Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Monique Pontier
Anne Estrade

Relèvement horizontal d'une semimartingale càdlàg

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 127-145
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__127_0>

RELEVEMENT HORIZONTAL D'UNE SEMI-MARTINGALE CADLAG

Monique PONTIER et Anne ESTRADE
Dp. Mathématiques
Université d'Orléans
B.P. 6759
45067 ORLEANS
FRANCE

Aux semi-martingales continues à valeurs dans une variété sont associés deux processus particulièrement utiles : leur relèvement horizontal dans le fibré des repères orthonormés et leur développement stochastique. On peut consulter à ce sujet : Malliavin [7], Bismut [1] , Meyer [8], Shigekawa [11] ou Darling [2]. A notre connaissance, de telles constructions n'ont été réalisées que pour des processus continus. L'objet de ce papier est donc de justifier l'existence et la construction du relèvement et du développement d'une semi-martingale càdlàg à valeurs dans une variété riemannienne. Cette construction suit d'assez près la méthode de Shigekawa et donc nécessite la définition de l'intégrale d'une 1-forme le long d'une semi-martingale non continue. Ce problème précis a été abordé par Jean Picard [9], mais dans le cas de variétés plus générales (non forcément riemanniennes) et surtout l'objectif de J.Picard n'a rien à voir avec le problème présent : sa préoccupation principale est de définir une "bonne" notion de martingale dans une variété. Au demeurant, la notion d'intégrale de formes le long de semi-martingales a son intérêt propre. (Notons que dans le cas continu, les choses sont particulièrement bien clarifiées dans le livre de Emery [3]).

Après avoir donné dans une première section des préliminaires géométriques utiles à notre propos, que nous avons démontrés en l'absence de références connues de nous, l'intégrale d'une 1-forme le long d'une semi-martingale càdlàg est définie, puis sont construits successivement relèvement horizontal et développement stochastique de cette semi-martingale.

1 Préliminaires géométriques

On considère une variété riemannienne V, connexe , de dimension d, de classe C^∞, munie d'une métrique m et d'un atlas dénombrable $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ tel que, $\forall\alpha$, U_α est borné et il existe un ouvert V_α contenant $\bar{U}_\alpha$, $(V_\alpha, \varphi_\alpha)$ étant encore un atlas.

Soit $\mathcal{H}(V)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur V de classe C^∞ et $\mathcal{H}^*(V)$ celui des 1-formes. Tout élément α de $\mathcal{H}^*(V)$ s'écrit localement

$$\alpha(x) = \alpha_i(x)\, dx^i$$

dans une carte $(x^i)_i$ de V. La notation d'Einstein est ici utilisée, comme elle le sera systématiquement par la suite.

1.1 Application exponentielle et géodésique

On note l'application exponentielle définie sur le fibré tangent TV pour tout x de V :

$$Exp_x : T_xV \rightarrow V.$$

Il existe (cf.[2]) un voisinage tubulaire $\mathcal{V}(\Delta V)$ de la diagonale de V et un voisinage $\mathcal{W}$ de l'ensemble des vecteurs nuls de TV tels que l'application :

$$X \in \mathcal{W} \mapsto (\pi(X), Exp_{\pi(X)}X)$$

est un difféomorphisme de $\mathcal{W}$ sur $\mathcal{V}(\Delta V)$. Par suite

(1) $\qquad \forall (x,y) \in \mathcal{V}(\Delta V)$ il existe un unique $X \in T_xV$ tel que $y = Exp_x X$.

On notera par la suite cet élément X : $Exp_x^{-1}(y)$ et U_x le voisinage de x dans V sur lequel l'application Exp_x^{-1} est définie, c'est-à-dire :

$$U_x = \{y \in V \text{ tels que } (x,y) \in \mathcal{V}(\Delta V)\}.$$

On rappelle qu'une géodésique sur V reliant deux points x et y est une courbe de plus court chemin. S'il existe une unique géodésique γ de x à y (en particulier lorsque (x,y) est dans $\mathcal{V}(\Delta V)$), elle est donnée par :

$$t \mapsto \gamma(t) = Exp_x(t\ Exp_x^{-1}y)$$

Et

$$\dot\gamma(0) = Exp_x^{-1}y\ .$$

Définition 1.1 *Soit x dans V et soit $(x_i)_{1\le i\le d}$ un système de coordonnées locales autour de x. La famille des vecteurs tangents $D_i = (\frac{\partial}{\partial x^i})_x$ forme une base de T_xV et on appelle* **coordonnées normales** *le système défini dans l'ouvert U_x par :*

$$\begin{array}{rcl} \varphi(x,.) : U_x & \rightarrow & \mathbb{R}^d \\ z & \mapsto & \{\varphi^i(x,z)\ ;\ i=1,...,d\} \end{array}$$

tels que $Exp_x^{-1}(z) = \varphi^i(x,z)\, D_i$.

1.2 Action du groupe orthogonal sur $O(V)$

On note $GL(V)$ le fibré des repères au-dessus de V, $O(V)$ celui des repères orthonormés (pour la métrique m) et π la projection canonique de $O(V)$ sur V.

Soient $G = O(d)$ le groupe orthogonal de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie qui lui est associée, c'est-à-dire l'espace des matrices $(d \times d)$ antisymétriques. On note e l'identité de $O(d)$ et exp désigne ici l'application exponentielle :

$$exp \; : \; \mathcal{G} \longrightarrow G$$

L'automorphisme adjoint ad est l'application linéaire tangente en e à l'automorphisme intérieur :

$$\forall g \in G \; , \; \forall h \in \mathcal{G} \; , \; I_g(h) \; = \; ghg^{-1}$$
$$\forall X \in \mathcal{G} \; , \; ad(g)(X) \; = \; (dI_g)_e(X)$$

On note i la 1-forme canonique sur G à valeurs dans $\mathcal{G}$:

$$\forall g \in G \; , \; \forall A \in \mathcal{G} \; , \; i(gA) \; = \; A \tag{2}$$

On peut montrer que G agit à droite sur les fibres de $O(V)$ de la façon suivante : tout élément u de $O(V)$ est une isométrie de $\mathbb{R}^d$, muni de la métrique euclidienne standard, dans l'espace métrique tangent $(T_{\pi(u)}V, m)$. On définit alors l'opération à droite R_g pour tout g de G :

$$R_g \; : \; u \in O(V) \; \mapsto \; R_g(u) \; = \; u \circ g \in O(V)$$

Il est clair que $\pi(u \circ g) \; = \; \pi(u)$ et que $u \circ g$ est bien une isométrie. On note alors :

$$\varphi_u \; : \; g \in G \; \mapsto \; R_g(u) \; = \; u \circ g$$

Notons comme Shigekawa ([11]) A^* le champ de vecteurs sur $O(V)$ issu de tout élément A de $\mathcal{G}$ par :

$$\forall u \in O(V) \; , \; A^*(u) \; = \; \frac{d}{dt}(u \; \circ \; exp \; tA)_{t=0}$$

c'est-à-dire que $A^*(u) \; = \; (d\varphi_u)_e(A)$.

L'action de G sur $O(V)$ permet d'en décomposer les fibres de façon canonique en somme directe (cf.[6] p.63) :

$$T_uO(V) \; = \; Q_u \; \oplus \; G_u$$

telle que $(d\pi)_u$ soit un isomorphisme entre Q_u et $T_{\pi(u)}V$, et $(d\varphi_u)_e$ entre $\mathcal{G}$ et G_u. On appelle Q_u le **sous-espace horizontal** et G_u le **sous-espace vertical** de $T_uO(V)$. On notera "$vert(U)$" la partie verticale d'un vecteur U de $TO(V)$.

Les éléments de Q_u, c'est-à-dire les vecteurs horizontaux de $T_uO(V)$, sont par ailleurs caractérisés grâce à la 1-forme de connexion ω([6] p.64) :

Définition 1.2 *La* **1-forme de connexion** ω *sur* V *est une forme sur* $O(V)$ *à valeurs dans* $\mathcal{G}$ *définie pour tout* u *de* $O(V)$ *par :*

$$\omega(u) \;:\; U \in T_uO(V) \;\mapsto\; (d\varphi_u)_e^{-1}(vert(U))$$

Corollaire 1.3 *Un vecteur* U *de* $T_uO(V)$ *est horizontal si et seulement si* $\omega(u)(U) \;=\; 0$.

Rappelons quelques propriétés utiles de ω :

Proposition 1.4 $\forall A \in \mathcal{G}$, $\forall u \in O(V)$, $\forall g \in G$, $\forall X \in \mathcal{H}(O(V))$, *on a :*
(i) $< \omega, A^* > (u) \;=\; A$
(ii) $< \omega, dR_g(X) > (u \circ g) \;=\; < ad(g^{-1})(\omega), X > (u)$
(iii) $i \;=\; (d\varphi_u)^*(\omega)$

Preuve de (iii) : $\forall g \in G$, $\forall A \in \mathcal{G}$,

$$i(gA) \;=\; A \;= < \omega, A^* > (u \circ g) \;= < \omega, d\varphi_{u\circ g}(A) > = < \omega, d\varphi_u(gA) >$$

Dans la proposition suivante, nous donnons l'expression de ω en coordonnées locales ([6] p.142) :

Proposition 1.5 *Soit* $u \;=\; (x,r)$ *dans* $O(V)$ *et soit* $(x^m, r^{kj})_{m,k,j}$ *un système de coordonnées locales autour de* u *dans* $GL(V)$. *On note alors, dans ce système de coordonnées,* $(\Gamma^k_{ml})_{k,m,l}$ *les symboles de Christoffel de la connexion associée à la métrique* m.
Si $(E_{ij}; 1 \leq i,j \leq d)$ *est une base de* $\mathcal{GL}(V)$, *les coordonnées* ω^{ij} *de* $\omega(u)$ *s'écrivent:*

$$\omega^{ij} \;=\; (r^{-1})^{ik}(dr^{kj} \;+\; \Gamma^k_{ml}(x)\; r^{lj}\; dx^m) \tag{3}$$

1.3 Relevé horizontal

On peut ([6] p.69) associer à toute courbe différentiable dans V une courbe dans $O(V)$, dite horizontale :

Proposition 1.6 *Soit* $c \in C^1([0,1];V)$ *et soit* $u \in O(V)$ *tel que* $\pi(u) \;=\; c(0)$. *Il existe une unique courbe* $\tilde{c} \in C^1([0,1];O(V))$ *telle que :*

$$(i) \quad \tilde{c}(0) \;=\; u \text{ et } \pi \circ \tilde{c} \;=\; c$$
$$(ii) \quad \forall t \in [0,1], \omega(\dot{\tilde{c}}(t)) \;=\; 0$$

On appelle $\tilde{c}$ le **relevé horizontal** de c issu de u.

Soient $(x,y) \in \mathcal{V}(\Delta V)$, c la géodésique de x à y dans V. Si, pour tout u dans $O(V)$, on note $\tilde{c}_u$ le relevé horizontal de c partant de u, on peut alors définir le **transport parallèle** de x à y le long de c par ([6] p.70) :

(4)
$$\begin{array}{rrcl} \tau_{xy} : & \pi^{-1}\{x\} & \to & \pi^{-1}\{y\} \\ & u & \mapsto & \tilde{c}_u(1) \end{array}$$

Nous aurons besoin par la suite des dérivées du transport parallèle ; nous les exprimons ici en coordonnées locales :

Proposition 1.7 *Soit $u = (x,r)$ dans $O(V)$ et soit G l'application définie sur un voisinage de x par:*

$$y \mapsto G(y) = \tau_{xy} u \in O(V)$$

Si $(x^m, r^{kj})_{m,k,j}$ est un système de coordonnées locales autour de u dans $GL(V)$, dans lequel on note $(\Gamma^k_{ml})_{k,m,l}$ les symboles de Christoffel de la connexion, alors:

$$\frac{\partial G^{kj}}{\partial y^p}(x) = -\Gamma^k_{pl}(x)\, r^{lj}$$

Preuve : Le point x de V ayant pour coordonnées $(x^1, \ldots, x^d)$, on considère la courbe c_p sur V qui à t, voisin de 0, associe le point $c_p(t)$ de coordonnées $(x^1, \ldots, x^{p-1}, x^p + t, x^{p+1}, \ldots, x^d)$, et $\tilde{c}_p$ son relevé horizontal dans $O(V)$ issu de u. Alors, pour tout t, $G(c_p(t)) = \tilde{c}_p(t)$ donc

$$\frac{\partial G^{kj}}{\partial y^p}(x) = \frac{d\tilde{c}^{kj}_p}{dt}(0)$$

Le vecteur $\frac{d\tilde{c}_p}{dt}(0) = \dot{\tilde{c}}_p(0)$ de $T_u O(V)$ est horizontal, ce qui se traduit en coordonnées locales, d'après (3), par : $\forall (i,j)$

$$\begin{aligned} 0 &= <\omega^{ij}, \dot{\tilde{c}}_p(0)>(u) \\ &= (r^{-1})^{ik}\left(\frac{d\tilde{c}^{kj}_p}{dt}(0) + \Gamma^k_{ml}(x)\, r^{lj}\, \frac{d\tilde{c}^m_p}{dt}(0)\right) \\ &= (r^{-1})^{ik}\left(\frac{d\tilde{c}^{kj}_p}{dt}(0) + \Gamma^k_{pl}(x)\, r^{lj}\right) \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé. □

1.4 $O(V)$, variété riemannienne

On munit maintenant la variété $O(V)$ d'une métrique riemannienne de la manière suivante ([10] p.302) :

Proposition 1.8 *Si m est la métrique riemannienne de V, on définit pour tout u de $O(V)$ la forme bilinéaire $\tilde{m}(u)$ sur $T_uO(V)$:*

$$\begin{array}{rcl}\tilde{m}(u)\ :\ T_uO(V)\times T_uO(V) & \rightarrow & \mathbb{R}\\ (U,U') & \mapsto & m((d\pi)_u(U),(d\pi)_u(U'))\ +\ (vert(U),vert(U'))_{\mathcal{G}}\end{array}$$

Alors $\tilde{m}$ définit une métrique riemannienne sur $O(V)$.

La variété $(O(V),\tilde{m})$ étant une variété riemannienne, on peut alors définir sur $O(V)$ la notion de géodésique et l'application exponentielle sur le fibré tangent $TO(V)$, que l'on notera encore Exp. On peut montrer en particulier les propriétés suivantes :

Proposition 1.9 *(i) Soient u et v des éléments de $O(V)$ tels que $(\pi(u),\pi(v))\in\mathcal{V}(\Delta V)$ et $v=\tau_{xy}u$. Soit γ la géodésique de x à y dans V. Alors le relevé horizontal de γ partant de u est :*

$$\tilde{\gamma}\ :\ t\ \mapsto\ (\gamma(t),\tau_{x\gamma(t)}u)$$

et c'est l'unique géodésique de u à v dans $O(V)$. En particulier le vecteur de $T_uO(V)$, $\dot{\tilde{\gamma}}(0)=Exp_u^{-1}\ v$, est horizontal.
(ii) Soit τ une géodésique de $(O(V),\tilde{m})$. Si $\dot{\tau}(0)$ est horizontal dans $T_{\tau(0)}O(V)$, alors $\dot{\tau}(t)$ est horizontal pour tout t et τ est le relevé horizontal de $\pi\circ\tau$, géodésique de V.

Preuve :
(i) Le fait que $\tilde{\gamma}$ soit le relèvement horizontal de γ partant de u est exactement la définition du transport parallèle (cf.(4)). Soit alors τ une géodésique de u à v. Par définition de $\tilde{m}$ (prop.(1.8)), on a :

$$\|\ \dot{\tau}(t)\ \|_{\tilde{m}}^2=\|\ \frac{d\ \pi\circ\tau(t)}{dt}\ \|_m^2\ +\ \|\ vert\ \dot{\tau}(t)\ \|_{\mathcal{G}}^2$$

Donc $long(\tau)\ =\ long(\pi\circ\tau)\ +\ \int_0^1\|\ vert\ \dot{\tau}(t)\ \|_{\mathcal{G}}^2\ dt$

On peut écrire la série d'inégalités suivante :

$$long(\gamma)\ =\ long(\tilde{\gamma})\ \geq\ long(\tau)\ \geq\ long(\pi\circ\tau)\ \geq\ long(\gamma)$$

en tenant successivement compte des arguments suivants : $\tilde{\gamma}$ est horizontale; τ est une géodésique; proposition (1.8); γ est une géodésique.

Par suite $long(\tau) = long(\pi \circ \tau)$, ce qui prouve que τ est une courbe horizontale. Enfin $long(\pi \circ \tau) = long(\gamma)$, ce qui prouve que $\gamma = \pi \circ \tau$. Finalement $\tau = \tilde{\gamma}$.

(ii) Notons γ la géodésique de (V, m) de conditions initiales :

$$\gamma(0) = \pi \circ \tau(0) \; ; \; \dot{\gamma}(0) = (d\pi)_{\tau(0)}(\dot{\tau}(0))$$

Soit alors $\tilde{\gamma}$ le relèvement horizontal de γ dans $O(V)$ issu de $\tau(0)$. D'après (i), $\tilde{\gamma}$ est une géodésique de $O(V)$; de plus elle coïncide avec τ en 0. Par ailleurs, par définition du relèvement horizontal, $\dot{\tilde{\gamma}}(0)$ est horizontal et vérifie :

$$(d\pi)_{\tilde{\gamma}(0)}(\dot{\tilde{\gamma}}(0)) = \dot{\gamma}(0)$$

D'autre part $\dot{\tau}(0)$ est aussi horizontal et vérifie également :

$$(d\pi)_{\tau(0)}(\dot{\tau}(0)) = \dot{\gamma}(0)$$

Du fait que $(d\pi)_{\tau(0)}$ est un isomorphisme sur l'espace horizontal $Q_{\tau(O)}$, on a :

$$\dot{\tilde{\gamma}}(0) = \dot{\tau}(0)$$

L'unicité d'une géodésique de conditions initiales fixées montre que $\tau \equiv \tilde{\gamma}$ $\square$

2 Intégrale d'une 1-forme le long d'une semi-martingale

Il s'agit dans cette section d'une généralisation au cas de semi-martingales non continues d'un problème abordé, par exemple, par Meyer [8], Bismut[1], Shigekawa[11] ou Darling [2]. On s'intéresse ici à une semi-martingale X, à valeurs dans V, cadlag. On convient de la définition classique :

Définition 2.1 *On dit que X, processus mesurable à valeurs dans une variété V, est une* **semi-martingale cadlag** *si, pour toute fonction f de classe C^∞ sur V, $f(X)$ est une semi-martingale réelle cadlag sur un espace de probabilité standard $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.*

C'est à dire, en particulier, que X restreinte à un ouvert de carte de l'atlas de V admet des coordonnées locales qui sont des semi-martingales locales. On fait ici l'hypothèse suivante :

Hypothèse H :Il existe une seule géodésique de X_{t^-} à X_t $dt \times d\mathbb{P}$ presque sûrement. De fait, ceci est vrai dès que le couple $(X_{t^-}, X_t) \in \mathcal{V}(\Delta V)$ presque sûrement.

On définit l'intégrale de processus à valeurs 1-forme sur V le long des semi-martingales cadlag vérifiant l'hypothèse **H**

Proposition 2.2 *Soit un atlas $(U_a, \phi_a), a \in A$ tel celui de la section 1 et une partition de l'unité (U_a, h^a) qui lui est associée. Soit $\{D_i^a, i = 1, \cdots, d\}$ les dérivées partielles dans les coordonnées locales de la carte (U_a, ϕ_a). Alors l'expression suivante, pour tout processus α à valeurs 1-forme :*

$$\begin{aligned} &\sum_{a\in A}[\int_0^{\cdot} < \alpha_{s-}, D_i^a > (X_{s-})h^a(X_{s-}) \circ d\phi_i^a(X_s) \\ (5) \qquad &+ \sum_{s\leq \cdot} < \alpha_{s-}, Exp_{X_{s-}}^{-1}(X_s) - h^a(X_{s-})\Delta\phi_i^a(X_s)D_i^a > (X_{s-})] \end{aligned}$$

est bien définie et ne dépend pas du système de coordonnées choisi. C'est une semi-martingale réelle qui définit l'intégrale de α le long de X, notée $\int_0^{\cdot} \alpha \circ dX$.

Preuve : En premier lieu, il faut montrer que la série figurant dans (5) est presque sûrement absolument convergente.

Lemme 2.3 *Soit S et T deux temps d'arrêt tels que presque sûrement $S < T$ et $X 1_{]S,T]}$ reste dans un même ouvert de carte (U, ψ). Alors :*

$$(6) \qquad \sum_{S<s\leq T} < \alpha_{s-}, Exp_{X_{s-}}^{-1}(X_s) - \Delta\psi^i(X_s)D_i > (X_{s-})$$

converge absolument presque sûrement.

Preuve du lemme : Soit (s,ω) fixé dans $\{(s,\omega)/S(\omega) < s \leq T(\omega)\}$. On note $x = X_{s-}(\omega), y = X_s(\omega)$ et $(x^i, i = 1,\cdots,d), (y^i, i = 1,\cdots,d)$ leurs coordonnées dans (U,ψ). Alors $\Delta\psi^i(X_s) = y^i - x^i$. Par hypothèse, $(x,y) \in \mathcal{V}(\Delta V)$, donc la carte normale $(U_x, \phi(x,.))$ (cf définition 1.1) est bien définie et l'on a :

$$Exp_x^{-1} y = \phi^i(x,y) D_i$$

Or, pour une carte normale, $\phi(x,x) = 0$ et $\frac{\partial \phi^i}{\partial y^j}(x,x) = \delta_{ij}$ (cf lemme 2, p.568,[2]). Le terme général de la série (6) se récrit :

$$\alpha_i(s-, X_{s-})[\phi^i(x,y) - \phi^i(x,x) - \frac{\partial \phi^i}{\partial y^j}(x,x)(y^j - x^j)]$$

et peut être alors majoré en valeur absolue par :

$$\begin{array}{lrl} & | < \alpha_{s-} & , \quad Exp_{X_{s-}}^{-1}(X_s) - \Delta\psi^i(X_s) D_i > (X_{s-})| \\ (7) & \leq & \frac{1}{2} \quad sup_i |\alpha_i(s-, X_{s-}) M_x . \sum |\Delta\psi^i(X_s)|^2 \end{array}$$

où $M_x = sup_{z \in U_x \cap U} ||d^2 \phi^i(x,z)||$.

Or, X donc $\psi(X)$ est cadlag donc presque sûrement localement borné : pour tout t il existe une boule fermée F de V telle que $X_{s-}(\omega) \in F$ $\forall s \leq t$ presque sûrement. La majoration (7) devient :

$$| < \alpha_{s-}, Exp_{X_{s-}}^{-1}(X_s) - \Delta\psi^i(X_s) D_i > (X_{s-})| \leq \frac{1}{2} sup_{i, x \in F} |\alpha_i(x)| M_x . ||\Delta\psi(X_s)||^2$$

qui est le terme général d'une série presque sûrement convergente du fait que $\psi(X)$ est une semi-martingale. □

Il faut ensuite montrer que l'expression (5) ne dépend pas du système de coordonnées choisi. Considérons (5), intégrée seulement entre deux temps d'arrêt S et T tels ceux du lemme 2.3 :

$$(8) \int_S^T < \alpha_{s-}, D_i > (X_{s-}) \circ d\phi^i(X_s) + \sum_{S < s \leq T} < \alpha_{s-}, Exp_{X_{s-}}^{-1} X_s - \Delta\phi^i(X_s) D_i > (X_{s-})$$

Soit un changement de coordonnées sur l'ouvert U : (U,ψ) est une nouvelle carte et $\psi^j(X) = \xi^j(\phi(X))$ dans U. On applique la formule de Itô à l'expression (8) :

$$\begin{aligned} & \int_S^T < \alpha_{s-}, \frac{\partial}{\partial \xi^j} > (X_{s-}) \circ d\psi^j(X_s) + \sum_{S < s \leq T} < \alpha_{s-}, Exp_{X_{s-}}^{-1} X_s - \Delta\psi^j(X_s) \frac{\partial}{\partial \xi^j} > (X_{s-}) \\ = & \int_S^T < \alpha_{s-}, \frac{\partial}{\partial \xi^j} > D_i \psi^j(X_{s-}) \circ d\phi^i(X_s) \\ + & \sum_{S < s \leq T} < \alpha_{s-}, \frac{\partial}{\partial \xi^j} > (X_{s-})[\psi^j(X_s) - \psi^j(X_{s-}) - D_i \psi^j(X_{s-}) \Delta\phi^i(X_s)] \\ + & < \alpha, Exp_{X_{s-}}^{-1} X_s - \frac{\partial}{\partial \xi^j} > (X_{s-}) \Delta\psi^j(X_s) \end{aligned}$$

Après avoir simplifié et remarqué que :

$$< \alpha, D_i > = < \alpha, \frac{\partial}{\partial \xi^j} > D_i \psi^j,$$

ce qui permet de retrouver l'expression (8) en fonction des premières coordonnées. □

Cette intégrale a les propriétés suivantes qui généralisent le cas continu (cf [11], lemmes 3.1 et 3.3).

Proposition 2.4 *Soit f une fonction de classe C^∞ sur V et α un processus 1-forme :*

(i) Si $\alpha = df$,

$$\int_o^t \alpha \circ dX = f(X_t) - f(X_o) - \sum_{s \leq t} [f(X_s) - f(X_{s-}) - < df, Exp_{X_{s-}}^{-1} X_s > (X_{s-})].$$

(ii) Soit M la semi-martingale réelle $\int_o^\cdot \alpha \circ dX$; alors :

$$\int_o^\cdot f(X) \circ dM = \int_o^\cdot f\alpha \circ dX.$$

Preuve : (*i*) Soit S et T deux temps d'arrêt tels que $X 1_{]S,T]}$ reste dans un même ouvert de carte (U, φ) :

$$\int_S^T df \circ dX = \int_S^T D_i f(X_{s-}) \circ d\varphi^i(X_s) + \sum_{S < s \leq T} < df, Exp_{X_{s-}}^{-1} X_s - \Delta\varphi^i(X_s) D_i >$$

Par ailleurs, la formule de Itô entre S et T donne :

$$f(X_T) - f(X_S) = \int_S^T D_i f(X_{s-}) \circ d\varphi^i(X_s) + \sum_{S < s \leq T} [f(X_s) - f(X_{s-}) - D_i f(X_{s-}) \Delta\varphi^i(X_s)].$$

Le rapprochement de ces deux dernières expressions permet de mettre en évidence que $\int_S^T df \circ dX$ est indépendant du système de coordonnées. Il suffit alors d'étendre l'intégrale de 0 à t pour avoir (*i*).

Pour montrer (*ii*), il suffit d'écrire de la même façon les deux intégrales entre S et T :

$$\begin{aligned} \int_S^T f(X_s) \circ dM_s &= \int_S^T f\alpha_i(X_{s-}) \circ dX_s^i + \sum_{S < s \leq T} f(X_{s-}) < \alpha, Exp_{X_{s-}}^{-1} X_s - \Delta X_s^i D_i > (X_{s-}) \\ \int_S^T f\alpha(X_s) \circ dX_s &= \int_S^T f\alpha_i(X_{s-}) \circ dX_s^i + \sum_{S < s \leq T} < f\alpha, Exp_{X_{s-}}^{-1} X_s - \Delta X_s^i D_i > (X_{s-}) \end{aligned}$$

qui sont effectivement identiques par linéarité. □

Remarque 2.5 *De façon générale, on notera abusivement $\int_o^t$ et $\sum_{s \leq t}$ les sommes entre deux temps d'arrêt entre lesquels X reste dans un même ouvert de carte.*

3 Relèvement stochastique d'une semi-martingale cadlag

Par analogie avec le cas continu, on donne la définition suivante du relèvement horizontal d'une trajectoire.

Définition 3.1 *Soit X une semi-martingale cadlag à valeurs dans V vérifiant l'hypothèse* **H**. *On dit que U est son* **relèvement horizontal** *partant de u dans $O(V)$ si c'est une semi-martingale cadlag à valeurs dans $O(V)$ vérifiant l'hypothèse* **H** *telle que :*

$$(9) \qquad \begin{aligned} U_0 &= u \\ \pi(U) &= X \ dt \times d\mathbb{P} \text{ presque sûrement} \\ \int_0^{\cdot} \omega \circ dU_s &= 0 \ dt \times d\mathbb{P} \text{ presque sûrement} \end{aligned}$$

où ω est la 1-forme de connexion (cf définition 1.2)

C'est exactement la définition du cas continu à ceci près qu'ici les trajectoires sont des semi-martingales cadlag et non plus continues.

Théorème 3.2 *Soit X une semi-martingale cadlag à valeurs dans V telle que $X_0 = x$ presque sûrement et vérifiant l'hypothèse* **H**. *Alors, pour tout u de $O(V)$ tel que $\pi(u) = x$, X admet un unique relèvement horizontal U partant de u, solution de l'équation différentielle stochastique exprimée en coordonnées locales dans $GL(V)$:*

$$(10) \qquad \begin{aligned} U = (X,R) \quad &\textit{avec} \quad U_o = u = (x,r) \in O(V), \\ R_t^{kj} \quad &= \quad r^{kj} - \int_o^t \Gamma_{ml}^k(X_{s-}) R_{s-}^{lj} \circ dX_s^m \\ &+ \quad \sum_{s \le t} \left((\tau_{X_{s-}X_s} U_{s-})^{kj} - R_{s-}^{kj} + \Gamma_{ml}^k(X_{s-}) R_{s-}^{lj} \Delta X_s^m \right) \end{aligned}$$

Preuve : On montre d'abord que (10) admet une solution, puis que cette solution est à valeurs dans $O(V)$ et vérifie 3.1 : ceci assure l'existence du relèvement ; enfin, on montre l'unicité du relèvement.

(i) Pour un système de coordonnées fixé (U, φ), on définit l'application :

$$(11) \qquad \begin{aligned} F_m^{kj} : \{(x,r) \in GL(V), x \in U, r \text{ repère de } T_xV\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,r) &\longmapsto -\Gamma_{ml}^k(x) r^{lj} \end{aligned}$$

Il est clair que les hypothèses de régularité montrent que ces applications sont localement lipschitziennes. On utilise alors la fonction G définie par la proposition 1.7 pour récrire (10) :

$$(12) \qquad R_t^{kj} = r^{kj} + \int_o^t F_m^{kj}(U_{s-}) \circ dX_s^m +$$

$$\textstyle\sum_{s\leq t} \left(G^{kj}(X_{s-}, X_s, R_{s-}) - G^{kj}(X_{s-}, X_{s-}, R_{s-}) - \frac{\partial G^{kj}}{\partial y^m}(X_{s-}, X_{s-}, R_{s-}) \Delta X_s^m \right)$$

La série figurant dans (12), comme dans l'equation (5), est presque sûrement absolument convergente, du fait que X est une semi-martingale et que les G^{kj} admettent des dérivées d'ordre 2 localement bornées. On est alors dans les conditions de [4] (proposition 2, chapitre I) : (10) admet une solution dans $GL(V)$.

(ii) On vérifie par la formule de Itô appliquée à une solution de (10) que :

$$g_{kl}(X_t) R_t^{ki} R_t^{lj} = \delta_{ij}, \forall t,$$

ce qui prouve que cette solution appartient bien à $O(V)$. Les calculs, longs et ennuyeux, sont fondés sur la relation (cf [5]) :

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{lj}\Gamma_{ki}^l + g_{il}\Gamma_{kj}^l.$$

(iii) L'équation (10) donne que $U_s = \tau_{X_{s-}X_s} U_{s-}$, ce qui montre (cf proposition 1.9) que l'hypothèse **H** est verifiée et que le vecteur $Exp_{U_{s-}}^{-1} U_s$ est horizontal. On peut donc évaluer l'intégrale $\int \omega \circ dU$ pour montrer l'horizontalité de cette trajectoire dans $O(V)$. D'après la proposition 1.5 et l'équation (5), cette intégrale s'écrit :

$$(13) \qquad \int \omega^{ij} \circ dU = \int (R_{s-}^{-1})^{ik} \circ (dR_s^{kj} + \Gamma_{ml}^k(X_{s-}) R_{s-}^{lj} dX_s^m)$$
$$+ \sum < \omega^{ij}, Exp_{U_{s-}}^{-1} U_s > -(R_{s-}^{-1})^{ik} [\Delta R_s^{kj} + \Gamma_{ml}^k(X_{s-}) R_{s-}^{lj} \Delta X_s^m]$$

D'après (10), la partie continue de l'intégrale s'annule, et il reste la somme discrète :

$$(14) \qquad \begin{aligned} \int \omega^{ij} \circ dU &= \sum (R_{s-}^{-1})^{ik} \left[(\tau_{X_{s-}X_s} U_{s-})^{kj} - (R_{s-})^{kj} + \Gamma_{ml}^k(X_{s-}) R_{s-}^{lj} \Delta X_s^m \right] \\ &+ \sum < \omega^{ij}, Exp_{U_{s-}}^{-1} U_s > -(R_{s-}^{-1})^{ik} [\Delta R_s^{kj} + \Gamma_{ml}^k(X_{s-}) R_{s-}^{lj} \Delta X_s^m] \\ &= \sum (R_{s-}^{-1})^{ik} \left[(\tau_{X_{s-}X_s} U_{s-})^{kj} - (R_{s-})^{kj} - \Delta R_s^{kj} \right] + < \omega^{ij}, Exp_{U_{s-}}^{-1} U_s > \end{aligned}$$

Puisque $U_s = \tau_{X_{s-}X_s} U_{s-}$, le premier terme de la somme ci-dessus est nul, et comme on l'a déjà vu, $Exp_{U_{s-}}^{-1} U_s$ est horizontal ; ainsi, l'intégrale de ω le long de U est nulle, ce qui achève de montrer l'horizontalité de la trajectoire.

(iv) Pour montrer l'unicité, on procède comme Shigekawa [11], montrant d'abord une suite de lemmes adaptés au cas non continu. Soit U et V deux relèvements horizontaux de X issus de $u = (x, r)$ élément de $O(V)$. Comme le groupe G opère à droite sur $O(V)$, on peut définir le processus cadlag g à valeurs dans G :

$$(15) \qquad \forall t, U_t g_t = V_t, \text{ presque sûrement.}$$

Il s'agit de montrer que le processus g est presque sûrement l'identité.

Lemme 3.3 *Soit U une semi-martingale à valeurs dans $O(V)$, vérifiant l'hypothèse* **H** *relative à $(O(V), \tilde{m})$ et telle que :*

$$\int \omega \circ dU = O \ ; \ \pi(U) = X.$$

Alors, pour tout t, $U_t = \tau_{X_{t-}X_t} U_{t-}$ presque sûrement.

Preuve du lemme : Les sauts de la semi-martingale nulle $\int \omega \circ dU$ sont nuls ; or, ils sont de la forme

$$< \omega, Exp_{U_{s-}}^{-1} U_s > (U_{s-}).$$

C'est à dire que le vecteur $Exp_{U_{s-}}^{-1} U_s$ est horizontal. Donc, le (ii) de la proposition 1.9 montre que la géodésique τ de conditions initiales $(U_{s-}, Exp_{U_{s-}}^{-1} U_s)$ (qui vérifie $\tau(0) = U_{s-}$ et $\tau(1) = U_s$ par définition de l'exponentielle) est le relèvement horizontal de $\pi \circ \tau$, géodésique reliant $\pi(U_{s-}) = X_{s-}$ à $\pi(U_s) = X_s$.

Par définition du transport parallèle (4), on a donc :

$$U_s = \tau(1) = \tau_{X_{s-}X_s} U_{s-}.$$

□

Lemme 3.4 *Soient deux relèvements horizontaux U et V de la semi-martingale X et g le processus à valeurs dans le groupe G défini par $Ug = V$. Alors g est continu.*

Preuve : Le lemme précédent montre d'abord que :

$$U_s = \tau_{X_{s-}X_s} U_{s-} \text{ et } V_s = \tau_{X_{s-}X_s} V_{s-},$$

soit, en utilisant le fait que le transport parallèle commute avec l'action de G (cf [6]) :

$$\tau_{X_{s-}X_s}(U_{s-}g_{s-}) = V_s = \tau_{X_{s-}X_s}(U_{s-})g_s = \tau_{X_{s-}X_s}(U_{s-}g_s).$$

Le transport parallèle est un isomorphisme entre les fibres et G agit librement sur $O(V)$:

$$U_{s-}g_{s-} = U_{s-}g_s, \text{ soit } g_{s-} = g_s,$$

et le processus g est bien continu. □

Lemme 3.5 *Soit U une semi-martingale à valeurs dans $O(V)$ vérifiant l'hypothèse* **H** *et g une semi-martingale continue à valeurs dans G. Alors la semi-martingale $V = Ug$ vérifie l'hypothèse* **H** *et :*

$$\int \omega \circ dV = \int ad\ g_s^{-1}(\omega) \circ dU_s + \int i \circ dg_s$$

où i est la 1-forme canonique sur G (cf l'équation (2))

Preuve : Il est clair que si U vérifie l'hypothèse **H**, il en est de même de $U.g$: l'action de G sur $O(V)$ préserve angles et distances et donc transforme une géodésique de U_{s-} à U_s en géodésique de V_{s-} à V_s. On note :

$$\begin{aligned}\varphi : O(V) \times G &\longrightarrow O(V)\\ (u,g) &\longmapsto ug,\end{aligned}$$

et l'on rappelle les notations de la section 1 :

$$\begin{aligned}\forall u \in O(V), \varphi_u = \varphi(u,.) : G &\longrightarrow O(V)\\ \forall g \in G, R_g = \varphi(.,g) : O(V) &\longrightarrow O(V).\end{aligned}$$

Soit (u^α) un système de coordonnées locales dans $O(V)$ et (g^k) dans G. La formule de Itô permet de calculer $V^\alpha = \varphi^\alpha(U,g)$:

$$\begin{aligned}V^\alpha &= \int \left[\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial u^\beta}(U_{s-},g_s) \circ dU_s^\beta + \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial g^k}(U_{s-},g_s) \circ dg_s^k\right]\\ &+ \sum \left[\varphi^\alpha(U_s,g_s) - \varphi^\alpha(U_{s-},g_s) - \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial u^\beta}(U_{s-},g_s)\Delta U_s^\beta\right].\end{aligned} \tag{16}$$

Puis l'on calcule l'intégrale de ω le long de V :

$$\begin{aligned}\int \omega \circ dV &= \int <\omega, \frac{\partial}{\partial u^\alpha}> (V_{s-})[\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial u^\beta}(U_{s-},g_s) \circ dU_s^\beta + \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial g^k}(U_{s-},g_s) \circ dg_s^k\\ &+ \sum <\omega, \frac{\partial}{\partial u^\alpha}> (V_{s-}) \left[\varphi^\alpha(U_s,g_s) - \varphi^\alpha(U_{s-},g_s) - \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial u^\beta}(U_{s-},g_s)\Delta U_s^\beta\right]\\ &+ \sum \left[<\omega, Exp_{V_{s-}}^{-1} V_s> - <\omega, \frac{\partial}{\partial u^\alpha}> (V_{s-})\Delta V_s^\alpha\right].\end{aligned} \tag{17}$$

Or, en utilisant la proposition (1.4)(ii), il vient :

$$<\omega, \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial u^\beta}\frac{\partial}{\partial u^\alpha}> (ug) \;= <ad(g^{-1})(\omega), \frac{\partial}{\partial u^\beta}> (u)$$

et l'on obtient par dualité :

$$<\omega, \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial g^k}\frac{\partial}{\partial u^\alpha}> (\varphi_u(g)) \;= <(d\varphi_u)^*(\omega), \frac{\partial}{\partial g^k}> (g)$$

où l'on reconnaît $< i, \frac{\partial}{\partial g^k} >$ d'après la proposition (1.4)(iii).
L'expression (17) se récrit, après simplification :

$$\begin{aligned}\int \omega \circ dV &= \int <ad(g_s^{-1})(\omega), \frac{\partial}{\partial u^\beta}> (U_{s-}) \circ dU_s^\beta\\ &+ \int < i, \frac{\partial}{\partial g^k}> (g_s) \circ dg_s^k\\ &+ \sum \left[<\omega, Exp_{V_{s-}}^{-1} V_s> - <ad(g_s^{-1})(\omega), \frac{\partial}{\partial u^\beta}> (U_{s-})\Delta U_s^\beta\right]\end{aligned} \tag{18}$$

Calculons par ailleurs l'intégrale du processus à valeurs 1.forme $ad(g_\cdot^{-1})(\omega)$ le long de U :

$$\int ad(g_s^{-1})(\ \omega\ ) \circ dU_s = \int < ad(g_s^{-1})(\omega), \frac{\partial}{\partial u^\beta} > (U_{s-}) \circ dU_s^\beta$$

$$+ \sum \left[< ad(g_s^{-1})(\omega), Exp_{U_{s-}}^{-1} U_s > - < ad(g_s^{-1})(\omega), \frac{\partial}{\partial u^\beta} > (U_{s-}) \Delta U_s^\beta \right] \tag{19}$$

Soit alors la géodésique τ de U_{s-} à U_s ; on a donc :

$$\dot{\tau}(0) = Exp_{U_{s-}}^{-1} U_s.$$

La remarque première de la démonstration indique que la géodésique de V_{s-} à V_s est définie sur $[0,1]$ par :

$$t \mapsto \tau(t) g_s$$

c'est-à-dire $R_{g_\cdot} \circ \tau$, dont le vecteur tangent à l'origine vérifie :

$$dR_{g_s}(\dot{\tau}(0)) = Exp_{V_{s-}}^{-1} V_s$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} < \omega, Exp_{V_{s-}}^{-1} V_s > &= < (dR_{g_s})^*(\omega), Exp_{U_{s-}}^{-1} U_s > \\ &= < ad(g_s^{-1})(\omega), Exp_{U_{s-}}^{-1} U_s > \end{aligned} \tag{20}$$

ce qui achève de montrer le lemme en rapprochant les égalités (18),(19) et (20).□

On est maintenant en mesure de montrer l'unicité du relèvement horizontal. Soient U et V deux relèvements de X et g la semi-martingale définie par (15) : le lemme (3.4) montre que g est continu. Puis, de l'horizontalité de V et du lemme (3.5) on tire :

$$0 = \int \omega \circ dV = \int ad(g_\cdot^{-1})(\omega) \circ dU + \int i \circ dg \tag{21}$$

Or, $\int \omega \circ dU = 0$; on définit pour tout (i,j) la semi-martingale réelle :

$$M^{ij} = \int_0^\cdot \omega^{ij} \circ dU$$

qui est nulle par horizontalité de U. On peut exprimer $ad(g_\cdot^{-1})(\omega)$ sur la base (E^{ij}) de $\mathcal{G}$:

$$ad(g_\cdot^{-1})(\omega) = ad(g_\cdot^{-1})(E^{ij})\omega^{ij}$$

Il vient alors :

$$\int ad(g_\cdot^{-1})(\omega) \circ dU = \int ad(g_\cdot^{-1})(E^{ij})\omega^{ij} \circ dU$$

la proposition $(1.4)(ii)$ implique :

$$\int ad(g_\cdot^{-1})(\omega) \circ dU = \int ad(g_s^{-1})(E^{ij}) \circ dM_s^{ij}$$

qui est donc nulle. On obtient donc par (21) que l'intégrale de la 1-forme canonique i le long de g est nulle. Le lemme (3.3) de ([11]) montre que $g_\cdot \equiv e$, soit $U \equiv V$. □

4 Développement stochastique

Rappelons d'abord quelques définitions:

Définition 4.1 La forme canonique de *$O(V)$ est la 1-forme θ sur $O(V)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ donnée par:*

$$\forall u \in O(V) \ , \ \forall X \in T_u O(V) \ , \ \theta_u(X) \ = \ u^{-1}((d\pi)_u(X))$$

où u est considéré comme un isomorphisme de $\mathbb{R}^d$ sur $T_{\pi(u)}V$.

On note $(L_m; m = 1, ..., d)$ la famille des champs de vecteurs horizontaux canoniques sur $O(V)$ (voir ([5]) p.265) ; c'est-à-dire la famille de champs de vecteurs sur $O(V)$ vérifiant :

(22) $$< \omega, L_m > = 0 \text{ et } \theta_u^j(L_m) = \delta_{jm}$$

Soit U le relèvement stochastique de X, semi-martingale càdlàg dans V vérifiant l'hypothèse **H**, issu de $u = (x, r)$.

Définition 4.2 *On appelle* **développement stochastique** *de X la semi-martingale vectorielle définie par:*

$$t \ \mapsto \ \int_0^t \theta \circ dU_s$$

On peut montrer le résultat suivant :

Proposition 4.3 *Soit U une semi-martingale càdlàg à valeurs dans $O(V)$ telle que $\pi(U)$ vérifie l'hypothèse* **H** *et M une semi-martingale càdlàg vectorielle nulle en 0 de dimension d. Il y a équivalence entre :*
(i) U est solution de l'E.D.S. : $\forall f \in C_k^\infty(O(V), \mathbb{R})$,

(23) $$\begin{aligned} f(U_t) \ &= \ f(U_0) \ + \ \int_0^t L_i f(U_{s-}) \circ dM_s^i \\ &+ \ \sum_{s \leq t} \Big(f(Exp_{U_{s-}}(L_i(U_{s-})\Delta M_s^i)) \ - \ f(U_{s-}) \ - L_i f(U_{s-})\Delta M_s^i \Big) \end{aligned}$$

(ii) U est le relèvement horizontal de $\pi(U)$ et M son développement stochastique.

Preuve : $(i) \Rightarrow (ii)$: Soit U une solution de (23). Il s'agit de montrer que $\int \omega \circ dU \ = \ 0$ et $\int \theta \circ dU \ = \ M$.

Il faut donc tout d'abord s'assurer que U satisfait l'hypothèse **H**. Or l'équation (23) donne :

(24) $$U_s \ = \ Exp_{U_{s-}}(L_i(U_{s-}) \ \Delta M_s^i)$$

Le vecteur $L_i(U_{s-}) \ \Delta M_s^i$ est horizontal dans $T_{U_{s-}}O(V)$ et il n'y a, par hypothèse, qu'une géodésique γ de X_{s-} à X_s. D'après la proposition (1.9), la géodésique dans $O(V)$ de conditions initiales $(U_{s-}, L_i(U_{s-}) \ \Delta M_s^i)$ est donc unique comme relevé horizontal de γ, et relie U_{s-} à U_s. Ainsi U satisfait-il l'hypothèse **H**.

Lemme 4.4 *Soit η une 1-forme sur $O(V)$. Si U est une solution de (23), alors*

$$\int \eta \circ dU \;=\; \int <\eta, L_i> (U_{s-}) \circ dM_s^i$$

preuve : En notant encore une fois (u^α) un système de coordonnées dans $O(V)$ on a:

$$(25) \qquad \begin{aligned} \int \eta \circ dU \;&=\; \int <\eta, \frac{\partial}{\partial u^\alpha}> (U_{s-}) \circ dU_s^\alpha \\ &+\; \sum \left(<\eta, Exp_{U_{s-}}^{-1}\, U_s> \;-\; <\eta, \frac{\partial}{\partial u^\alpha}> (U_{s-})\, \Delta U_s^\alpha \right) \end{aligned}$$

En utilisant (23) avec $f \;=\; \varphi^\alpha$ et (24) :

$$(26) \begin{aligned} \int \eta \circ dU \;&=\; \int <\eta, \frac{\partial}{\partial u^\alpha}> \;\; L_i\varphi^\alpha(U_{s-}) \;\circ\; dM_s^i \\ &+\; \sum <\eta, \frac{\partial}{\partial u^\alpha}> (U_{s-}) \left(\varphi^\alpha(U_s) \;-\; \varphi^\alpha(U_{s-}) \;-\; L_i\varphi^\alpha(U_{s-})\Delta M_s^i \right) \\ &+\; \sum \left(<\eta, L_i(U_{s-})\Delta M_s^i> \;-\; <\eta, \frac{\partial}{\partial u^\alpha}> (U_{s-})\Delta U_s^\alpha \right) \end{aligned}$$

Après avoir simplifié :

$$\Delta U_s^\alpha \;=\; \varphi^\alpha(U_s) \;-\; \varphi^\alpha(U_{s-})$$

et remarqué que dans les coordonnées locales :

$$<\eta, L_i> = <\eta, \frac{\partial}{\partial u^\alpha}> \;\; L_i\varphi^\alpha$$

il vient :

$$\int \eta \circ dU \;=\; \int <\eta, L_i> (U_{s-}) \circ dM_s^i$$

quelque soit le système de coordonnées, ce qui montre le lemme. □

Si l'on applique ce lemme successivement aux 1-formes ω et θ, il vient :

$$\int \omega \circ dU \;=\; \int <\omega, L_i> (U_{s-}) \;\circ\; dM_s^i$$

Or $<\omega, L_i> \;=\; 0$ et U est bien alors le relèvement horizontal de $\pi \circ U$. Puis, en utilisant (22), il vient pour la 1-forme θ :

$$\int \theta \circ dU \;=\; \int <\theta, L_i> (U_{s-}) \circ dM_s^i \;=\; M$$

et M est bien alors le développement stochastique de U; ce qui achève de montrer que (i) implique (ii).

Pour montrer la réciproque, on considère f dans $C_k^\infty(O(V), \mathbb{R})$ et la 1-forme différentielle df sur $O(V)$.

Grâce à la proposition 2.4 (i), on obtient l'intégrale de df le long de U :

$$(27)\qquad \begin{aligned}\int_0^t df \circ dU &= f(U_t) - f(U_0)\\ &- \sum_{s\leq t}\Big(f(U_s) - f(U_{s-}) - < df, Exp_{U_{s-}}^{-1}\, U_s >\Big)\end{aligned}$$

On peut décomposer df sur la base $\mathcal{B}$ de $T^*GL(V)$ (cf.[6] p.122) :

$$\mathcal{B} = (\theta^k, \omega^{ij})_{1\leq k\leq d; 1\leq i,j\leq d}$$

duale de la base de $TGL(V)$:

$$(L_k, E_{ij}^*)_{1\leq k\leq d; 1\leq i,j\leq d}$$

où (E_{ij}) est la base de $\mathcal{GL}(V)$ déjà utilisée. Alors l'intégrale de df s'écrit :

$$\int df \circ dU = \int L_i f(U_{s-})\theta^i \circ dU_s + \int E_{ij}^* f(U_{s-})\omega^{ij} \circ dU_s$$

Du fait que U est horizontale, $\int \omega^{ij} \circ dU = 0$ et la proposition 2.4(ii) montre que le deuxième terme de cette somme est nul.

Par ailleurs, par hypothèse $M^i = \int \theta^i \circ dU$, d'où :

$$(28)\qquad \int df \circ dU = \int L_i f(U_{s-}) \circ dM_s^i$$

En utilisant le fait que $Exp_{U_{s-}}^{-1}\, U_s$ est horizontal, il s'exprime dans la base (L_i):

$$Exp_{U_{s-}}^{-1}\, U_s = < \theta^i, Exp_{U_{s-}}^{-1}\, U_s > L_i(U_{s-})$$

et par définition du développement stochastique:

$$(29)\qquad Exp_{U_{s-}}^{-1}\, U_s = \Delta M_s^i\, L_i(U_{s-})$$

En rapprochant (27), (28) et (29), on obtient (23). Ainsi (ii) est-il vérifié. □

On peut enfin montrer :

Proposition 4.5 *Soient X une semi-martingale càdlàg à valeurs dans V vérifiant l'hypothèse* **H**, *U son relèvement horizontal et M son développement stochastique. Alors les filtrations naturelles de X, U et M sont identiques.*

Ce résultat généralise ce qui se passe dans le cas continu (voir [1] par exemple), et se montre d'ailleurs de la même façon.

Ce genre de considérations permet d'espérer que des problèmes de filtrage dont les observations sont des semi-martingales càdlàg à valeurs dans une variété peuvent être résolus.

Références

[1] J.M. BISMUT, "Principes de mécanique aléatoire", Lecture Notes in Maths. 866, Springer-Verlag, 1981.

[2] R.W.R. DARLING, "Approximating Itô Integrals of Differential Forms and Geodesic Deviations."Z. Warscheinlichkeitstheorie 65, 563-572, 1984.

[3] M.EMERY , "Stochastic Calculus on Manifolds" , Universitext, Springer-Verlag Publ. Berlin 1989 .

[4] A. ESTRADE, " Calcul stochastique discontinu sur les Groupes de Lie", thèse université d'Orléans, 1990.

[5] N. IKEDA - S. WATANABE,"Stochastic Differential Equations and diffusion processes", North Holland, Amsterdam, 1981.

[6] S.KOBAYASHI-K.NOMIZU, "Foundations of differential geometry", I,II, Intersciences Publ, New York, 1963.

[7] P.MALLIAVIN, "Formules de la moyenne, calcul des perturbations et théorèmes d'annulation pour les formes harmoniques",Journal of Functional Analysis, Vol. 17-3, 274-291, 1974.

[8] P.A. MEYER,"Géométrie stochastique sans larmes", Séminaire de Probabilités XV, Lecture Notes in Mathematics 850, Springer 1981.

[9] J. PICARD, " Calcul stochastique avec sauts sur une variété", à paraître 1991.

[10] M. PONTIER,"Approximation d'un filtre avec observation sur une variété compacte", Stochastics 24,285-304,1988.

[11] I. SHIGEKAWA, "On stochastic horizontal lifts", Z. Wahrsch. 59, 211-221, 1982.