Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Jean Mémin

Leszek Słominski

Condition UT et stabilité en loi des solutions d'équations différentielles stochastiques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 25 (1991), p. 162-177

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1991__25__162_0>

CONDITION UT ET

STABILITÉ EN LOI DES SOLUTIONS

D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES

Jean MEMIN
Institut Mathématique
Université de RENNES1
RENNES

Leszek SŁOMINSKI
Institut Mathématique
Université M. Kopernik
TORUN

Introduction

Soit $((\Omega^n, \mathcal{F}^n, (\mathcal{F}_t^n), P^n))$ une suite d'espaces filtrés satisfaisant aux conditions habituelles, et (Z^n) une suite de semimartingales réelles, où Z^n est défini sur $((\Omega^n, \mathcal{F}^n, (\mathcal{F}_t^n), P^n))$.

Dans [12] Stricker a montré que si (Z^n) satisfait une certaine condition (que nous noterons UT), cette suite est tendue pour la topologie faible de Meyer-Zheng [9] sur l'espace $(\mathbf{D}, \mathcal{D})$. Dans [6] cette hypothèse a été reprise, et joue un grand rôle pour obtenir la convergence en loi d'une suite d'intégrales stochastiques (théorème 2-6) ; Słominski [10] utilise à son tour UT pour sa démonstration de stabilité de solutions d'équations différentielles stochastiques lipschitziennes. Enfin Kurtz et Protter ont donné dans [7] des résultats qui couvrent les deux précédents [6] et [10] ; plus précisément leur théorème 2-2 est exactement le théorème 2-6 de [6], leur théorème 5-4 concernant la stabilité des solutions d'EDS est lui, plus général, puisqu'il contient le cas où les coefficients sont continus et peuvent sous certaines conditions dépendre de tout le passé.

D'autres travaux s'apparentent aux précédents, quant au type de résultat obtenu ([3], [11], [13], [14], [15]) : stabilité des solutions d'une suite de solutions d'EDS obtenue à partir de la convergence en loi de la suite des semimartingales directrices, cette suite satisfaisant en outre une condition supplémentaire (par exemple de type Lindeberg pour [13], [15], ou "Lindeberg d'ordre 1" pour [3] et [11]).

Nous nous proposons dans cet article de faire le point sur la condition UT (qui est une condition naturelle d'uniforme continuité de l'opération : Intégration stochastique), en rappelant les résultats de [6], puis en donnant les différentes présentations de cette condition, (inspirés en cela par [7]). Une illustration en sera l'étude du cas où la semimartingale Z limite est continue (les conditions de Lindeberg de [3], [11], [14], [15] étant alors des cas particuliers de UT

Dans la suite on se proposera de généraliser le résultat principal de [10], en montrant la stabilité des solutions d'équations différentielles stochastiques, sous la condition de convergence de la suite des semimartingales directrices, et de UT pour cette suite, les coefficients de l'équation étant continus. La méthode consistant à approcher les coefficients continus par des coefficients de classe C^2 est élémentaire, et permet d'obtenir des résultats beaucoup plus généraux (coefficients dépendant de tout le passé du processus) du type de ceux obtenus dans [7].

Les notations utilisées sont les notations usuelles que l'on peut trouver dans [2] ou [5] par exemple ; en particulier, l'intégrale stochastique de H par rapport à Z sera notée $H \cdot Z$; pour les questions de convergence en loi, nous ferons très souvent référence à [5].

1 La condition UT

Considérons pour chaque $n \epsilon \mathbf{N}$, une semimartingale Z^n définie sur $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, (\mathcal{F}^n_t), P^n)$; on note $\mathcal{H}^n$ l'ensemble des processus prévisibles simples bornés par 1, autrement dit : $\mathcal{H}^n = \{H^n;$ pour tout $t \epsilon \mathbf{R}^+, H^n_t = Y^{n,0} + \sum_{i=1}^p Y^{n,i} 1_{[t_i, t_{i+1}[}(t), Y^{n,i} \mathcal{F}^n_{t_i}$ mesurable,$p \epsilon \mathbf{N}, 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots.. < t_p < \infty, | Y^{n,i} | \leq 1\}$.

1-1 Définition. *On dira que (Z^n) satisfait à la condition UT si, pour chaque $t > 0$, l'ensemble $\{H^n \cdot Z^n_t, H^n \epsilon \mathcal{H}^n, n \epsilon \mathbf{N}\}$ est P^n-borné en probabilité.*

Si pour tout $n, Z^n = Z$, la condition UT exprime simplement que Z est une $((\mathcal{F}_t), P)$ semimartingale (théorème de caractérisation de Bichteler-Dellacherie-Mokobodski, [2] chap 8, th. 50), et c'est tout naturellement que nous avons le résultat suivant ([6], théorème 2-5) :

1-2 Lemme. *Soit (K^n) une suite de processus cadlag définie sur $((\Omega^n, \mathcal{F}^n, (\mathcal{F}^n_t), P^n))$, à valeurs dans $\mathbf{R}^d$, et (K, Z) un processus à valeurs dans $\mathbf{R}^{d+1}$, défini sur un $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$; si les distributions finidimensionnelles (en t) de (K^n, Z^n) convergent vers celles de (K, Z) pour tout ensemble $\{t_1, t_2, \ldots t_q\}$ appartenant à un ensemble dense de $\mathbf{R}^+$ contenant 0, et si (Z^n) satisfait UT pour les filtrations $(\mathcal{F}^{K^n, Z^n}_t)$, alors Z est une semimartingale pour la filtration $(\mathcal{F}^{K,Z}_t)$.*

Pour le théorème de caractérisation de UT, les propriétés suivantes sont utiles ([6] lemme 2, [12]).

1-3 Lemme. *Sous la condition UT pour (Z^n) pour chaque $t < \infty$, on a les propriétés suivantes : (i) : la famille $\{(Z^n)^*_t = sup_{s \leq t} \mid Z^n_s \mid, n \epsilon \mathbf{N}\}$ est P^n-bornée en probabilité;*

(ii): la famille $\{[Z^n, Z^n]_t, n \epsilon \mathbf{N}\}$ est P^n-bornée en probabilité

Considérons pour $a > 0$ donné la décomposition :

$$Z^n = \hat{Z}^{n,a} + B^{n,a} + M^{n,a}$$

où $\hat{Z}^{n,a} = \sum_{s \leq t} \Delta Z^n_s 1_{\{|\Delta Z^n_s| > a\}}$; $B^{n,a}$ et $M^{n,a}$ sont les parties processus à variation finie prévisible et martingale locale de la décomposition canonique de la semimartingale spéciale $Z^n - \hat{Z}^{n,a}, M^{n,a}$ ayant des sauts d'amplitude bornée par $2a$.

1-4 Théorème. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) : la suite (Z^n) vérifie la condition UT ;
(ii) : Il existe $a > 0$ tel que pour tout $t < \infty$ on ait :
1) $(Var(\hat{Z}^{n,a})_t)$ est P^n-bornée en probabilité; ($Var(X)$ désigne le "processus variation" du processus à variation finie X)
2) $(Var(B^{n,a})_t)$ est P^n-bornée en probabilité
3) $([M^{n,a}, M^{n,a}]_t)$ est P^n-bornée en probabilité.
(iii) : Soit $\mathcal{K}^n$ l'ensemble des processus cadlag $(\mathcal{F}^n_t)$-adaptés à valeurs réelles, bornés par 1; alors, pour chaque $t < \infty$, la famille $\{X^n_- \cdot Z^n_t : X^n \epsilon \mathcal{K}^n, n\epsilon \mathbf{N}\}$ est P^n-bornée en probabilité.
(iv) : Pour chaque $\varepsilon > 0$, pour chaque $t < \infty$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour chaque X^n cadlag $(\mathcal{F}^n_t)$-adapté, pour chaque n on ait :

$$P^n[sup_{s\leq t} \mid X^n_{s-} \mid > \alpha] < \alpha \Rightarrow P^n[sup_{s\leq t} \mid X^n_- \cdot Z^n_s \mid > \varepsilon] < \varepsilon$$

Démonstration : En exprimant la propriété de P^n-bornitude en Probabilité de (iii), il est clair que (iii) et (iv) sont équivalentes, et que (iii)⇒(i) ; nous montrerons les implications (i)⇒(ii)⇒(iii).

a) (ii)⇒(iii) : 1)+2) implique que $(Var(Z^n - M^{n,a})_t, n\epsilon\mathbf{N})$ est P^n-bornée en probabilité de sorte que $(Z^n - M^{n,a})$ vérifie (iii) ; d'après 3), soit $\varepsilon > 0$, il existe K tel que $P^n[[M^{n,a}, M^{n,a}]_t > K] < \varepsilon$ pour tout n. Considérons alors la suite des temps d'arrêt (T^n) (relatifs à $(\mathcal{F}^n_t)$), définis par $T^n = inf\{s : [M^{n,a}, M^{n,a}]_s > K\} \wedge t$. D'après ce qui précède, on a $P^n[T^n < t] < \varepsilon$.

Soit $H^n \epsilon \mathcal{K}^n$, on a les inégalités : $P^n[\mid H^n \cdot M^{n,a}_t \mid > K] \leq P^n[(H^n \cdot M^{n,a})^*_t > K] \leq P^n[(H^n \cdot M^{n,a})^*_{T^n} > K] + \varepsilon \leq 1/K^2 E[(H^n \cdot M^{n,a})^*_{T^n})^2] + \varepsilon \leq 1/K^2 E[[M^{n,a}, M^{n,a}]_{T^n}] + \varepsilon \leq \frac{K+4a^2}{K^2} + \varepsilon$; cette quantité est aussi petite que l'on veut, de sorte que $(M^{n,a})$ vérifie (iii) d'où le résultat (iii) pour (Z^n).

b) (i)⇒ (ii) : D'après le lemme 1-3, $([Z^n, Z^n]_t)$ est P^n-bornée en probabilité, on en déduit que pour tout $a > 0$, $(\sum_{s\leq t} \mid \Delta Z^n_s \mid \mathbf{1}_{\{|\Delta Z^n_s|>a\}})$ est aussi P^n-bornée en probabilité, d'où la propriété 1) de (ii). On en déduit que $(B^{n,a} + M^{n,a})$ vérifie UT. D'après le lemme 1-3 (ii), étant donné $\varepsilon > 0$ on peut trouver K tel que $P^n[[B^{n,a} + M^{n,a}, B^{n,a} + M^{n,a}]_t > K] < \varepsilon$; soit les temps d'arrêt T^n définis par $T^n = inf\{s : [B^{n,a} + M^{n,a}, B^{n,a} + M^{n,a}]_s > K\} \wedge t$; on a $P^n[T^n < t] < \varepsilon$ et $K + 4a^2 \geq E^n[[B^{n,a} + M^{n,a}, B^{n,a} + M^{n,a}]_{T^n}] \geq E^n[[M^{n,a}, M^{n,a}]_{T^n}]$ de sorte que $P^n[[M^{n,a}, M^{n,a}]_t > K] \leq \varepsilon + (1/K^2)(K + 4a^2)$ d'où la propriété (ii)-2).

De ce qui précède, on déduit que $(B^{n,a})$ vérifie UT ; comme $B^{n,a}$ est prévisible, on peut approcher $Var(B^{n,a})$ par des intégrales de Stieltjes du type $\sum Y^n_{t_i}(B^{n,a}_{t_{i+1}} - B^{n,a}_{t_i})$ avec $Y^n_{t_i} = \pm 1$, la condition UT pour $(B^{n,a})$ implique donc (ii)-3 ∎

On rassemble maintenant dans la proposition suivante, des conditions assurant la vérification de UT pour (Z^n), lorsque l'on a la convergence en loi de (Z^n) vers Z, au sens de la convergence étroite des mesures de probabilité sur l'espace $\mathbf{D}$ de Skorokhod. Nous noterons $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ cette convergence, et $\xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbf{D}^d)}$ s'il s'agit de convergence de processus à valeurs dans $\mathbf{R}^d$.

1-5 Proposition. *Supposons que $Z^n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$, on a alors les assertions :*
a) (Z^n) satisfait UT est équivalent à la propriété (ii)-2 du théorème 1-4 ;

b) Si (Z^n) est une suite de martingales locales et si pour chaque $t < \infty$ on a

$$sup_n E^n[sup_{s\leq t} \mid \Delta Z_s^n \mid] < \infty$$

alors (Z^n) vérifie UT ;
c) si (Z^n) est une suite de surmartingales uniformément minorées par un réel b, alors (Z^n) vérifie UT .
d) Il existe $a > 0$, et pour chaque $\alpha > 0$ des temps d'arrêt T_n^α tels que $P^n[T_n^\alpha \leq \alpha] \leq \frac{1}{\alpha}$ et

$$Sup_n[E^n[[M^{n,a}, M^{n,a}]_{t\wedge T_n^\alpha} + Var(B^{n,a})_{t\wedge T_n^\alpha}]] < \infty$$

si et seulement si (Z^n) vérifie UT.

Commentaire. a) est le lemme 3-1 de [6] ; b) compte tenu de a), est dû à Jacod (on peut le trouver dans [5] p 342) ; c) est montré dans le lemme 3-2 de [6]. Arrêtons nous un peu sur d) qui est la condition c2-2(i) de Kurtz et Protter dans [7] : si d) est satisfait, alors $(Var(B^{n,a})_t, n\epsilon\mathbf{N})$ est P^n-bornée en probabilité et d'après a) (Z^n) satisfait UT.

Réciproquement, utilisant la caractérisation (ii) du théorème 1-4, définissant $T_n^c = inf\{t : [M^{n,a}, M^{n,a}]_t \wedge Var(B^{n,a})_t \geq c\}$, on a bornitude des espérances $E^n[[M^{n,a}, M^{n,a}]_{t\wedge T_n^c}]$ et $E^n[Var(B^{n,a})_{t\wedge T_n^c}]$, et il existe c_α tel que $P^n[T_n^{c_\alpha} \leq \alpha] \leq \frac{1}{\alpha}$, d'où d) ∎

1-6 Lemme. *Si (Z^n) vérifie UT. et si (H^n) est une suite de processus prévisibles (relativement à $(\mathcal{F}_t^n)$), uniformément localement bornée, alors la suite $(H^n \cdot Z^n)$ vérifie UT.*

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$ et $N < \infty$, on choisit des temps d'arrêt T^n et un nombre K de telle façon que $P^n[T^n < N] < \varepsilon/2$ et $sup_{t\leq N} \mid H_t^{n,T^n} \mid \leq K$; on a immédiatement que $((H^n \cdot Z^n)^{T^n})$ vérifie UT, et pour toute suite (U^n) de processus prévisibles bornée par 1, on a : $P^n[sup_{t\leq N} \mid U^n \cdot ((H^n - H^{n,T^n}) \cdot Z^n)_t \mid > \varepsilon/2] < \varepsilon/2$, d'où le résultat ∎

1-7 Lemme. *Soit (Z^n) satisfaisant UT, et soit F une fonction de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ de classe $\mathbf{C}^{2,1}$, alors $((F(Z_t^n, t)_{t\geq 0})$ vérifie UT.*

Démonstration : c'est tout à fait élémentaire, en utilisant la formule de Ito, le lemme 1-6 précédent et les deux assertions du lemme 1-3 ∎

On donne maintenant le théorème de convergence des intégrales stochastiques.

1-8 Théorème. *Soit (K^n, Z^n) une suite de processus cadlag définis sur $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, (\mathcal{F}_t^n), P^n)$, à valeurs réelles et tels que (Z^n) vérifie UT. Alors*

a) Si $(K^n, Z^n) \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbf{D}^2)} (K, Z)$ on a :

$$(K^n, Z^n, K_-^n \cdot Z^n) \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbf{D}^3)} (K, Z, K_- \cdot Z)$$

b) Si $(K^n, Z^n) \xrightarrow{P^n} (K, Z)$ *on a :*

$$K^n_- \cdot Z^n \xrightarrow{P^n} K_- \cdot Z$$

Commentaire :Le a) est le théorème 2-6 de [6] ; le b) est obtenu en remarquant que tous les raisonnements conduits dans les démonstrations de [6] s'appliquent encore plus facilement si on a au départ la convergence en P^n-probabilité ; cette remarque a été faite dans [10], et figure dans l'énoncé du théorème de convergence 2-2 de [7]. ∎

En faisant jouer un rôle symétrique à K^n et à Z^n lorsque (K^n) et (Z^n) vérifient UT et en utilisant la formule d'intégration par parties :

$$K^n Z^n = K^n_0 Z^n_0 + K^n_- \cdot Z^n + Z^n_- \cdot K^n + [K^n, Z^n]$$

on obtient le résultat suivant :

1-9 Corollaire. *Soit* (K^n, Z^n) *une suite de semimartingales définies sur* $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, (\mathcal{F}^n_t), P^n)$ *à valeurs réelles et satisfaisant la condition UT. Alors :*

a) *Si* $(K^n, Z^n) \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbf{D}^2)} (K, Z)$ *on a :*

$$(K^n, Z^n, Z^n_- \cdot K^n, K^n_- \cdot Z^n, [Z^n, K^n]) \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbf{D}^5)} (K, Z, Z_- \cdot K, K_- \cdot Z, [Z, K])$$

b) Si $(K^n, Z^n) \xrightarrow{P^n} (K, Z)$ *on a :*

$$(K^n_- \cdot Z^n) \xrightarrow{P^n} K_- \cdot Z, \quad (Z^n_- \cdot K^n) \xrightarrow{P^n} Z_- \cdot K, \quad ([Z^n, K^n]) \xrightarrow{P^n} [Z, K]$$

Lorsque la suite (Z^n) est définie sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$, la propriété UT est simplement la propriété de bornitude de l'ensemble $\{Z^n\}$ pour la topologie $\mathcal{S}_0$ des semimartingales (voir par exemple [2] chap 7). Le résultat suivant est alors intéressant :

1-10 Proposition. *Soit* (Z^n) *définie sur le même espace* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ *et satisfaisant UT ; on suppose que* (Z^n) *converge en P-probabilité vers Z, (au sens de la convergence uniforme sur tout compact de* $\mathbf{R}^+$*), notant comme précédemment les décompositions de* Z^n *et de* Z:

$$Z^n = \hat{Z}^n + M^{n,a} + B^{n,a} \quad Z = \hat{Z} + M^a + B^a$$

où $P[\exists t :|\Delta Z_t| = a] = 0$, *alors* $B^{n,a} \longrightarrow B^a$ *en P-probabilité (notée* $\xrightarrow{P}$*) et* $M^{n,a} \longrightarrow M^a$ *en P-probabilité (et donc aussi au sens de* $\mathcal{S}_0$*).*

Démonstration : Il est évident que UT pour (Z^n) et la convergence en probabilité vers Z montrent que Z est une semimartingale, de sorte que $(Z^n - Z)$ vérifie à son tour UT. D'après le résultat de convergence (corollaire 1-9 ci-dessus) $([Z^n - Z, Z^n - Z])$ converge en probabilité vers 0, et il en est de même pour la suite $([Z^n-\hat{Z}^n-(Z-\hat{Z}), Z^n-\hat{Z}^n-(Z-\hat{Z})])$, puisque $\hat{Z}^n \xrightarrow{P} \hat{Z}$. Utilisant une technique de temps d'arrêt comme dans la démonstration du théorème 1-4 on en déduit que $([M^{n,a}-M^a, M^{n,a}-M^a])$ converge aussi en probabilité vers 0, d'où la convergence de $(M^{n,a})$ vers M^a en probabilité et dans $\mathcal{S}_0$. La convergence de $(B^{n,a})$ vers B^a est obtenue par différence.

2 Cas où (Z^n) converge en loi vers une semimartingale continue Z

Le cadre de ce paragraphe est de considérer une suite (Z^n) de semimartingales possédant la propriété UT et convergeant en loi vers une semimartingale continue ; on étudiera en particulier les conditions sur (Z^n) qui assurent la tension de la suite des processus intégrales stochastiques $(K^n \cdot Z^n)$, puis les résultats de stabilité des solutions d'équations différentielles stochastiques que l'on peut déduire.

On notera pour $a > 0$ $Z^n = \hat{Z}^n + M^n + B^n$ la décomposition canonique donnée au paragraphe 1, sans répéter l'exposant a pour M^n et B^n, puis $Z = M + B$ la décomposition canonique de la limite relative à $(\mathcal{F}_t^Z)$ la filtration naturelle de Z.

$\nu^n(ds, dx)$ désignera la mesure aléatoire, compensatrice prévisible de la mesure des sauts de Z^n, et $*$ le signe d'intégration par rapport à ν (voir par exemple [5], chap 2).

2-1 Remarque. a) Si Z^n est pour chaque n une martingale locale, la condition UT s'écrit simplement (version de 1-5 a)) :

pour chaque $t > 0$, pour au moins un $a > 0$, $\{| x | \mathbf{1}_{\{|x|>a\}} * \nu_t^n, n \epsilon \mathbf{N}\}$ est P^n-bornée en probabilité.

b) Dans le cas où (Z^n) est une suite de martingales locales définies à partir de différences de martingales (U_k^n) sur $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, (\mathcal{F}_k^n), P^n)$ avec $Z_t^n = \sum_{k=1}^{[nt]} U_k^n$, la condition UT s'écrit :

pour chaque $t > 0$, pour au moins un $a > 0$, $\{\sum_{k=1}^{[nt]} | E^n[U_k^n \mathbf{1}_{\{|U_k^n|>a\}} | \mathcal{F}_{k-1}^n] |, n \epsilon \mathbf{N}\}$ est bornée en probabilité.

2-2 Proposition. *Soit (Z^n) vérifiant UT et convergeant en loi vers Z semimartingale continue, alors:*

$((Z^n, M^n, [M^n, M^n], B^n))$ est $\mathbf{D}^4$-tendue, chaque limite a la forme $(Z, M', [M', M'], B')$ adaptée à une filtration $(\mathcal{F}_t)$ avec $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{Z,M'}$, où M' est une martingale locale continue avec $[M', M'] = [Z, Z]$ et B' est un processus continu à variation finie.

Démonstration : Comme $(Z^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ on a $(\hat{Z}^n) \xrightarrow{P^n} 0$, de sorte que $(X^n) = (M^n + B^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} M + B$. Comme Z est continu, on a pour tout $N < \infty$, $sup_{s \leq N} | \Delta Z_s^n | \xrightarrow{P^n} 0$; montrons que cette propriété implique $sup_{s \leq N} | \Delta B_s^n | \xrightarrow{P^n} 0$ et par conséquent $sup_{s \leq N} | \Delta M_s^n | \xrightarrow{P^n} 0$. Comme $\Delta B_s^n = \int_{\mathbf{R}-\{0\}} x \mathbf{1}_{\{|x| \leq a\}} \nu^n(\{s\}, dx)$, on a donc :

$$sup_{s \leq N} | \Delta B_s^n | \leq \varepsilon + a \sum_{s \leq N} \nu^n[\{s\} \times \{x : | x | > \varepsilon\}] \leq \varepsilon + a \nu^n([0, N] \times \{x : | x | > \varepsilon\})$$

Mais pour tout $\varepsilon > 0$, tout N, $\nu^n([0,N] \times \{x :| x |> \varepsilon\}) \xrightarrow{P^n} 0$, car $sup_{s \leq N} | \Delta Z_s^n | \xrightarrow{P^n} 0$ ([5], p 324 lemme 4-22) d'où le résultat.

Montrons maintenant que $([M^n, M^n])$ est **C**-tendue: on a

$$[M^n, M^n] = [X^n, X^n] - [B^n, B^n] - 2[M^n, B^n]$$

$([X^n, X^n])$ est **C**-tendue; $[B^n, B^n]_t \leq sup_{s \leq t} | \Delta B_t^n | Var(B^n)_t$ d'où $[B^n, B^n] \to 0$ en P^n-probabilité; puis $Var([B^n, M^n])_t \leq sup_{s \leq t} | \Delta M_s^n | Var(B^n)_t$, et $Var([B^n, M^n])_t \to 0$ en P^n-probabilité; on en déduit que $([M^n, M^n])$ est **C**-tendue.

Il est alors classique que (M^n) est **C**-tendue (ceci peut se montrer en utilisant la domination au sens de Lenglart de $sup_{s \leq t}(M_s^{n,T^n})^2$ par $4[M^n, M^n]_t^{T^n}$ pour des temps d'arrêt bien choisis). Enfin comme $| \Delta M^n | \leq 2a$, tout processus limite de (M^n) est une martingale locale continue ([5], p 485).

$((X^n, M^n))$ étant **C**-tendue, (B^n) est **C**-tendue et compte tenu de UT, toute limite est un processus à variation finie continu. ∎

2-3 Remarque. Il n'y a pas de raison pour que l'on ait les égalités $M = M'$ et $B = B'$, la décomposition $Z = M + B$ étant obtenue relativement à une filtration différente $(\mathcal{F}_t^Z)$. Sans hypothèse supplémentaire concernant le type de convergence de (Z^n) vers Z, on ne peut obtenir la $\mathcal{F}^Z$-mesurabilité de M'.

2-4 Remarque. Si (Z^n) est une suite de martingales locales convergeant vers Z en loi, il ne suffit pas de la condition UT pour que Z soit une martingale locale, comme le montre l'exemple suivant emprunté à [5] p 435 :

Soit $Z_t^n = \sum_{k=1}^{[nt]} U_k^n$ où les U_k^n sont des variables indépendantes de même loi :
$P^n[U_k^n = n] = \frac{1}{n^2}$ et $P^n[U_k^n = \frac{-1}{n(1-1/n^2)} = 1 - 1/n^2$, pour $n \geq 2$

on voit directement que $(Z_t^n) \xrightarrow{P^n} -t$, et que pour $a = 1$, $B_t^n = -\sum_{k=1}^{[nt]} E^n[U_k^n 1_{\{U_k^n = n\}}]$, de sorte que $B_t^n \to -t$ et $Var(B^n)_t \to t$; (Z^n) satisfait donc UT, cependant Z n'est pas une martingale locale, alors que les Z^n sont des martingales.

2-5 Corollaire. *Si (Z^n) est une suite de semimartingales vérifiant UT, et si pour un $a > 0$, (B^n) est* **C**-*tendue, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) (Z^n) est **C**-*tendue*

(ii) $([Z^n, Z^n])$ est **C**-*tendue.*

Démonstration :(i) $\Rightarrow$ (ii) découle du théorème de convergence 1-8 et du corollaire 1-9. Montrons (ii)$\Rightarrow$ (i).

(ii) implique $(\hat{Z}^n) \xrightarrow{P^n} 0$, de sorte que $([M^n + B^n, M^n + B^n])$ est **C**-tendue ; cette propriété implique (comme dans la démonstration de la proposition 2-2) la **C**-tension de $([M^n, M^n])$ et donc la **C**-tension de (M^n) ; par conséquent, compte tenu de la **C**-tension de (B^n) on obtient celle de (Z^n) ∎

2-6 Proposition. *Si (Z^n) converge en loi vers Z semimartingale continue, et si la condition suivante est réalisée :*

(*) Il existe $a > 0$, tel que $(Var(B^n))$ est **C**-*tendue,*

alors, pour toute suite (H^n) de processus prévisibles et localement bornés uniformément en n, la suite $(H^n \cdot Z^n)$ est **C**-*tendue.*

Si pour tout $t < \infty$, $(Var(B^n)_t) \xrightarrow{P^n} 0$, alors, toute loi limite de $(H^n \cdot Z^n)$ est une loi de martingale locale continue.

Démonstration : Comme (*) implique UT, les résultats de la proposition 2-2 tiennent; on a donc :

$((M^n, [M^n, M^n], B^n))$ est $\mathbf{C}^3$-tendue.

Comme (H^n) est localement uniformément bornée, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $N < \infty$, on peut trouver un nombre K et une suite de temps d'arrêt (S_n) tels que l'on ait $sup_{s \leq N \wedge S_n} \mid H^n_s \mid \leq K$ et $P^n[S_n < N] < \varepsilon$.

On a $(H^n)^2 \cdot [M^n, M^n]^{S_n}$ dominé au sens des processus à variation finie par le processus croissant $K^2[M^n, M^n]$; la suite $(K^2[M^n, M^n])$ étant C-tendue, $((H^n)^2 \cdot [M^n, M^n]^{S_n})$ l'est aussi, et comme $P^n[sup_{s \leq N} \mid (H^n)^2 \cdot [M^n, M^n]_s - (H^n)^2 \cdot [M^n, M^n]^{S_n}_s \mid > \varepsilon] < \varepsilon$, on a également $((H^n)^2 \cdot [M^n, M^n])$ C-tendue.

Maintenant, Il est classique que $(H^n \cdot M^n)$ est aussi **C**-tendue; notons que nous n'avons utilisé jusque là que la condition UT.

Le processus à variation finie $H^n \cdot B^{n, S_n}$ est dominé par le processus croissant $KVar(B^n)$; répétant le raisonnement conduit ci-dessus, on a $(H^n \cdot B^{n, S_n})$ **C**-tendue dès que $(Var(B^n)$ l'est, et enfin grâce aux propriétés de la suite des temps S_n, on obtient la **C**-tension de la suite $(H^n \cdot B^n)$, et en recollant les morceaux la **C**-tension de la suite $(H^n \cdot Z^n)$.

D'après la démonstration de la proposition 2-2 $(H^n \cdot M^n)$ n'a comme lois limites que des lois de martingales locales, par conséquent toute loi limite de $(H^n \cdot Z^n)$ est une loi de martingale locale dès que $(Var(B^n)) \xrightarrow{P^n} 0$, puisque dans ce cas $(H^n \cdot B^n) \xrightarrow{P^n} 0$ ∎

On se propose d'illustrer ce qui précède en considérant le problème de stabilité de solutions d'équations différentielles stochastiques traité par Yamada [13] et [14] puis généralisé par Zanzotto [15]. Les résultats que nous obtenons sont à leur tour un peu plus généraux.

Fixons d'abord la notion de solution que nous utiliserons :

2-7 Définition. *Soit $\tilde{P}$ la loi d'un couple (A, Z) de semimartingales, soit b et σ des éléments prévisibles et localement bornés définis sur $\mathbf{D} \times \mathbf{R}^+$ à valeurs réelles, nous dirons que l'équation suivante :*

(1) $\quad X_t = \int_0^t b(X_., s) dA_s + \int_0^t \sigma(X_., s) dZ_s, \quad X_0 = 0.$

admet une solution en loi, s'il existe un espace filtré $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t), P')$ et des processus A', Z', X' définis comme ci-dessus tels que :

1) la loi de (A', Z') sous P' est $\tilde{P}$

2) toute $(P', (\mathcal{F}^{A', Z'}_t))$-martingale est une $(P', (\mathcal{F}'_t))$-martingale.

3) X' vérifie l'équation :

$$X'_t = \int_0^t b(X'_., s) dA'_s + \int_0^t \sigma(X'_., s) dZ'_s, X'_0 = 0$$

L'équation (1) admet une solution unique en loi, si, $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t), P', A', Z', X')$ *et* $(\Omega'', \mathcal{F}'', (\mathcal{F}''_t), P'', A'', Z'', X'')$ *étant deux solutions en loi, on a :*

la loi de (A', Z', X') *sous* P' *est égale à la loi de* (A'', Z'', X'') *sous* P''.

2-8 Remarque. Les propriétés 1) et 3) correspondent à la notion usuelle de solution faible ou en loi d'une équation différentielle stochastique ; cependant on peut toujours trouver une extension de l'espace filtré pour laquelle on ait en plus de 1) et 3) la propriété 2) (voir par exemple Jacod Mémin [4], ou Métivier [16] p 264 à 266). Cette hypothèse ne coûte donc rien ; mais l'on gagne les propriétés d'invariance des décompositions des semimartingales (A', Z') lorsque l'on passe de la filtration $(\mathcal{F}_t^{A',Z'})$ à $(\mathcal{F}_t^{A',Z',X'})$, et notamment l'invariance de la mesure aléatoire ν, compensatrice prévisible de la mesure des sauts de Z.

2-9 Hypothèses. *On considère les équations différentielles stochastiques suivantes :*

(2) $\quad X_t^n = \int_0^t b^n(X_\cdot^n, s)dA_s^n + \int_0^t \sigma^n(X_\cdot^n, s)dZ_s^n, \quad X_0^n = 0$

(1) $\quad X_t = \int_0^t b(X_\cdot, s)dA_s + \int_0^t \sigma(X_\cdot, s)dZ_s, \quad X_0 = 0.$

On fait les hypothèses suivantes :

(H1) : (A^n) *est une suite de processus croissants et* A *processus croissant continu.*

(H2) : (Z^n) *est une suite de martingales locales relativement à la filtration* $(\mathcal{F}_t^{A^n,Z^n})$ *et* $((A^n, Z^n)) \xrightarrow{\mathcal{L}} (A, Z)$ *où* Z *est une semimartingale continue relativement à* $(\mathcal{F}_t^{A,Z})$.

(H3) : Il existe $a > 0$ *tel que* $(| x | 1_{\{|x|>a\}} * \nu_t^n \xrightarrow{P^n} 0$, *pour tout* $t < \infty$.

(H4) : b^n *et* σ^n *sont des processus prévisibles définis sur* $\mathbf{D} \times \mathbf{R}^+$ *à valeurs dans* $\mathbf{R}$ *;* b *et* σ *sont des processus optionnels, définis sur* $\mathbf{C} \times \mathbf{R}^+$ *et à valeurs réelles ;* b^n, σ^n, b, σ *sont bornés uniformément en* n.

(H5) : p. s. pour chaque $t < \infty$ *on a :*

$b^n(x^n, t^n) \to b(x, t) \qquad \sigma^n(x^n, t^n) \to \sigma(x, t)$ *pour toute suite* (x^n) *d'éléments de* $\mathbf{D}$ *convergeant dans* $\mathbf{D}$ *vers un élément continu* x, *et toute suite* (t^n) *de* $\mathbf{R}^+$ *convergeant vers* t *; (le p.s. est relatif à la mesure* $dA_t \times dQ(\omega) + d[Z, Z]_t \times dP(\omega)$ *où* P *est la loi de* Z *et* Q *la loi de* A.

(H6) : Les équations (1) et (2) admettent des solutions en loi.

2-10 Théorème. *Sous les hypothèses (H1)....(H6), la suite* $((X^n, A^n, Z^n))$ *est* $\mathbf{C}$*-tendue et pour toute limite* (X, A, Z) *définie sur un espace* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^{A,Z,X}), P, A, Z, X)$ *est solution en loi de l'équation (2).*

Si l'équation (2) a une unique solution en loi, alors (X^n, A^n, Z^n) *converge en loi vers* (X, A, Z).

Démonstration : 1) Compte tenu de la proposition 2-6 appliquée à (A^n) et des hypothèses (H1)...(H4), la suite (V^n) où V^n est défini par $V^n = \int_0^\cdot b^n(X_\cdot^n, s)dA_s^n$ est $\mathbf{C}$-tendue. Compte tenu de la proposition 2-6 appliqué à (Z^n) et des hypothèses (H2), (H4), la suite (L^n), où (L^n) est défini par $L^n = \int_0^\cdot \sigma^n(X_\cdot^n, s)dZ_s^n$ est $\mathbf{C}$-tendue ; avec en plus (H3), toute loi limite est une loi de martingale locale continue. On a donc, du fait également de (H3) (qui est plus fort que UT, car Z^n est une martingale locale), la $\mathbf{C}^7$-tension de $(V^n, L^n, [L^n, L^n], [L^n, Z^n], X^n, A^n, Z^n)$; considérons une sous suite (encore indicée par n), qui converge vers la loi d'un processus $(V', L', [L', L'], [L', Z], X', A, Z)$, on va montrer que X' est solution en loi de (2).

2) on peut, d'après le théorème de représentation de Skorokhod, se placer sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ où l'on a la convergence P-presque sure de $(V^n, L^n, [L^n, L^n], [L^n, Z^n], X^n, A^n, Z^n)$ vers $(V', L', [L', L'], [L', Z'], X', A, Z)$. On doit alors montrer que $V' = \int_0^{\cdot} b(X'_., s)dA_s$ et $L' = \int_0^{\cdot} \sigma(X'_., s)dZ_s$.

Notons $f^n(s) = b^n(X^n_., s)$, $f(s) = b(X'_., s)$; on peut supposer que pour chaque $t < \infty$, A^n_t et A_t sont finis identiquement, de sorte que $\int_0^t b^n(X^n_., s)dA^n_s = \int_0^{A^n_t} f^n(C^n_s)ds$ où $C^n_t = inf\{s : A^n_s \geq t\}$ et $\int_0^t b(X'_., s)dA_s = \int_0^{A_t} f(C_s)ds$ où $C_t = inf\{s : A_s \geq t\}$.

Comme $A^n \to A$ uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}^+$, $C^n_t \to C_t$ sauf en un ensemble dénombrable de points (les points de saut de C), de sorte que du fait de l'hypothèse (H5), $\int_0^{A^n_t} f^n(C^n_s)ds \to \int_0^{A_t} f(C_s)ds$. (C'est la méthode utilisée par Yamada [13]).

Soit maintenant $L' = lim_n L^n$; comme (σ^n) est uniformément bornée et que (Z^n) possède UT, (L^n) vérifie aussi UT, on a donc les convergences : $([L^n, L^n]) \xrightarrow{P} [L', L']$ puis $([L^n, Z^n]) \xrightarrow{P} [L', Z]$ (d'après le corollaire 1-9).

En utilisant (H5) , et en procédant comme pour obtenir l'expression de V' on a :

$$[L^n, L^n]_t = \int_0^t (\sigma^n(X^n_., s))^2 d[Z^n, Z^n]_s \xrightarrow{P} \int_0^t (\sigma(X'_., s))^2 d[Z, Z]_s$$

$$[L^n, Z^n]_t = \int_0^t \sigma^n(X^n_., s)d[Z^n, Z^n] \xrightarrow{P} \int_0^t \sigma(X'_., s)d[Z, Z]^s$$

On a ainsi obtenu que la martingale locale L' vérifie : $[L', L'] = \int_0^t (\sigma(X'_., s))^2 d[Z, Z]_s$ et $[L', Z] = \int_0^t \sigma(X'_., s)d[Z, Z]_s$

Ces représentations déterminent L' comme étant :

$$L' = \int_0^{\cdot} \sigma(X'_., s)dZ_s$$

ce qui termine la démonstration ∎

2-11 Remarque. On a ainsi obtenu un résultat un peu plus général que celui de Zanzotto, la condition (H3) remplaçant la condition de Lindeberg qui se trouvait dans [15], et les limites étant des processus continus (on n'a pas nécessairement $A_t = t$ et $Z_t = W_t$).

Par rapport à Hoffman [3] et Strasser [11], on gagne en généralité sur les coefficients ; on verra dans ce qui suit que si on suppose les coefficients b^n, σ^n, σ, b continus, et sous une hypothèse de convergence uniforme, on obtient la stabilité lorsque l'on remplace (H3) par UT.

3 Stabilité sous UT des solutions d'équations différentielles stochastiques.

Dans ce paragraphe, on considère une suite (Z^n) vérifiant UT et convergeant en loi vers Z, Z n'étant pas supposé continu.

On commence par énoncer un lemme d'approximation uniforme, que l'on peut trouver dans [10] (dans le cadre de la démonstration de la proposition 2) ; un résultat un peu différent, mais de même nature figure dans [7], lemme 6-1.

3-1 Lemme. *Soit (Y^n, Z^n) une suite de processus cadlag convergeant en loi dans $\mathbf{D}^2$ vers (Y^∞, Z^∞), alors :*

pour chaque $\varepsilon > 0$, pour chaque $n \epsilon \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, il existe un processus étagé $Y^{n,\varepsilon}$ tel que l'on ait pour tout $N < \infty$

(i) $limsup_n P^n[sup_{t \leq N} \mid Y_t^n - Y_t^{n,\varepsilon} \mid \geq \varepsilon] < \varepsilon$

(ii) $((Y^n, Y^{n,\varepsilon}, Z^n)) \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbf{D}^3)} (Y^\infty, Y^{\infty,\varepsilon}, Z^\infty)$

(iii) *pour chaque $\varepsilon > 0$, la suite $(Y^{n,\varepsilon})$ vérifie UT.*

(iv) *pour chaque $\varepsilon > 0$, la suite $((H^n \cdot Y^{n,\varepsilon}, Y^{n,\varepsilon}, Y^n))$ est $\mathbf{D}^3$-tendue, lorsque (H^n) est une suite de processus prévisibles localement uniformément bornés.*

Commentaire : En utilisant la proposition 2 de [10], on peut, pour chaque $\varepsilon > 0$ et pour chaque $N < \infty$, trouver des constantes positives $\delta^\varepsilon, q_N > N, \rho_N^\varepsilon$ et une famille de temps d'arrêt $\{\sigma_k^{n,\varepsilon}\}_{k \epsilon \mathbf{N}}$ relatifs à $(\mathcal{F}_t^n)$, telle que l'on ait :

$$limsup_{n\to\infty} P^n[max_{\{k:\sigma_k^{n,\varepsilon} \leq q_N\}} (\sigma_{k+1}^{n,\varepsilon} - \sigma_k^{n,\varepsilon}) > \delta^\varepsilon] < \varepsilon$$

$$limsup_{n\to\infty} P[min_{\{k:\sigma_k^{n,\varepsilon} \leq q_N\}} (\sigma_{k+1}^{n,\varepsilon} - \sigma_k^{n,\varepsilon}) \leq \rho_N^\varepsilon] < \varepsilon$$

$$(Y^n_{\sigma_k^{n,\varepsilon}})_{k \epsilon \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbf{R}^\infty)} (Y^\infty_{\sigma_k^{\infty,\varepsilon}})_{k \epsilon \mathbf{N}}$$

et en posant $Y_t^{n,\varepsilon} = Y^n_{\sigma_k^{n,\varepsilon}}$ sur $[\sigma_k^{n,\varepsilon}, \sigma_{k+1}^{n,\varepsilon}[$, on a la propriété (i) ; alors (ii) découle de ce qui précède ; enfin il est clair que pour chaque $\varepsilon > 0$, chaque $t > 0$, la suite $(Var(Y^{n,\varepsilon})_t)$ est bornée en probabilité, d'où UT. Le point (iv) découle alors de la proposition 2 de [10] appliquée à nouveau.

3-2 Remarque. Si on considère une suite (H^n) de processus prévisibles localement uniformément bornés, le caractère étagé d'une suite convergente (Y^n) et de la limite Y^∞ ne suffit pas en général pour que la suite $(H^n \cdot Y^n)$ soit $\mathbf{D}$-tendue.

On ne peut donc espérer un résultat du même type pour obtenir la tension d'une suite $(H^n \cdot Z^n)$ lorsque (Z^n) est une suite de semimartingales convergeant vers Z ; on a vu que déjà dans le cas Z continu la condition UT ne permet pas d'assurer cette propriété de tension, et que pour l'obtenir on a utilisé une condition de $\mathbf{C}$-tension pour $(Var(B^n))$. D'autre part, même si (Z^n) est une famille de martingales à sauts uniformément bornés, on n'est pas assuré d'obtenir la $\mathbf{D}$-tension de $(H^n \cdot Z^n)$ (voir [7] paragraphe 4 pour un contre exemple).

Cependant, la proposition suivante va nous donner dans des situations assez courantes la propriété de tension espérée.

3-3 Proposition.a) *Soit* (X^n), (Y^n) *et* (Z^n) *des processus cadlag à valeurs réelles, on suppose que* (X^n) *et* (Z^n) *vérifient UT et que* $((Y^n, Z^n))$ *est une suite* $\mathbf{D}^2$*-tendue, alors :*

$((X^n_- \cdot Z^n, Y^n, Z^n))$ *est tendue dans* $\mathbf{D}^3$.

b) Plus généralement, si (Z^n) *vérifie UT et* $((Y^n, Z^n))$ *est* $\mathbf{D}^2$*-tendue et si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $X^{n,\varepsilon}$ *avec les propriétés suivantes :*

1) pour tout $N < \infty$, $P^n[sup_{t\leq N} \mid X^{n,\varepsilon}_t - X^n_t \mid > \varepsilon] < \varepsilon$ *pour tout* n

2) $(X^{n,\varepsilon})$ *vérifie UT*

alors $((X^n_- \cdot Z^n, Y^n, Z^n))$ *est tendue dans* $\mathbf{D}^3$.

c) En particulier si $((X^n, Y^n, Z^n))$ *est tendue dans* $\mathbf{D} \times \mathbf{D}^2$ *et si* (Z^n) *vérifie UT, alors* $((X^n_- \cdot Z^n, Y^n, Z^n))$ *est tendue dans* $\mathbf{D}^3$.

Démonstration :Compte tenu du lemme 3-1, il est clair que le c) est un cas particulier de b).

Supposons dans un premier temps que a) a été montré, et déduisons b).

Soit $\varepsilon > 0$, considérons $(X^{n,\varepsilon})$ suite de processus approchant X^n à ε près uniformément en P^n-probabilité. Comme $(X^{n,\varepsilon})$ vérifie UT, on peut appliquer l'assertion a) et $((X^{n,\varepsilon}_- \cdot Z^n, Y^n, Z^n))$ est tendue dans $\mathbf{D}^3$. Pour chaque $\alpha > 0$, et pour chaque $N < \infty$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que l'on ait : $P^n[sup_{t\leq N} \mid X^{n,\varepsilon}_- \cdot Z^n_t - X^n_- Z^n_t \mid > \alpha] < \alpha$; on en déduit alors que $((X^n_- \cdot Z^n, Y^n, Z^n))$ est $\mathbf{D}^3$-tendue.

Démontrons maintenant a) : Considérons une sous suite $((Y^n, Z^n))$ qui converge en loi dans $\mathbf{D}^2$. Soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver $Z^{n,\varepsilon}$ approximation uniforme de Z^n à ε près, telle que $((X^n_- \cdot Z^{n,\varepsilon}, Z^{n,\varepsilon}, Z^n))$ soit $\mathbf{D}^3$-tendue (lemme 3-1). Ecrivons $X^n_- \cdot Z^n = X^n_-(Z^n - Z^{n,\varepsilon}) + X^n_- \cdot Z^{n,\varepsilon}$. Pour avoir le résultat prévu il nous suffit de montrer que pour tout $\alpha > 0$, tout $N < \infty$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $P^n[sup_{t\leq N} \mid X^n_- \cdot (Z^n - Z^{n,\varepsilon})_t \mid > \alpha] < \alpha$.

Mais $X^n_- \cdot (Z^n - Z^{n,\varepsilon}) = X^n(Z^n - Z^{n,\varepsilon}) - (Z^n - Z^{n,\varepsilon})_- \cdot X^n - [Z^n - Z^{n,\varepsilon}, X^n]$. Utilisant UT pour (X^n), $(sup_{t\leq N} \mid X^n_t \mid)$ est bornée en probabilité d'après le lemme 1-3, de sorte qu'il existe ε_1 tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_1$, on a

$$P^n[sup_{t\leq N} \mid X^n_t(Z^n_t - Z^{n,\varepsilon}_t) \mid > \frac{\alpha}{3}] < \frac{\alpha}{3}$$

Utilisant encore UT pour (X^n), il existe ε_2 tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_2$, on a :

$$P^n[sup_{t\leq N} \mid (Z^n - Z^{n,\varepsilon})_- \cdot X^n \mid > \frac{\alpha}{3}] < \frac{\alpha}{3}$$

d'après le théorème 1-4 -(iv).

Enfin d'après l'inégalité de Kunita-Watanabe, on a :

$$\mid [Z^n - Z^{n,\varepsilon}, X^n] \mid \leq [Z^n - Z^{n,\varepsilon}, Z^n - Z^{n,\varepsilon}]^{1/2}[X^n, X^n]^{1/2}$$

On a d'une part $([X^n, X^n]^{1/2}_N)$ bornée par un certain K avec une P^n-probabilité supérieure à $1 - \alpha$, et d'autre part il est facile de voir que pour chaque $\frac{\alpha}{K}$, il existe ε_3, tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_3$ on a :

$$P^n[[Z^n - Z^{n,\varepsilon}, Z^n - Z^{n,\varepsilon}]^{1/2}_N > \frac{\alpha}{3K}] < \frac{\alpha}{3K}$$

(en écrivant $[Z^n - Z^{n,\varepsilon}, Z^n - Z^{n,\varepsilon}] = (Z^n - Z^{n,\varepsilon})^2 - 2(Z^n - Z^{n,\varepsilon})_- \cdot (Z^n - Z^{n,\varepsilon})$ et en appliquant encore le théorème 1-4-(iv)).

On a obtenu ce que l'on voulait en recollant les morceaux et en prenant $\varepsilon = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3$ ∎

3-4 Remarque. La partie c) de la proposition précédente figure dans [7], corollaire 4-5 ; la partie a) améliore légèrement le corollaire 4-3 de [7], les X^n étant dans [7] des semimartingales spéciales, satisfaisant une condition un peu plus forte que UT ; (signalons que les démonstrations de [7] sont complètement différentes).

On considère maintenant pour chaque n, l'équation différentielle stochastique :

$$(3) \qquad X_t^n = Y_t^n + \int_0^t f^n(X_{s-}^n, s)dZ_s^n$$

où sont données :

a) une loi $\tilde{P}^n$ d'un couple de processus cadlag (Y^n, Z^n), Z^n étant une semimartingale pour la filtration $(\mathcal{F}_t^{Y^n,Z^n})$

b) une fonction f^n continue de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$ et que $| f^n(x,t) | \leq K(t)(1+ | x |)$, pour tout $n\epsilon\mathbf{N}$, pour tout $x\epsilon\mathbf{R}$, et tout $t\epsilon\mathbf{R}^+$, avec enfin :

pour tout $N < \infty$ $sup_{t \leq N} K(t) < \infty$.

Sous ces hypothèses, pour chaque n l'équation (3) admet une solution en loi (au sens de la définition 2-7) $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, (\mathcal{F}_t^n), P^n, Y^n, Z^n, X^n)$ (non explosive (Jacod Mémin [4] théorème 1-8).

3-5 Théorème. *Sous les hypothèses suivantes:*

(Z^n) vérifie UT (pour $(\mathcal{F}_t^{Y^n,Z^n})$), $((Y^n, Z^n)) \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbf{D}^2)} (Y, Z)$, et (f^n) converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$; alors :

(i) La suite $((X^n, Y^n, Z^n))$ est tendue dans $\mathbf{D}^3$.

(ii) Si, pour une sous suite (n') de $\mathbf{N}$, $((X^{n'}, Y^{n'}, Z^{n'})) \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbf{D}^3)} (X^\infty, Y, Z)$, ce triplet étant défini sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ alors

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), Y, Z, X^\infty)$ est solution de l'équation

$$(4) \qquad X_t^\infty = Y_t + \int_0^t f(X_{s-}^\infty, s)dZ_s$$

(iii) Si l'équation (4) a une solution unique en loi, alors :

$$((X^n, Y^n, Z^n)) \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbf{D}^3)} (X^\infty, Y, Z)$$

Démonstration : Notons d'abord que compte tenu de la remarque 2-8 et du théorème 1-4 i), la condition UT pour (Z^n) est aussi vérifiée pour la filtration $(\mathcal{F}_t^{Y^n,Z^n,X^n})$. On commence par poser pour chaque $\varepsilon > 0$, chaque $N < \infty$,

$$X_t^n(\varepsilon) = Y_t^{n,\varepsilon} + f^n(X_-^n, \cdot) \cdot Z_t^n$$

où $Y^{n,\varepsilon}$ est l'approximation à ε près de Y^n du lemme 3-1.

En utilisant un lemme de type Gronwall ([4] lemme 3-39, ou [16] lemme 29-1 p 202), on peut montrer facilement qu'avec la condition UT pour (Z^n) et l'inégalité $| f^n(x,t) | \leq K(t)(1+ | x |)$, pour chaque $t < \infty$, la suite $(sup_{s\leq t} | X_s^n |)$ est P^n-bornée en probabilité.

On déduit du lemme 1-6 et du lemme 3-1-(iii), que $(X^n(\varepsilon))$vérifie UT, puis on obtient:

$$limsup_n P^n[sup_{t\leq N} | X_t^n(\varepsilon) - X_t^n |> \varepsilon] < \varepsilon$$

Cette propriété montre que la $\mathbf{D}^3$-tension de $((X^n, Y^n, Z^n))$ sera obtenue dès que l'on aura la $\mathbf{D}^3$-tension de $((X^n(\varepsilon), Y^n, Z^n))$.

Posons $V_t^n(\varepsilon) = Y_t^{n,\varepsilon} + g^p(X_-^n(\varepsilon), \cdot) \cdot Z_t^n$, où g^p est une fonction de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathbf{C}^{2,1}$ approchant uniformément f sur les compacts de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$. En appliquant encore le théorème 1-4-(iv), on peut choisir $p = p(\varepsilon)$ tel que

$$limsup_n P^n[sup_{t\leq N} | X_t^n(\varepsilon) - V_t^n(\varepsilon) |> \varepsilon] < \varepsilon$$

Pour chaque ε, la suite $(g^{p(\varepsilon)}(X_-^n(\varepsilon), \cdot))_{n\in\mathbf{N}}$, est une suite de semimartingales vérifiant UT (lemme 1-7) ; ainsi, en utilisant la proposition 3-3, on obtient la $\mathbf{D}^4$-tension de $((Y^{n,\varepsilon}, Y^n, Z^n, g^{p(\varepsilon)}(X_-^n(\varepsilon), \cdot) \cdot Z^n))$, et en utilisant ce qui précède on obtient la tension de $((X^n, Y^n, Z^n))$ dans $\mathbf{D}^3$.

Supposons maintenant que l'on a $((X^{n'}, Y^{n'}, Z^{n'}))$ convergeant en loi vers dans $\mathbf{D}^3$ vers (X^∞, Y, Z), on a d'après le théorème 1-8 la convergence :

$$(X^{n'}, Y^{n'}, Z^{n'}, f(X_-^{n'}, \cdot) \cdot Z^{n'}) \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbf{D}^4)} (X^\infty, Y, Z, f(X_-^\infty, \cdot) \cdot Z)$$

d'où le premier résultat annoncé.

Enfin, s'il y a unicité en loi pour l'équation (4), le second résultat est évident.■

Ce théorème est plus général que ceux de Strasser [11] ou de Hoffman [3] ; par contre Kurtz et Protter obtiennent dans [7] théorème 5-4, des résultats avec les coefficients f^n pouvant dépendre de tout le passé du processus X^n. Ils utilisent pour cela une méthode différente reposant sur un critère de compacité dû à Kurtz basé sur les changements de temps.

En utilisant la partie b) de la proposition 3-3, on peut généraliser notre résultat, et traiter ce problème de stabilité avec des coefficients f^n plus généraux, tels que ceux des exemples 5-3 de Kurtz et Protter [7].

Lorsque les espaces filtrés et les processus (Y^n, Z^n) et (Y, Z) sont donnés au départ, des processus X^n et X qui vérifient (3) et (4) respectivement sont appelés solutions trajectorielles de (3) et de (4). dans ce cas, si $((Z^n, Y^n))$ converge en probabilité vers (Z, Y), on a aussi la convergence en probabilité de (X^n) vers X, modulo unicité de solution pour l'équation limite, c'est ce que précise le théorème suivant.

3-6 Théorème. *Sous les hypothèses :*

1) f^n et f vérifient les mêmes conditions que pour le théorème 3-5;

2) les équations (3) (resp. (4)) admettent des solutions trajectorielles X^n (resp. X) sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (les filtrations pouvant être différentes), et la suite (Z^n) vérifie UT;

3) l'équation (4) a la propriété d'unicité trajectorielle, c'est à dire :

Si (4) admet deux solutions en loi $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, (\bar{\mathcal{F}}_t), \bar{P}, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{X})$ et $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, (\bar{\mathcal{F}}_t), \bar{P}, \bar{Y}', \bar{Z}', \bar{X}')$ sur le même espace filtré, la $\bar{P}$-égalité de $(\bar{Y}, \bar{Z})$ et de $(\bar{Y}', \bar{Z}')$ implique la $\bar{P}$- égalité de $\bar{X}$ et de $\bar{X}'$.

On a les propriétés suivantes :

(i) Si $((Y^n, Z^n)) \xrightarrow{P} (Y, Z)$ pour la métrique de Skorokhod, alors $((X^n, Y^n, Z^n)) \xrightarrow{P} (X, Y, Z)$ pour la même métrique.

(ii) Si pour tout $N < \infty$, $sup_{t \leq N} \mid Y_t^n - Y_t \mid \xrightarrow{P} 0$ et $sup_{s \leq N} \mid Z_t^n - Z_t \mid \xrightarrow{P} 0$, alors pour tout $N < \infty$ on a $sup_{t \leq N} \mid X_t^n - X_t \mid \xrightarrow{P} 0$.

Commentaire : C'est exactement la même démonstration pour le (i) (resp. (ii)) que pour celle de l'assertion (ii) du théorème 1 (resp. théorème 2) de Słominski [10]. Voyons le par exemple pour le point (i) :

On se fixe $B \epsilon \mathcal{F}$ avec $P[B] > 0$, et on définit $Q_B[A] = P[A \mid B]$ pour chaque A de $\mathcal{F}$; (Z^n) est une suite de semimartingales sur $(\Omega, \mathcal{F}, Q_B)$ qui vérifie encore UT et X^n est solution de (3) Q_B remplaçant P ; enfin la propriété d'unicité des solutions de (4) tient aussi avec Q_B ; comme conséquence du théorème 3-5 on a :

$$(X^n, Y^n, Z^n) \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbf{D}^3)} (X^\infty, Y^\infty, Z^\infty)$$

de sorte que pour toute fonction Φ continue de $\mathbf{D}^3$ dans $\mathbf{R}$ on a :

$$lim_{n \to \infty} \int_\Omega \Phi(X^n, Y^n, Z^n) dQ_B = \int_\Omega \Phi(X^\infty, Y^\infty, Z^\infty) dQ_B$$

c'est à dire :

$$lim_{n \to \infty} \int_B \Phi(X^n, Y^n, Z^n) dP = \int_B \Phi(X^\infty, Y^\infty, Z^\infty) dP$$

Ayant cette dernière égalité pour tout $B \epsilon \mathcal{F}$ avec $P[B] > 0$ et pour toute fonction bornée continue de $\mathbf{D}^3$ dans $\mathbf{R}$, on a en fait la convergence en probabilité dans $\mathbf{D}^3$:

$$(X^n, Y^n, Z^n) \xrightarrow{P} (X^\infty, Y^\infty, Z^\infty)$$

Références

[1] Avram, F. : Weak convergence of the variations, iterated integrals and Doleans-Dade exponentials of sequences of semimartingales.Ann. Probab. 16, 246-250 (1988).
[2] Dellacherie C., Meyer P. A. : Probabilités et potentiel ; tome 2. Paris, Hermann 1980.
[3] Hoffman K. : Approximation of stochastic integral equations by martingale difference arrays. (1988) preprint.
[4] Jacod J., Mémin J. : Weak and strong solutions of stochastic differential equations: existence and stability. in "Stochastic Integrals" édité par D. Williams, proc. LMS Durham Symp. 1980. Lect. Notes in Maths 851, Springer, Berlin Heidelberg, New-York (1981).
[5] Jacod J., Shiryaev A. N. : Limit theorems for stochastic processes. Springer Verlag, Berlin, (1987).
[6] Jakubowski A., Mémin J., Pagès G. : Convergence en loi des suites d'intégrales stochastiques sur l'espace $\mathbf{D}^1$ de Skorokhod. Probab. Th. Rel. Fields 81, 111-137 (1989).
[7] Kurtz T. G., Protter P. : Weak limit theorems for stochastic integrals and stochastic differential equations. preprint 1989, à paraitre aux : Annals of Probability (1990).
[8] Mémin J. : Théorèmes limite fonctionnels pour les processus de vraisemblance (cadre asymptotiquement non gaussien). Public. IRMAR, Rennes 1986.
[9] Meyer P. A., Zheng W. A. : Tightness criteria for laws of semimartingales. Ann. Inst. H. Poicaré, Sec. B 20, 353-372 (1984).
[10] Słominski L. : Stability of strong solutions of stochastic differential equations. Stochastic Processes and their Applications 31, 173-202 (1989).
[11] Strasser H. : Martingale difference arrays and stochastic integrals. Probab. Th. Rel. Fields 72, 83-98 (1986).
[12] Stricker C. : Lois de semimartingales et critères de compacité. Séminaires de Probabilités XIX, Lect. Notes in Math. vol 1123, Springer, Berlin Heidelberg New-York (1985).
[13] Yamada K. : A stability theorem for stochastic differential equations and application to stochastic control problems. Stochastics 13, 257-279 (1984).
[14] Yamada K. : A stability theorem for stochastic differential equations with application to storage processes, random walks and optimal stochastic control problems. Stochastic Processes and their Applications 23 (1986).
[15] Zanzotto P. A. : An extension of a Yamada Theorem. Preprint 1989, à paraitre aux Liet. Mat. Rink. XXX 1990.
[16] Métivier M. : Semimartingales. de Gruyter Studies in Mathematics 2. W de Gruyter; Berlin, New York. 1982.