voir, le semigroupe $\mathbf{P}_t$ préserve la croissance des fonctions.

Appelons K la quantité $\langle (f - \langle f\rangle)(\omega_1 - \langle \omega_1\rangle)(\omega_2 - \langle \omega_2\rangle)\rangle$. Nous écrivons comme plus haut

$$\begin{aligned} K &= -\int_0^\infty \langle \mathbf{L}\mathbf{P}_t f(\omega_1 - \langle\omega_1\rangle)(\omega_2 - \langle\omega_2\rangle)\rangle\, dt \\ &= \int_0^\infty \langle \Gamma(\mathbf{P}_t f, (\omega_1 - \langle\omega_1\rangle)(\omega_2 - \langle\omega_2\rangle))\rangle\, dt. \end{aligned}$$

Or, pour toute fonction U sur Ω,

$$\langle \Gamma(U, (\omega_1 - \langle\omega_1\rangle)(\omega_2 - \langle\omega_2\rangle))\rangle = 2(\omega_1 - \langle\omega_1\rangle) b_2 D_2 U + 2(\omega_2 - \langle\omega_2\rangle) b_1 D_1 U.$$

D'autre part, le hamiltonien H satisfait aux hypothèses de l'inégalité FKG. Les fonctions ω_1 et ω_2 étant croissantes, il nous suffit donc de vérifier que les fonctions $b_2 D_2 \mathbf{P}_t f$ et $b_1 D_1 \mathbf{P}_t f$ sont décroissantes. Nous n'allons bien sûr le voir que pour la seconde.

Maintenant, f étant croissante, et le semigroupe préservant la croissance des fonctions, nous savons que $D_1 \mathbf{P}_t f$ est positive. Le produit de deux fonctions décroissantes positives étant une fonction décroissante, il suffit donc de démontrer que chacune des fonctions b_1 et $D_1 \mathbf{P}_t f$ est décroissante.

Lemme 3.2.—*Sous les hypothèses (H1) et (H2) sur le hamiltonien, et pour tout i de S, $D_i b_1 \leq 0$.*

Preuve. Remarquons tout de suite que l'on peut supposer que $i \neq 1$. En effet, la fonction G étant symétrique, nous savons que, pour tout i, $\nabla_i b_i = D_i b_i = 0$. (C'est cette propriété qui justifie le choix que nous avons fait des coefficients b_i.) Posons pour simplifier $h = H/2$. Nous avons

$$D_i b_1 = -\omega_i \left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2(\nabla_1 h + \nabla_i \nabla_1 h)} - \frac{1}{\mathrm{ch}^2(\nabla_1 h)} \right),$$

cette quantité étant du même signe que

$$\begin{aligned} \omega_i \{\mathrm{ch}(\nabla_1 h + \nabla_i \nabla_1 h) - \mathrm{ch}(\nabla_1 h)\} &= \omega_i \mathrm{sh}(\nabla_1 \nabla_i h/2)\mathrm{sh}(\nabla_1 h + \nabla_i \nabla_1 h/2) \\ &= -\mathrm{sh}(D_1 D_i h/2)\mathrm{sh}(D_1(I + \tau_i)(h/2)). \end{aligned}$$

D'après nos hypothèses sur le hamiltonien H, cette dernière quantité est négative. $\square$

Lemme 3.3.—*Soit f une fonction croissante telle que, $\forall i \neq j$, $D_iD_jf \leq 0$. Avec le semigroupe précédent et sous les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4) sur le hamiltonien H,*

$$\forall i \neq j,\ D_iD_j\mathbf{P}_tf \leq 0.$$

Preuve. Nous allons utiliser le même raisonnement qu'au chapitre précédent, mais en opérant en même temps sur les dérivées premières et secondes de la fonction $\mathbf{P}_tf$. Pour cela, définissons arbitrairement un ordre total sur S, et désignons par U l'ensemble $\{(i,j) \in S^2, i < j\} \cup S$. Pour $u \in U\backslash S$, nous noterons D_uf la quantité $-D_iD_jf$, D_uf n'ayant pas changé de signification si $u \in S$. Posons alors $F(\omega,u,t) = D_u\mathbf{P}_tf$. Nous allons introduire un opérateur $\hat{\mathbf{L}}$ sur $\Omega \times U$, de telle façon que $F(\omega,u,t)$ soit solution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}F = \hat{\mathbf{L}}F, \\ F(\omega,u,0) = D_uf. \end{cases}$$

Il ne restera plus dès lors qu'à vérifier que l'opérateur $\exp(t\hat{\mathbf{L}})$ préserve la positivité des fonctions. Pour calculer $\hat{\mathbf{L}}$, puisque $\frac{\partial}{\partial t}F(\omega,u,t) = D_u\mathbf{L}\mathbf{P}_tf$, il nous suffit comme plus haut de calculer les opérateurs $D_u\mathbf{L}$, pour tout u de U. En rappelant que $\mathbf{L} = \sum_i a_i\nabla_i$, notons $\hat{a}_i = -\omega_ia_i$. En se servant des formules

$$D_i(ab) = \tau_i(a)D_i(b) + bD_i(a)\,;\ D_iD_j = D_jD_i\,;\ D_i^2 = 0,$$

il vient, pour $i \in S$

$$\begin{aligned} D_i\mathbf{L} =& \{\sum_k \tau_i(\hat{a}_k)D_k\}D_i + \sum_k D_i(\hat{a}_k)D_k \\ =& \{\sum_{k\neq i} \tau_i(a_k)\nabla_k\}D_i + \sum_k D_i(\hat{a}_k)D_k. \end{aligned}$$

(Nous avions déjà utilisé cette formule dans le précédent calcul.) Pour $u = (i,j)$, avec $i < j$, nous avons

$$\begin{aligned} D_iD_j\mathbf{L} =& \{\sum_k \tau_i\tau_j(\hat{a}_k)D_k\}D_iD_j + \sum_k D_i\tau_j(\hat{a}_k)D_jD_k \\ &+ \sum_k \tau_iD_j(\hat{a}_k)D_iD_k + \sum_k D_iD_j(\hat{a}_k)D_k \\ =& \{\sum_{k\neq i,j} \tau_i\tau_j(a_k)\nabla_k\}D_iD_j + \sum_{k\neq i} \tau_iD_j(\hat{a}_k)D_iD_k \\ &+ \sum_{k\neq j} \tau_jD_i(\hat{a}_k)D_jD_k + \sum_k D_iD_j(\hat{a}_k)D_k. \end{aligned}$$

La matrice $\hat{L}((\omega,u),(\omega',u'))$ associée à cet opérateur vaut donc

$$\begin{cases} \hat{L}((\omega,u),(\tau_k\omega,u)) = \tau_u(a_k), & \text{si } u \in S,\ k \neq u\,; \\ \hat{L}((\omega,u),(\omega,k)) = D_u(\hat{a}_k), & \text{si } u \in S \text{ et } k \in S,\ k \neq u\,; \\ \hat{L}((\omega,u),(\tau_k\omega,u)) = \tau_i\tau_j(a_k), & \text{si } u = (i,j),\ k \neq i,\ k \neq j\,; \\ \hat{L}((\omega,u),(\omega,u')) = \tau_j D_i(\hat{a}_k), & \text{si } u = (i,j),\ u' = (j,k) \text{ ou } u' = (k,j),\ k \neq j\,; \\ \hat{L}((\omega,u),(\omega,k)) = -D_iD_j(\hat{a}_k), & \text{si } u = (i,j),\ k \in S\,; \\ \hat{L}((\omega,u),(\omega',u')) = 0, & \text{dans tous les autres cas où } (\omega,u) \neq (\omega',u'). \end{cases}$$

Si nous nous rappelons que nous avons choisi $a_k = F(\nabla_k H)$, avec $F(x) = 1/(1+\exp(-x))$, qui est une fonction croissante, nous voyons que les fonctions $D_i(\hat{a}_k)$ et $\tau_j D_i(\hat{a}_k)$ sont toujours positives, lorsque $k \neq i$. La seule chose qui nous reste à vérifier est que, sous les conditions du théorème, $D_iD_j(\hat{a}_k) \leq 0$, pour tous les points i, j, k de S, avec $i \neq j$.

Pour le voir, rappelons que la fonction F satisfait à $F(x)+F(-x) = 1$, si bien que, si ω ne prend que les valeurs ± 1, on a $F(\omega x) = \frac{1}{2}(1-\omega)+\omega F(x)$. Or, dans tous les cas de figure, $D_iD_j(1-\omega_k) = 0$, donc

$$D_iD_j(\hat{a}_k) = D_iD_j(-\omega_k F(\nabla_k H)) = D_iD_j(F(-\omega_k\nabla_k H) = D_iD_j(F(D_kH)).$$

Or, pour toute fonction U définie sur Ω, et toujours pour $i \neq j$, nous avons

$$\begin{aligned} D_iD_jF(U) =& \omega_i\omega_j\{F(U+\nabla_iU+\nabla_jU+\nabla_i\nabla_jU) \\ & - F(U+\nabla_iU) - F(U+\nabla_jU) + F(U)\} \\ =& \omega_i\omega_j\{F(U+\nabla_iU+\nabla_jU+\nabla_i\nabla_jU) - F(U+\nabla_iU+\nabla_jU)\} \\ & + \omega_i\omega_j\{F(U+\nabla_iU+\nabla_jU) - F(U+\nabla_iU) - F(U+\nabla_jU) + F(U)\}. \end{aligned}$$

La fonction F étant croissante, le premier terme de cette somme est du signe de $\omega_i\omega_j\nabla_i\nabla_jU = D_iD_jU$, donc négatif sous nos hypothèses lorsque $U = D_kH$.

D'autre part, pour la fonction F que nous avons considérée, le signe de

$$F(x+a+b) - F(x+a) - F(x+b) + F(x)$$

est toujours celui de $-ab(2x+a+b)$. Ceci nous montre que le second terme est du signe de $-\omega_i\omega_j\nabla_iU\nabla_jU(\tau_iU+\tau_jU) = -D_iD_kHD_jD_kH(\tau_iD_kH+\tau_jD_kH)$. Une fois de plus, sous nos hypothèses sur le hamiltonien, cette quantité est négative. $\square$

Remarque.—

Les conditions de notre énoncé s'appliquent évidemment au cas où la fonction f est l'une des fonctions ω_i, et nous retrouvons dans ce cas l'inégalité GHS. Mais, dans le cas des hamiltoniens quadratiques

$$H(\omega) = \sum_{i\neq j} J_{ij}\omega_i\omega_j + \sum_{i\in S} h_i\omega_i,$$

$D_iD_jH = 4J_{ij}$, $D_iD_jD_kH = 0$, $D_i(I+\tau_j)H = 4(h_i + \sum_{k\neq j} J_{ik}\omega_k)$, pour $i \neq j$, et $(\tau_i + \tau_j)D_kH = 4(h_k + \sum_{l\neq i,j} J_{kj}\omega_l)$, pour i, j, k distincts. Les conditions (H1), (H2) et (H3) et (H4) se résument donc à

$$\forall i \neq j,\ J_{ij} \geq 0 \text{ et } h_i \geq \sum_{k\neq j} J_{ik},$$

ce qui revient à dire que les champs h_i sont suffisamment forts, alors que l'inégalité GHS usuelle est valable dès que tous les champs h_i sont positifs (et semble être particulièrement intéressante précisément au voisinage de $h_i = 0$).

—Références

[*B*] Batty, (C.J.K.)— An extention of an inequality of R.Holley, Quart. J. Math. Oxford, ser. 2, vol. 27, 1976, p.457-461.

[*BB*] Batty, (C.J.K.), Bollmann, (H.W.)— Generalized Holley-Preston inequalities on measure spaces and their products, Z. Wahrsch. Verw. Gebeite, vol. 53, 1980, p.157-173.

[*EA*] Eaton, (M.L.)— A review on selected topics in multivariate probability inequalities, Ann. Statist., vol. 10, 1982, p.11-43.

[*ED*] Edwards, (D.A.)— On the Holley-Preston inequalities, Proc. Edinburgh Math. Soc. A, vol. 78, 1978, p.265-272.

[*El*] Ellis, (R.E.)— **Entropy, large deviations and statistical mechanics** , Springer, Berlin-Heidelberg-New-York, 1985.

[*EMN*] Ellis, (R.S.), Monroe, (J.L.), Newman, (C.M.)— The GHS and other correlation inequalities for a class of even ferromagnets, Comm. Math. Phys., vol. 46, 1976, p.167-182.

[*FKG*] Fortuin, (C.), Kastelyn, (P.), Ginibre, (J.)— Correlation inequalities on some partially ordered sets, Comm. Math. Phys., vol. 22, 1971, p.89-103.

[*GHS*] Griffiths, (R.B.), Hurst, (C.A.), Sherman, (S.)— Concavity of magnetization of an Ising ferromagnet in a positive external field, J. Math. Phys., vol. 11, 1970, p.790-795.

[*H*] Holley, (R.)— Remarks on the FKG inequalities, Comm. Math. Phys., vol. 36, 1974, p.227-231.

[K] KAHANE, (J.P.)— Une inégalité du type de SLEPIAN et GORDON sur les processus gaussiens, Isr.J.Math., vol. 55, 1986, p.109-110.

[$\dot{K}R$] KARLIN, (S.), RINOTT, (Y.)— Classes of ordering of measures and related correlation inequalities, J. Multivariate Anal., vol. 10, 1980, p.467-498.

[L] LEBOWITZ, (J.L.)— GHS and other inequalities, Comm. Math. Phys., vol. 35, 1974, p.87-92.

[L] LIGETT, (T.M.)— **Interacting particle systems** , Springer, Berlin-Heidelberg-New-York, 1985.

[Pre] PRESTON, (C.J.)— A generalization of FKG inequalities, Comm. Math. Phys., vol. 36, 1974, p.233-240.

[Pru] PRUM, (B.)— **Processus sur un réseau et mesures de GIBBS** , Masson, Paris, 1986.

[T] THOMAS, (L.E.)— Stochastic coupling and thermodynamic inequalities, Comm. Math. Phys., vol. 77, 1980, p.211-218.