SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

LAURENT SCHWARTZ

Le semi-groupe d'une diffusion en liaison avec les trajectoires

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 23 (1989), p. 326-342

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__326_0>

Le semi-groupe d'une diffusion en liaison avec les trajectoires

Laurent Schwartz

0. Position du problème

Soit V une variété C^∞.

Soit L un opérateur différentiel du second ordre sur V, à coefficients C^∞, strictement elliptique, sans terme d'ordre 0 (i.e. $L1 = 0$). Il définit alors une diffusion sur V, processus sous-markovien (avec explosion !)[(1)]. La sous-probabilité de transition, de l'instant 0 à l'instant t, pour la valeur initiale $x \in V$, sera notée $\mathbf{P}(t,x)$; c'est une mesure ≥ 0 sur V, de masse ≤ 1 ; $\mathbf{P}(0,x) = \delta_{(x)}$. Si alors f est une fonction réelle borélienne sur V, bornée (resp.≥ 0), on peut définir la fonction $P_t f$, $P_t f(x) = \mathbf{P}(t,x)(f)$, elle-même borélienne, bornée (resp.≥ 0) ; $P_t f \leq f$ si $f \geq 0$ et toujours $\|P_t f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. La propriété de Chapman-Kolmogorov

$$\mathbf{P}(s+t,x) = \int_V \mathbf{P}(t,x)(dy)\, \mathbf{P}(s,y)$$

donne à $P = (P_t)_{t\geq 0}$ la propriété de semi-groupe : $P_{t+s} = P_t\, P_s$; $P_0 f = f$ ou $P_0 = I$.

Il est alors naturel de chercher sur quels espaces fonctionnels le semi-groupe P opère.

Considérons la propriété suivante :

(0.1).— *Soit $C_0(V)$ l'espace de Banach (pour la norme* $\operatorname{Sup}|\,.\,|$ *ou* $\|\;\|_\infty$*) des fonctions réelles continues sur V, tendant vers 0 à l'infini. Le semi-groupe P de la L-diffusion opère sur $C_0(V)$, i.e. $P_t f \in C_0(V)$ si $f \in C_0(V)$, donc : $P_t \in \mathcal{L}(C_0; C_0)$, (avec $\|P_t\| \leq 1$), et $t \mapsto P_t f$ est continu de $\mathbf{R}_+$ dans $C_0(V)$. Donc P est un semi-groupe de Hille-Yosida de contractions ≥ 0 de $C_0(V)$* [(2)].

Si cette propriété est réalisée, P a un généralisateur infinitésimal $\widetilde{L}$, avec un domaine Dom $(\widetilde{L}) \subset C_0(V)$. Considérons alors la propriété suivante :

(0.2).— *Soit Dom (L) le sous-espace vectoriel de $C_0(V)$: Dom $(L) = \{f \in C_0(V); Lf \in C_0(V)\}$, L opérant au sens des distributions. L'opérateur L, de domaine Dom (L), est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Hille-Yosida $\overline{P}$ de contractions ≥ 0 de $C_0(V)$.*

Voici enfin une troisième propriété :

(0.3) .— *Il existe sur V une fonction barrière f pour $L - \lambda I$, pour un $\lambda > 0$ ou pour tout $\lambda > 0$, c-à-d. surharmonique (relativement à $L - \lambda I$) > 0, tendant vers 0 à l'infini.*

Dans ces trois propriétés, les trajectoires du processus ne sont pas intervenues.

Soit $\widehat{V} = V \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de V.

Soit W l'espace des trajectoires (applications de $\mathbf{R}_+$ dans $\widehat{V}$) cadlag, $W = cadlag(\mathbf{R}_+; \widehat{V})$, muni de la tribu et de la filtration habituelles.

On pose $X(w) = w$, $X_t(w) = w_t$. On peut poser $X_\infty(w) = \infty$, mais la trajectoire n'a plus forcément de limite à gauche au temps ∞. Pour chaque $x \in V$, $\mathbf{P}^x$ est une probabilité sur W, pour laquelle $X_0 = x$ ps., et, si $\zeta^x = \operatorname{Inf}\{t; X_t = \infty\} \leq +\infty$, $X_t = \infty$ ps. pour $t \geq \zeta^x$ (ζ^x est le temps de mort ou d'explosion). Ce sont ces probabilités qui déterminent le processus ; le lien entre les $\mathbf{P}^x$, les trajectoires et les sous-probabilités de transition est :

$$(0.4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{P}(t,x)f &= P_t f(x) = \mathbf{E}^x\left(f(X_t) 1_{\{t<\zeta^x\}}\right) \\ \mathbf{P}(t,x) &= X_t\left(1_{\{t<\zeta^x\}}\mathbf{P}^x\right) = 1_V\, X_t(\mathbf{P}^x) \end{aligned} \right. .$$

Il sera plus commode de *prolonger f par 0 au point ∞ de V, alors*
$\mathbf{P}(t,x)f = \mathbf{E}^x f(X_t)$,
et ce sera vrai pour $x = \infty$ si on convient que $\mathbf{P}^\infty$ est la masse unité sur la trajectoire constante $= \infty$, et que $\mathbf{P}(t,\infty) = 0$; les $\mathbf{P}(t,x)$ seront toujours des mesures *sur* V. Donc la convention $f(\infty) = 0$ est sans importance pour la valeur de $\mathbf{P}(t,x)f$, mais elle est importante pour le calcul $\mathbf{E}^x f(X_t)$, parce que X_t est à valeurs dans $\widehat{V}$;

En fait, pour une L-diffusion sur V, les trajectoires sont $\mathbf{P}^x$ ps. continues sur $[0,+\infty[$; en particulier, si $\zeta^x < +\infty$, lorsque $t < \zeta^x$ tend vers ζ^x, $\mathbf{P}^x$ ps. X_t tend vers ∞.

Théorème (0.5).— *Ces trois propriétés (0.1), (0.2), (0.3) sont équivalentes ; et* $\overline{P} = P$, $L = \widetilde{L}$.

Démonstration. Ce théorème est connu[(3)].

(0.5.1) Implication (0.2) $\Rightarrow$ (0.1). Soit $\varphi \in C^2_{\text{comp}}(V) \subset \text{Dom}(L)$. On a

$$\overline{P}_t(\varphi) - \varphi = \int_0^t \overline{P}_s \, L\varphi \, ds \,, \tag{0.5.1.1}$$

l'intégrale étant celle d'une fonction continue du temps à valeurs dans le Banach $C_0(V)$.

A fortiori, pour tout x :

$$\overline{P}_t\varphi(x) - \varphi(x) - \int_0^t \overline{P}_s \, L\varphi(x) ds = 0 \,. \tag{0.5.1.2}$$

Mais le semi-groupe $\overline{P}$ définit un processus fortement sous- markovien à trajectoires cadlag sur $\widehat{V}$, processus de Hunt[4] comme la L-diffusion ; les éléments correspondants sont $\overline{P} = (\overline{P}_t)_{t\geq 0}$, les $\overline{\mathbf{P}^x}$, $\overline{\mathbf{P}(t,x)}$, sur le même espace $W = \text{Cadlag}(\mathbf{R}_+ ; \widehat{V})$, mais ici les trajectoires sont seulement a priori cadlag alors que celles de la diffusion sont continues.
Pour $\varphi \in C^2_{\text{comp}}(V)$, prolongée par 0 au point ∞ de V,

$$\overline{\mathbf{P}(t,x)}\varphi = \overline{P}_t\varphi(x) = \overline{\mathbf{E}^x}\, \varphi(X_t) \,. \tag{0.5.1.3}$$

Alors (0.5.1.2) s'écrit

$$\overline{\mathbf{E}^x}\left(\varphi(X_t) - \varphi(x) - \int_0^t L\varphi(X_s) ds\right) \tag{0.5.1.4}$$

Ceci est vrai quel que soit $x \in V$; l'utilisation de la formule de Markov montre alors aisément que la même formule est vraie en remplaçant $\overline{\mathbf{E}^x}$ par $(\overline{\mathbf{E}^x} \mid \mathcal{F}_r)$, espérance conditionnelle par rapport à la tribu $\mathcal{F}_r$, $r \geq t$. Donc

$$t \mapsto \varphi(X_t) - \varphi(x) - \int_0^t L\varphi(X_s) ds \tag{0.5.1.5}$$

est une $\overline{\mathbf{P}^x}$-martingale. Le système des probabilités $(\overline{\mathbf{P}^x})_{x\in V}$ est donc solution du problème des martingales pour L, c'est donc la L-diffusion ; donc $\overline{P} = P$, $\overline{\mathbf{P}(t,x)} = \mathbf{P}(t,x)$, $\overline{\mathbf{P}^x} = \mathbf{P}^x$ sur W, $L = \widetilde{L}$, ce qui est (0.1).

(0.5.2) Les implications (0.1) $\Rightarrow$ (0.3) et (0.2) $\Rightarrow$ (0.3) sont triviales. On prend comme fonction barrière $R(\lambda)g$, $g \in C_0(V)$, $g \geq 0$ non $\equiv 0$; si on part de (0.1), $R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t \, dt$ (intégrale pour la convergence simple des opérateurs), $R(\lambda) = (\lambda I - L)^{-1}$ si on part de (0.2), $\lambda I - L$ opérant de Dom (L) sur $C_0(V)$, donc $R(\lambda)$ de $C_0(V)$ dans Dom $(L) \subset C_0(V)$.

(0.5.3) L'implication (0.3) $\Rightarrow$ (0.2) se fait en deux étapes, c'est la seule qui soit vraiment délicate.

(0.5.3.1) - Première étape.

Proposition (0.5.3.1).— *Soit $\overline{U}$ une variété C^∞ à bord compacte, U son "intérieur", $\dot{U}$ son bord. Supposons L défini, C^∞, strictement elliptique sur $\overline{U}$. Alors on a (0.2) pour U. (Donc, d'après les démonstrations (0.5.1), (0.5.2), on a à la fois (0.1), (0.2), (0.3), avec $P = \overline{P}$, $\widetilde{L} = L$.*

Démonstration. Soit Dom $L = \{f \in C_0(U)\,;\, Lf \in C_0(U)\}$, L opérant au sens des distributions ; L est alors, avec ce domaine, un opérateur fermé, et Dom $L \supset C^2_{\text{comp}}(U)$ est dense dans $C_0(U)$. Montrons que L est dissipatif[5], c-à-d. que quelle que soit $f \in C_0(U)$, non $\equiv 0$, il existe un élément du dual de $C_0(U)$, donc une mesure $\mu, \|\mu\| = 1$ sur U, telle que $\langle \mu, f\rangle = \|f\|$, et que $\langle \mu, Lf\rangle \leq 0$. Or il existe un $a \in U$ tel que $f(a)$ ou $-f(a) = \|f\|_{C_0(U)}$; prenons le premier cas par exemple, a est un maximum > 0. Puisque Lf est continue, donc $\in L^p_{\text{loc}}$, f est dans $W^{2,p}_{\text{loc}}(U)$; $1 < p < +\infty$; prenons $p > N = \dim U$, (donc $f = C^1(U)$), alors un théorème de J-M. Bony[6] dit que $Lf(a) \leq 0$; c'est $\langle \delta_{(a)}, Lf\rangle \leq 0$, et en prenant $\mu = \delta_{(a)}$ on voit la dissipativité. Montrons maintenant que, pour tout $\lambda > 0$, $\lambda I - L$ est bijectif de Dom L sur $C_0(U)$.
On sait que, pour $g \in L^p$ donnée, le problème de Dirichlet

$$f \in W^{2,p}(U) \cap W^{1,p}_0(U)\,,\, (\lambda I - L)f = g\,, \tag{0.5.3.2}$$

a une solution unique. [Comme $W^{2,p}(U) \subset C(\overline{U})$ puisque $p > N/2$, $f \in W^{2,p}(U) \cap W^{1,p}_0(U)$ veut dire $f \in W^{2,p}(U) \cap C_0(U)$ (trace nulle sur $\dot{U}$), il suffit de prendre $g \in C_0(U)$ pour avoir la surjectivité.]

Pour l'injectivité, supposons $(\lambda I - L)f = 0$, donc f est C^∞ (ellipticité). Si f n'est pas $\equiv 0$, elle a, ou un maximum > 0, ou un minimum < 0 ; dans le premier cas par exemple, $Lf \leq 0$ au point où f a un maximum, alors $\lambda I - Lf > 0$ en ce point, ce qui est contradictoire, et c'est pareil dans l'autre cas].

Donc $\lambda I - L$ est bien bijectif et d'après Hille-Yosida, L est générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(\overline{P_t})_{t\geq 0}$ de contractions de $C_0(U)$, de résolvante $R(\lambda) = (\lambda I - L)^{-1}$, opérateur de $C_0(U)$ sur Dom (L). On voit aussitôt que $R(\lambda)$ est un opérateur ≥ 0, car si $g \geq 0$, la solution f est ≥ 0. [Sinon, elle aurait un minimum < 0, et là encore on aurait, au point correspondant de U, $Lf \geq 0$, $(\lambda I - L)f = g < 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse]. Donc $\overline{P_t} = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{-t\lambda}e^{t\lambda^2 R(\lambda)}$ est un opérateur ≥ 0. On a donc bien (0.2).

(0.5.3.3) - Deuxième étape - Nous ne donnerons pas la démonstration ; on passe d'une suite d'ouverts réguliers relativement compacts $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ épuisant V, à V, en utilisant la première étape pour chaque U_n, et la fonction-barrière sur V. Mais nous donnerons au Paragraphe 7 une démonstration directe de l'implication (0.1) $\Rightarrow$ (0.2) sans utiliser de fonction barrière, on aura donc l'équivalence (0.1) $\Leftrightarrow$ (0.2) sans fonction barrière (0.3), alors qu'ici on procède par (0.1) $\Rightarrow$ (0.3) $\Rightarrow$ (0.2).

(0.6) Il n'est guère possible de voir sur L si ces propriétés équivalentes sont réalisées ou non.

Les méthodes précédentes n'utilisent jamais les trajectoires de la diffusion, sauf pour le problème des martingales. Le but des paragraphes suivants est de relier les propriétés (0.1), (0.2) aux trajectoires de la diffusion ; ils seront plus "probabilistes". Ils ne permettront toutefois pas mieux, pour L donné, de voir si elles sont ou non réalisées.

1. Le flot relatif à L et les quatre problèmes d'opérance du semi-groupe P.

On sait qu'on peut trouver les trajectoires de la diffusion comme solutions d'une équation différentielle stochastique sur V, parce que L est de rang constant.(7)

On trouve un espace Ω, une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, une probabilité $\mathbf{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$, et un flot Φ, application borélienne de $\mathbf{R}_+ \times V \times \Omega$ dans $\widehat{V}$; $\Phi(.,x,.)$ est la solution de l'équation différentielle stochastique avec x comme point initial, $\Phi(0,x,.) = x\,\mathbf{P}$ ps. et possède un temps d'explosion $\zeta(x,.)$ variable aléatoire à valeurs ≥ 0 (finies ou non) ; $\Phi(t,x,\omega) \in V$ pour $t < \zeta(x,\omega)$, $= \infty$ pour $t \geq \zeta(x,\omega)$; $x \mapsto \zeta(x,.)$ est, pour $\mathbf{P}$-presque tout ω, une fonction s.c.i. (semi-continue inférieurement) ; et, pour $\mathbf{P}$-presque tout ω, $\Phi(.,.,\omega)$ est dans l'ouvert $\{t < \zeta(x,\omega)\}$ de $\mathbf{R}_+ \times V$, une fonction continue à valeurs dans V (8). [Elle est même C^∞ en x, et toutes ses dérivées en x, dans le même ouvert, sont continues en t, x. Nous ne nous en servirons pas].

Pour $\mathbf{P}$-presque tout ω, pour tout x tel que $\zeta(x,\omega) < +\infty$, la trajectoire $\Phi(.,x,\omega)$ est non-relativement compacte dans $\{t < \zeta(x,\omega)\}$, on ne sait pas si, lorsque $t < \zeta(x,\omega)$ tend vers $\zeta(x,\omega)$, $\Phi(t,x,\omega)$ tend vers l'infini dans V, mais on sait que c'est vrai pour tout x, pour $\mathbf{P}$-presque tout ω tel que $\zeta(x,\omega) < +\infty$.

On prolonge Φ à $\mathbf{R}_+ \times \widehat{V} \times \Omega$, en posant $\Phi(t,\infty,\omega) = \infty$, et ζ à $\widehat{V} \times \Omega$ en posant $\zeta(\infty,\omega) = 0$; elles gardent les mêmes propriétés. La trajectoire $\Phi(.,x,\omega)$ est continue sur $[0,\zeta(x,\omega)[$, continue $\equiv +\infty$ sur $[\zeta(x,\omega), +\infty[$; pour tout x, elle est $\mathbf{P}$ ps. continue. Pour $\omega \in \Omega$, $x \in \widehat{V}$, $\Phi(.,x,\omega)$ est donc un élément de $W = C(\mathbf{R}_+;\widehat{V})$, $\mathbf{P}$ ps. ; donc $\Phi(.,x,.)$ est une application borélienne de Ω dans W ; l'image de $\mathbf{P}$ par cette application est $\mathbf{P}^x$. Mais justement on va se servir dans la suite de $\mathbf{P}$ et du flot, pas seulement des $\mathbf{P}^x$.

Pour rendre les notations moins lourdes, nous écrirons X_t^x au lieu de $\Phi(t,x,.)$, ζ^x au lieu de $\zeta(x,.)$.

Mais alors on peut se débarrasser de toutes les hypothèses antérieures. Le flot peut être solution de n'importe quelle équation différentielle stochastique à coefficients localement bornés et localement lipschitziens sur V variété de classe C^2-lipschitzienne, à semi-martingales directrices continues *arbitraires* (non nécessairement browniennes) ; ou même il ne s'agit plus de processus proprement dits : Ω est un ensemble muni d'une probabilité $\mathbf{P}$, sans filtration, V est un espace topologique localement compact métrisable séparable, X un flot sur $\widehat{V}$, ζ un temps de mort, $x \mapsto \zeta^x$ est $\mathbf{P}$ ps. s.c.i., X est $\mathbf{P}$ ps. continu sur $\{t < \zeta^x\}$, à valeurs dans V, égal à ∞ sur $t \geq \zeta^x$.

Si f est une fonction borélienne bornée sur V, toujours prolongée à $\widehat{V}$ par $f(\infty) = 0$ (de sorte qu'elle est continue sur $\widehat{V}$ si $f \in C_0(V)$), on pose toujours

$\mathbf{P}(t,x)f = P_t f(x) = \mathbf{E} f(X_t^x)$,

$\mathbf{P}(t,x)$ est la mesure sur V : $X_t^x(1_{\{t<\zeta^x\}}\mathbf{P}) = 1_V X_t^x(\mathbf{P})$.

$P = (P_t)_{t\geq 0}$ n'est plus un semi-groupe ; on n'impose plus $X_0^x = x\,\mathbf{P}$ ps., donc P_0 n'est plus forcément l'identité ; on peut alors avoir $\zeta^x = 0$ pour certains $x \in V$, c-à-d. $X_0^x = \infty$.

Cette structure est apparemment très pauvre ; mais elle est riche de la continuité du flot aux temps $< \zeta$, et de la semi-continuité inférieure du temps de mort.

2. $f \in C_0(V) \Rightarrow P_t f \in CB(V)$?

Nous abrégeons ainsi la propriété

(2.0).— *Pour toute $f \in C_0(V)$, $P_t f \in CB(V)$, et $t \mapsto P_t f$ est continue de $\mathbf{R}_+$ dans $CB(V)$, muni de la convergence bornée sur V, uniforme sur tout compact de V. $CB(V)$ est l'espace des fonctions continues bornées sur V.*

Elle est évidemment équivalente aux deux suivantes :

(2.1).— *Pour toute $f \in C_0(V)$, P : $(t,x) \mapsto \mathbf{P}(t,x)f$ est continue sur $\mathbf{R}_+ \times V$.*

(2.2).— *$(t,x) \mapsto \mathbf{P}(t,x)$ est continue de $\mathbf{R}_+ \times V$ dans l'espace $M_+(V)$ des mesures bornées ≥ 0 sur V, muni de la topologie vague.*

En effet, la topologie vague est celle de la convergence simple sur $C_{\text{comp}}(V)$, dense dans $C_0(V)$, et le théorème d'Ascoli la rend équivalente à la convergence simple sur $C_0(V)$.

On a alors le théorème suivant :

Théorème (2.3).— *Pour que l'on ait les propriétés équivalentes (2.0), (2.1), 2.2), il faut et il suffit que $(t,x) \mapsto X_t^x$ soit continue en probabilité sur $\mathbf{R}_+ \times V$, c-à-d. de $\mathbf{R}_+ \times V$ dans $L^0(\Omega, \mathbf{P}; \widehat{V})$.*

Démonstration.

La définition de la convergence en probabilité suppose a priori sur $\widehat{V}$ une structure uniforme, mais il est compact métrisable ; de toute façon, la convergence d'une suite en probabilité équivaut à la possibilité d'extraire de toute sous-suite une sous-suite ps. convergente.

On voit bien qu'il s'agit d'un critère utilisant les trajectoires ; mais on ne peut pas le faire à partir des probabilités $\mathbf{P}^x$ sur $C(\mathbf{R}_+; \widehat{V})$, puisque justement il faut comparer X_t^x et X_t^y, relativement à la même $\mathbf{P}$ sur Ω, pour $x \neq y$.

Suffisance. Elle est évidente, car si $(t,x) \mapsto X_t^x$ est continue en probabilités, et $f \in C_0(V)$ donc, prolongée par 0, continue sur $\widehat{V}$, $(t,x) \mapsto f(X_t^x)$ est continue en probabilités sur $\mathbf{R}_+ \times V$, à valeurs réelles, et bornée, $(t,x) \mapsto \mathbf{P}(t,x)f = \mathbf{E}(f(X_t^x))$ est continue par le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Nécessité. Supposons (2.2), et choisissons $f \in C_0(V) \geq 0$, $f = 1$ sur un compact K de V. Soit $(t_0, x_0) \in \mathbf{R}_+ \times V$, et supposons que (t,x) converge vers (t_0, x_0) ; nous devons montrer que X_t^x converge vers $X_{t_0}^{x_0}$ en probabilité ; soit d une fonction distance sur $\widehat{V}$, définissant sa topologie. Soit $\Omega_0 = \{t_0 < \zeta^{x_0}\}$, $\Omega_1 = \Omega \setminus \Omega_0 = \{t_0 \geq \zeta^{x_0}\}$.

$$P_{t_0} f(x_0) = \int_{\Omega_0} f(X_{t_0}^{x_0}) d\mathbf{P}$$
$$P_t f(x) = \int_{\Omega_0} f(X_t^x) d\mathbf{P} + \int_{\Omega_1} f(X_t^x) d\mathbf{P}\,.$$

Pour $\mathbf{P}$-presque tout $\omega \in \Omega_0$, $X_t^x(\omega)$ converge vers $X_{t_0}^{x_0}(\omega)$ d'après la continuité du flot et la semi- continuité inférieure de ζ ; alors

$$\int_{\Omega_0} f(X_t^x) d\mathbf{P} \quad \text{converge vers} \quad \int_{\Omega_0} f(X_{t_0}^{x_0}) d\mathbf{P}\,;$$

donc nécessairement $\int_{\Omega_1} f(X_t^x) d\mathbf{P}$ tend vers 0.

Or il est $\geq \mathbf{P}(\Omega_1 \cap \{X_t^x \in K\})$, qui donc tend vers 0. Soit D le diamètre (pour d) de $V \setminus K$;

$$\left(d(X_t^x, \infty) = d(X_t^x, X_{t_0}^{x_0}) > D\right) \Longrightarrow X_t^x \in K\,,$$

$$\text{donc} \quad \mathbf{P}\left(\Omega_1 \cap \left\{d(X_t^x, X_{t_0}^{x_0}) > D\right\}\right) \leq \mathbf{P}(\Omega_1 \cap \{X_t^x \in K\}) \quad \text{tend vers} \quad 0\,.$$

Comme K est arbitraire, D est aussi petit qu'on veut, donc X_t^x tend vers $X_{t_0}^{x_0}$ en mesure sur Ω_1, et $\mathbf{P}$-ps. sur Ω_0, donc en probabilité sur Ω.

3. $f \in C_0(V) \Longrightarrow P_t f \in C_0(V)$?

La propriété (0.1), que nous répétons :

(3.0).— *Pour toute $f \in C_0(V)$, $P_t f \in C_0(V)$, et $t \mapsto P_t f$ est continue de $\mathbf{R}_+$ dans $C_0(V)$*

est évidemment équivalente aux deux suivantes :

(3.1).— *Pour toute $f \in C_0(V)$, $(t,x) \mapsto \mathbf{P}(t,x)f = P_t f(x)$ est continue sur $\mathbf{R}_+ \times \widehat{V}$.*

(3.2).— *$(t,x) \mapsto \mathbf{P}(t,x)$ est continue de $\mathbf{R}_+ \times \widehat{V}$ dans l'espace $M_+(V)$ des mesures ≥ 0 sur V, muni de la topologie vague.*

Théorème 3.3.— *Pour que l'on ait les propriétés équivalentes (3.0), (3.1), (3.2), il est nécessaire et suffisant que $(t,x) \mapsto X_t^x$ soit continue en probabilités sur $\mathbf{R}_+ \times \widehat{V}$, c-à-d. de $\mathbf{R}_+ \times \widehat{V}$ dans $L^0(\Omega, \mathbf{P}; \widehat{V})$.*

Démonstration. La suffisance est immédiate, on recopie la démonstration de la suffisance de (2.3) en remplaçant $\mathbf{R}_+ \times V$ par $\mathbf{R}_+ \times \widehat{V}$.
La nécessité aussi. Si $x_0 \in V$, on a vu à la démonstration de (2.3) la continuité en probabilité au point t_0, x_0. Il reste à la voir au point t_0, ∞.

On fait encore la même démonstration, mais ici $\Omega_0 = \phi$ (parce que $\zeta^{x_0} = \zeta^\infty = 0$), $\Omega_1 = \Omega$, et $\int_\Omega f(X_t^x)d\mathbf{P}$ doit tendre vers 0. Elle est $\geq \mathbf{P}\{X_t^x \in K\} \geq \mathbf{P}\{d(X_t^x, \infty) > D\}$ qui donc tend vers 0, d'où la conclusion.

Remarque (3.4) - La continuité de $(t,x) \mapsto X_t^x$ au point (t_0, ∞), comme nous venons de le voir, équivaut à : **(3.4.1)** pour tout compact K de V, $\mathbf{P}\{X_t^x \in K\}$ tend vers 0 si x tend vers l'infini et t vers t_0 ; donc aussi, si x tend vers ∞, uniformément pour $t \leq \tau < +\infty$.

C'est ce que nous avons appelé dans SCHWARTZ [2] la fuite des masses à l'infini (8.4 bis), page 252 .

Nous y avons vu que cela entraînait la propriété suivante :

(3.5).— *Quel que soit le compact K de V, le nombre $\varepsilon > 0$, le temps $t < +\infty$, il existe un compact L de V tel que, si la trajectoire part de $x \in K$, elle reste à tous les temps $\leq \tau$ dans L, avec une probabilité $\geq 1 - \varepsilon$ (permanence des trajectoires dans les compacts).*

Mais ceci était tout-à-fait particulier au cas markovien (sans explosion). Ce n'est plus du tout vrai ici. Soient t_0, x_0 quelconques tels que $\mathbf{P}\{t_0 \geq \zeta^{x_0}\} = \alpha > 0$ et $\varepsilon < \alpha$. Si on prend $K = \{x_0\}$, $\tau = t_0$, si la trajectoire part de x_0, elle n'est, quel que soit le compact L de V, dans L au temps t_0 qu'avec une probabilité $\leq 1 - \alpha < 1 - \varepsilon$.

4. $f \in CB(V) \Longrightarrow \mathbf{P}_t f \in CB(V)$?

La propriété :

(4.0).— *Pour toute $f \in CB(V)$, $P_t f \in CB(V)$, et $t \mapsto P_t f$ est continue de $\mathbf{R}_+$ dans $CB(V)$ muni de la convergence bornée sur V, uniforme sur tout compact de V,*

est évidemment équivalente aux deux suivantes :

(4.1).— *Pour toute $f \in CB(V)$, $Pf. : (t,x) \mapsto P_t f(x)$ est continue sur $\mathbf{R}_+ \times V$;*

(4.2).— *$(t,x) \mapsto \mathbf{P}(t,x)$ est continue de $\mathbf{R}_+ \times V$ dans $M_+(V)$, espace des mesures bornées ≥ 0 sur V, muni de la topologie de la convergence étroite.*

Considérons maintenant la propriété :

(4.3).— *La masse totale $(t,x) \mapsto m(t,x) = \mathbf{P}(t,x)1$ est continue sur $\mathbf{R}_+ \times V$.*

Elle résulte évidemment de (4.2), et il est bien connu[9] que, pour des mesures bornées ≥ 0, la convergence étroite est équivalente à la conjonction de la convergence vague et de la convergence des masses, donc (4.2) $\Leftrightarrow$ (2.2) et (4.3). Mais ici il y a plus (remarque de J. Neveu) :

Proposition (4.3.1).— *(4.3) entraîne (4.1) ; donc (4.0), (4.1), (4.2), (4.3) sont équivalentes.*

Démonstration.

Lemme (4.3.2).— *Pour toute f s.c.i. ≥ 0 (non nécessairement finie) sur V, Pf (toujours prolongée par 0 pour $x = \infty$) est s.c.i. sur $\mathbf{R}_+ \times \widehat{V}$.*

En effet, $(t, x) \mapsto X_t^x$ est $\mathbf{P}$-ps. continue sur $\{t < \zeta^x\}$ à valeurs dans V et vaut ∞ sur $\{t \geq \zeta^x\}$; donc $(t, x) \mapsto f(X_t^x)$ est $\mathbf{P}$-ps. s.c.i. ≥ 0 sur $\{t < \zeta^x\}$ et nulle sur $\{t \geq \zeta^x\}$, donc s.c.i. sur $\mathbf{R}_+ \times \widehat{V}$.

Alors (4.3.1) devient évidente. Soit $f \in CB(V)$, $0 \leq f \leq 1$; Pf est s.c.i. sur $\mathbf{R}_+ \times V$, $P(1-f)$ aussi, donc, si $P1$ est continue, $-Pf$ est s.c.i. donc Pf est s.c.s. donc continue sur $\mathbf{R}_+ \times V$. Par linéarité, c'est vrai pour $f \in CB(V)$ quelconque.

Théorème (4.4).— *Pour que l'on ait les propriétés équivalentes (4.0), (4.1), (4.2), (4.3), il est nécessaire et suffisant que $\zeta : x \mapsto \zeta^x$ soit continue en probabilité sur V, i.e. continue de V dans $L^0(\Omega, \mathbf{P}; \overline{\mathbf{R}}_+)$, et que pour tous $t \in \mathbf{R}_+$, $x \in V$, $\mathbf{P}\{\zeta^x = t\} = 0$.*

Démonstration. *Suffisance.* Supposons que (t, x) converge vers (t_0, x_0) dans $\mathbf{R}_+ \times V$, donc que ζ^x tende vers ζ^{x_0} en probabilité ; on peut se ramener au cas où la convergence a lieu $\mathbf{P}$- ps. Rappelons que $m(t, x) = \mathbf{P}(t, x)(1) = \mathbf{P}\{t < \zeta^x\}$. Sur $\{t_0 < \zeta^{x_0}\}$, pour $\mathbf{P}$-presque tout ω, on a, à partir d'un certain moment, $\{t < \zeta^x\}$; sur $\{t_0 > \zeta^{x_0}\}$, pour $\mathbf{P}$-presque tout ω, à partir d'un certain moment, on a $\{t > \zeta^x\}$; et $\{t_0 = \zeta^{x_0}\}$ est supposé $\mathbf{P}$-négligeable, d'où le résultat cherché.

Remarque : On doit pouvoir retrouver le fait que la continuité de $x \mapsto \zeta^x$ et la condition $\mathbf{P}\{t_0 = \zeta^{x_0}\} = 0$ entraînent la continuité de $(t, x) \mapsto X_t^x$, condition suffisante de (2.2).
Or c'est évident : sur $\{t_0 < \zeta^{x_0}\}$, X_t^x converge $\mathbf{P}$-ps. vers $X_{t_0}^{x_0}$; sur $\{t_0 > \zeta^{x_0}\}$, $\mathbf{P}$- ps. $\{t > \zeta^x\}$ à partir d'un certain moment, donc $X_t^x = \infty = X_{t_0}^{x_0}$; $\{t_0 = \zeta^{x_0}\}$ est $\mathbf{P}$-négligeable.

Nécessité. On suppose (4.3).
Alors

$$\begin{aligned} m(t_0, x_0) &= \mathbf{P}\{t_0 < \zeta^{x_0}\} \\ m(t, x) &= \mathbf{P}\{t < \zeta^x\} = \mathbf{P}\{t_0 < \zeta^{x_0} \quad \text{et} \quad t < \zeta^x\} + \mathbf{P}\{t_0 \geq \zeta^{x_0} \quad \text{et} \quad t < \zeta^x\}. \end{aligned}$$

A cause de la semi-continuité inférieure ps. de ζ, le premier terme du 2ème membre tend vers $\mathbf{P}\{t_0 < \zeta^{x_0}\} = m(t_0, x_0)$. Donc le deuxième :

$$\mathbf{P}\{t_0 \geq \zeta^{x_0} \quad \text{et} \quad t < \zeta^x\} \quad \text{tend vers} \quad 0. \tag{4.4.1}$$

Soient $\alpha \geq 0$, $\varepsilon > 0$. Prenons $t = t_0 = \alpha + \varepsilon$:

$$\mathbf{P}\{\alpha \leq \zeta^{x_0} \leq \alpha + \varepsilon \quad \text{et} \quad \zeta^x > \alpha + \varepsilon\} \leq \mathbf{P}\{\zeta^{x_0} \leq \alpha + \varepsilon \quad \text{et} \quad \zeta^x > \alpha + \varepsilon\} \quad \text{tend vers} \quad 0;$$

or il est $\geq \mathbf{P}\{\alpha \leq \zeta^{x_0} \leq \alpha + \varepsilon \, \text{et} \, \zeta^x > \zeta^{x_0} + \varepsilon\}$ qui donc tend aussi vers 0.

Recouvrons l'intervalle $[0, n]$, $n \in \mathbf{N}$, par n^2 intervalle de longueur $\varepsilon = \frac{1}{n^2}$, $[\frac{k}{n^2}, \frac{k+1}{n^2}]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n^2 - 1$, et appliquons ce qui précède, successivement à $\alpha = \frac{k}{n^2}, \varepsilon = \frac{1}{n^2}$, et additionnons :

$$\mathbf{P}\{\zeta^{x_0} \leq n \quad \text{et} \quad \zeta^x > \zeta^{x_0} + \varepsilon\} \quad \text{tend vers} \quad 0.$$

Pour n assez grand, $\mathbf{P}\{\zeta^{x_0} \leq n\}$ est aussi proche qu'on veut de $\mathbf{P}\{\zeta^{x_0} < +\infty\}$, donc $\mathbf{P}\{\zeta^{x_0} < \infty \quad \text{et} \quad \zeta^x > \zeta^{x_0} + \varepsilon\}$ tend vers 0 ;
mais $\mathbf{P}\{\zeta^{x_0} < \infty \quad \text{et} \quad \zeta^x > \zeta^{x_0} + \varepsilon\} = 0$, donc finalement $\mathbf{P}\{\zeta^x > \zeta^{x_0} + \varepsilon\}$ tend vers 0 quand x tend vers x_0 ; autrement dit, quand x tend vers x_0, sauf dans des cas (dépendant de x) de probabilité tendant vers 0, ζ^x finit par être $\leq \zeta^{x_0} + \varepsilon$; $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, ζ est s.c.s. (semi continue supérieurement) en probabilité. Comme il est s.c.i. $\mathbf{P}$-ps., il est continu en probabilité.

Montrons maintenant que, quels que soient $x_0 \in V$ et $t_0 \in \mathbf{R}_+$ (donc $< +\infty$), $\mathbf{P}\{\zeta^{x_0} = t_0\} = 0$. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite tendant vers x_0. Il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ tendant vers 0 telle que

$$\text{(4.4.2)} \qquad \mathbf{P}\left\{\zeta^{x_n} \leq \zeta^{x_0} - \varepsilon_n\right\} \leq \varepsilon_n\,,$$

à cause de la continuité de ζ, qu'on vient de démontrer. Prenons alors $t_n = t_0 - 2\varepsilon_n$; (t_n, x_n) tend vers (t, x), donc (4.4.1) dit que

$$\text{(4.4.3)} \qquad \mathbf{P}\left\{\zeta^{x_0} \leq t_0 \quad \text{et} \quad \zeta^{x_n} > t_0 - 2\varepsilon_n\right\} \quad \text{tend vers} \quad 0\,;$$

en prenant les intersections des deux ensembles $\{\ \}$ de (4.4.2) et (4.4.3) avec $\{\zeta^{x_0} = t_0\}$, on voit que, sur $\{\zeta^{x_0} = t_0\}$, sauf sur un ensemble de mesure tendant vers 0, on a à la fois $\zeta^{x_n} > t_0 - \varepsilon_n$ et $\zeta^{x_n} \leq t_0 - 2\varepsilon_n$, inégalités contradictoires, donc $\mathbf{P}\{\zeta^{x_0} = t_0\} = 0$.

5. $f \in CB(V) \Longrightarrow P_t f \in C_0(V)$ pour $t > 0$?

La propriété

(5.0).— *Pour toute $f \in CB(V)$, $P_t f \in C_0(V)$ pour $t > 0$, et $t \mapsto P_t f$ est continue de $\mathbf{R}_+$ dans $CB(V)$ comme à (4.0) et de $\mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$ dans $C_0(V)$,*

est évidemment équivalente aux deux suivantes :

(5.1).— *Pour toute $f \in CB(V)$, $(t, x) \mapsto \mathbf{P}(t, x)f$ est continue sur $\mathbf{R}_+ \times V$ et sur $(\mathbf{R}_+ \setminus \{0\}) \times \widehat{V}$;*

(5.2).— *$(t, x) \mapsto \mathbf{P}(t, x)$ est continue de $\mathbf{R}_+ \times V$ et de $(\mathbf{R}_+ \setminus \{0\}) \times \widehat{V}$ dans $M_+(V)$, espace des mesures ≥ 0 sur V, muni de la topologie étroite.*

Par le Lemme (4.3.2), (5.2) est équivalente à :

(5.3).— *$(t, x) \mapsto m(t, x) = \mathbf{P}(t, x)1$ est continue sur $\mathbf{R}_+ \times V$ et sur $(\mathbf{R}_+ \setminus \{0\}) \times \widehat{V}$; ou encore elle est continue sur $\mathbf{R}_+ \times V$ et tend vers 0 quand x tend vers ∞, uniformément pour $0 < \varepsilon \leq t \leq \tau + \infty$. C'est (5.0) ou (5.1) pour la seule fonction $f = 1$.*

Théorème (5.4).— *Pour que l'ensemble des propriétés équivalentes (5.0), (5.1), (5.2), (5.3) soit réalisé, il est nécessaire et suffisant que $x \mapsto \zeta^x$ soit continue en probabilité sur $\widehat{V}$ (i.e. continue en probabilité sur V et que ζ^x tende vers 0 en probabilité quand x tend vers ∞) et que, pour tout $t < +\infty$, $x \in V$, $\mathbf{P}\{\zeta^x = t\} = 0$*

Démonstration. En vertu de (4.4), il ne reste plus qu'à démontrer l'équivalence, pour t tendant vers $t_0 > 0$ et x tendant vers ∞ :

$\mathbf{P}(t, x)1$ (masse totale de $\mathbf{P}(t, x)$) tend vers $\mathbf{P}(t_0, \infty) = 0 \Leftrightarrow \zeta^x$ tend vers 0 en probabilité (i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbf{P}\{\varepsilon < \zeta^x\}$ tend vers 0), car une mesure ≥ 0 tend étroitement vers 0 si et seulement si sa masse totale tend vers 0 ; or c'est évident puisque $\mathbf{P}(t, x)1 = \mathbf{P}\{t < \zeta^x\}$.

Remarques (5.4.1) Cette propriété n'est jamais réalisée si $\zeta \equiv +\infty$; d'ailleurs dans ce cas $P_t 1 = 1$ ne tend pas vers 0 à l'infini.

(5.4.2) On ne peut évidemment pas remplacer $\mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$ par $\mathbf{R}_+$; par exemple, si P_0 est l'identité, $\mathbf{P}(0, x)1 = 1$ pour $x \in V$, $= 0$ pour $x = \infty$. La continuité sur $\mathbf{R}_+ \times V$ et sur $(\mathbf{R}_+ \setminus \{0\}) \times \widehat{V}$ revient à la continuité sur le complémentaire de $(0, \infty)$ dans $\mathbf{R}_+ \times \widehat{V}$.

On a donc vu que les conditions : $x \mapsto \zeta^x$ est continu en probabilité sur V, et $\mathbf{P}\{\zeta^x = t\} = 0$ pour $t \in \mathbf{R}_+$, $x \in V$ entraînent la continuité en probabilité de $(t, x) \mapsto X_t^x$ sur $\mathbf{R}_+ \times V$. La réciproque n'est pas vraie.

Exemple (5.4.2.1) - $V = \mathbf{R}$, $\Omega = \{1\}$, $\mathbf{P} = \delta_{(1)}$, $X_t^x = \frac{1}{(1-t)_+ + x^2}$ pour $x \in \mathbf{R}$, $X_t^\infty = \infty$; $\zeta^x = +\infty$ pour $x \neq 0$, ∞, $\zeta^0 = 1$, $\zeta^\infty = 0$.

On voit bien que $(t,x) \mapsto X_t^x$ est continue (son inverse l'est) sur $\mathbf{R}_+ \times V$ (mais pas sur $\mathbf{R}_+ \times \widehat{V}$), mais $x \mapsto \zeta^x$ est discontinue au point 0, et $\mathbf{P}\{\zeta^0 = 1\} = 1$. Donc on a (2.0), mais pas (3.0) ni (4.0).

Exemple (5.4.2.2) - $V = \mathbf{R}$, $\Omega = [0,1]$, $\mathbf{P}$ mesure de Lebesgue, $X_t^x(\omega) = \frac{1}{(\omega-t)_+ + x^2}$ pour x fini, $X_t^\infty = \infty$;

$$\zeta^x = +\infty \quad \text{pour} \quad x \neq 0, \infty\,, \; \zeta^0(\omega) = \omega\,, \; \zeta^\infty = 0\,.$$

Ici $(t,x) \mapsto X(t,x)$ est continue en probabilité sur $\mathbf{R}_+ \times V$ (pas sur $\mathbf{R}_+ \times \widehat{V}$), $x \mapsto \zeta^x$ est discontinue en probabilité au point 0, mais $\mathbf{P}\{\zeta^x = t\} = 0$ quel que soit $(t,x) \in \mathbf{R}_+ \times V$.

Exemple (5.4.2.3) - $V = \mathbf{R}$, $\Omega = 1$, $\mathbf{P} = \delta_{(1)}$, $X_t^x = \frac{x}{1-tx} = \frac{1}{\frac{1}{x}-t}$ pour $x \in \mathbf{R}$, $X_t^\infty = \infty$;

$$\zeta^x = \frac{1}{x_+} \quad \text{pour} \quad x \neq \infty\,, \quad \text{donc} \quad = +\infty \quad \text{pour} \quad x \leq 0\,, \; \zeta^\infty = 0\,.$$

On voit que $(t,x) \mapsto X_t^x$ est continue sur $\mathbf{R}_+ \times V$, $x \mapsto \zeta^x$ est continue sur $\widehat{V}$, $\mathbf{P}\{\zeta^x = t\} = 0$ si $t \neq \frac{1}{x_+}$, $+1$ si $t = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Exemple (5.4.2.4) - $V = \mathbf{R}$, $\Omega = [0,1]$, $\mathbf{P}$=Lebesgue, $X_t^x(\omega) = \frac{1}{(1-t-\omega x^2)_+}$ pour $x \in \mathbf{R}$, 0 pour $x = \infty$;

$$\zeta^x(\omega) = (1-\omega x^2)_+\,, \; \zeta^\infty(\omega) = 0\,; \quad \text{donc} \quad \zeta^0 = 1\,.$$

On notera que $\zeta^x(\omega) = 0$ donc $X_0^x(\omega) = \infty$ si $x^2 \geq \frac{1}{\omega}$.

Ici $(t,x) \mapsto X_t^x$ est continu $\mathbf{P}$-ps. sur $\mathbf{R}_+ \times \widehat{V}$, $x \mapsto \zeta^x$ est continu $\mathbf{P}$-ps. sur $\widehat{V}$, et $\mathbf{P}\{\zeta^x = t\} = 0$ si $x \neq 0$ ou si $x = 0$, $t \neq 1$, mais $\mathbf{P}(\zeta^0 = 1) = 1$.

Remarque *(5.4.2.5)* - Ces processus sont respectivement les solutions des équations différentielles stochastiques (ou déterministes) :

$$\begin{aligned}
dX_t &= X_t^2 dt \; 1_{\{1-t>0\}} \quad , \quad X_0^x = \frac{1}{1+x^2} \\
dX_t &= X_t^2 dt \; 1_{\{\omega-t>0\}} \quad , \quad X_0^x(\omega) = \frac{1}{\omega+x^2} \\
dX_t &= X_t^2 dt \quad , \quad X_0^x = x \\
dX_t &= X_t^2 dt \quad , \quad X_0^x(\omega) = \frac{1}{(1-\omega x^2)_+}\,.
\end{aligned}$$

Elles vérifient les conditions de majoration et de lipschitz assurant l'existence et l'unicité (avec temps de mort).

5bis. Variations sur les résultats précédents.

On peut remplacer la continuité partout par la continuité en un point (t_0, x_0), ou la continuité partielle par rapport à t ou partielle par rapport à x. Les modifications à apporter aux démonstrations sont infimes, nous ne les donnerons pas.

(5bis. 1) - Continuité en un point (t_0, x_0).

Au Paragraphe 2, on supprime (2.0), et on énonce (2.1), (2.2) en mettant partout : continue au point (t_0, x_0) ; au Paragraphe 3 de même avec $x_0 = \infty$. Pour le Paragraphe 4, c'est un peu plus compliqué ; on fixe x_0, et on étudie la continuité en tous les points (t_0, x_0), $t_0 \in \mathbf{R}_+$; du côté des trajectoires, on aura la continuité de $x \mapsto \zeta^x$ au point x_0, et les égalités $\mathbf{P}\{\zeta^{x_0} = t_0\} = 0$, $t_0 \in \mathbf{R}_+$; au Paragraphe 5 de même avec $x_0 = \infty$,
$t_0 \in \mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$.

(5bis. 2) - Continuité partielle en t.

Au Paragraphe 2, on supprime (2.0), et on remplace partout la continuité de $(t,x) \mapsto \ldots$ par celle de $t \mapsto \ldots$, pour tout x_0 fixé dans V ; le Paragraphe 3 disparaît. Au Paragraphe 4, on fera tendre (t, x_0) vers (t_0, x_0), c'est à dire t vers t_0 pour tout x_0 fixé dans V ; on trouvera pour les trajectoires la seule condition $\mathbf{P}\{\zeta^x = t\} = 0$, pour tout $(t,x) \in \mathbf{R}_+ \times V$; la continuité de $x \mapsto \zeta^x$ disparaît. Le Paragraphe 5 disparaît.

(5bis. 3) - Continuité partielle en x.

Pour les Paragraphes 2 et 3, on garde (2.0), (3.0), avec seulement $P_t f \in C_0(V)$ ou $CB(V)$, sans continuité de $t \mapsto P_t f$; pour (2.1), (2.2), (3.1), (3.2), on remplacera la continuité de $(t,x) \mapsto \ldots$ par celle de $x \mapsto \ldots$, pour tout t_0 fixé. Pour les Paragraphes 4, 5, c'est un peu plus compliqué :

Proposition (5bis. 3.1).— *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(5bis. 3.1.0) *Pour toute $f \in CB(V)$, et tout $t \in \mathbf{R}_+$, $P_t f \in CB(V)$ (resp. pour tout $t > 0, P_t f \in C_0(V)$) ;*

(5bis. 3.1.1) *Pour tout $t \geq 0$ (resp. $t > 0$), $x \mapsto \mathbf{P}(t,x)$ est étroitement continue sur V (resp. sur $\hat{V}$) ;*

(5bis. 3.1.2) *Pour tout $t \geq 0$ (resp. $t > 0$), $x \mapsto m(t,x)$ est continue sur V (resp. sur $\hat{V}$) ;*

(5bis. 3.1.3) *D'une part $x \mapsto \zeta^x$ est continue en probabilité sur V (resp. sur $\hat{V}$), d'autre part, pour tout $t_0 \geq 0$ (resp. $t_0 > 0$) et tout $x_0 \in V$, quand x tend vers x_0, $\mathbf{P}\{\zeta^{x_0} = t_0 \text{ et } \zeta^x > t_0\}$ tend vers 0.*

Démonstration. On reprend les démonstrations des paragraphes 4, 5, mais en laissant fixe $t = t_0$.
Suffisance Sur $\{t_0 < \zeta^{x_0}\}$ et $\{t_0 > \zeta^{x_0}\}$, rien de changé ; mais $\mathbf{P}\{t_0 = \zeta^{x_0}\}$ n'est plus supposé nul. On voit aussitôt que la condition de l'énoncé est suffisante.
Nécessité (4.4.1) est à remplacer par :

(5bis 3.1.4) Quand x tend vers x_0, pour $t_0 \geq 0$ (resp. $t_0 > 0$) :

$$\mathbf{P}\{t_0 \geq \zeta^{x_0} \quad \text{et} \quad t_0 < \zeta^x\} \quad \text{tend vers} \quad 0.$$

Le début de la démonstration reste inchangé car seul t_0 est utilisé, et on montre ainsi que $x \mapsto \zeta^x$ est continue. Mais la fin n'est plus utilisable, car elle utilise à la fois t_0 et $t = t_0 - 2\varepsilon_n$, donc on ne peut pas prouver que $\mathbf{P}\{\zeta^{x_0} = t_0\} = 0$; mais (5bis 3.1.4) donne justement la fin de (5bis 3.1.3)

Corollaire (5bis. 3.1.5).— *Si $(t,x) \mapsto \mathbf{P}(t,x)$ est étroitement continue par rapport à t pour x fixé et par rapport à x pour t fixé, elle est continue.*

Démonstration. On juxtapose les conditions : continuité de $x \mapsto \zeta^x$ de (5bis 3.1) et $\mathbf{P}\{\zeta^x = t\} = 0$ de (5bis 2), et on trouve les conditions de (4.4).

Remarque : C'est évident directement ; car $t \mapsto \mathbf{P}\{t < \zeta^x\}$ est décroissante, donc si elle est continue, elle l'est uniformément pour x dans un compact par le théorème de Dini.

(5bis. 3.1.6) Reprenons l'exemple (5.4.2.4) du Paragraphe 5.

On a vu que $x \mapsto \zeta^x$ est continue en probabilité sur $\widehat{V}$, mais que $\mathbf{P}\{\zeta^0 = 1\} \neq 0$. Cela prouve que la fonction m n'est pas continue sur $\mathbf{R}_+ \times V$ ni même partiellement continue en t. Mais les conditions de (5bis 3.1.3) sont vérifiées ; en effet, pour $(t_0, x_0) \neq (1,0)$, $\mathbf{P}\{\zeta^{x_0} = t_0\} = 0$, et, sur $\{\zeta^0 = 1\}$, c-à-d. sur Ω, on a $\zeta^x \leq 1$ partout. Donc, pour tout $t_0 \geq 0$, $x \mapsto m(t_0, x)$ doit être continue sur $\widehat{V}$. Calculons-la :

(5bis. 3.1.7)

$$\begin{aligned} m(t,x) &= \mathbf{P}\{t < \zeta^x\} \\ &= \mathbf{P}\{\omega \in [0,1]\,;\, t < (1-\omega x^2)_+\} = \begin{cases} (\frac{1-t}{x^2})_+ \wedge 1 & \text{pour } (t,x) \neq (1,0), \\ 0 & \text{pour } (t,x) = (1,0). \end{cases} \end{aligned}$$

On vérifie que m est partiellement discontinue en t au point $(1,0)$, mais partiellement continue en x sur $\mathbf{R}_+ \times \widehat{V}$.

Dans l'exemple (5.4.2.3), $m(t,x) = 1_{\{x>0, t<\frac{1}{x}\}}$ est séparément discontinue en t et en x.

6. Cas d'un ouvert U régulier relativement compact de V, et d'une L-diffusion.

Proposition (6.1).— *Soit A un ouvert de V, d'adhérence $\overline{A}$, de frontière $\dot{A}$; on suppose que tous les points de $\dot{A}$ sont réguliers pour A au sens des processus de Markov : A n'est pas effilé en ces points ; en fait il suffit de supposer que tous les points de $\dot{A}$ réguliers pour $\overline{A}$ sont réguliers pour A). Soient S^x, T^x les temps d'entrée*

$$\begin{aligned} S^x &= \operatorname{Inf}\{t > 0\,;\, X_t^x \in \overline{A}\} \\ T^x &= \operatorname{Inf}\{t > 0\,;\, X_t^x \in A\}, \end{aligned}$$

le processus étant de nouveau la L-diffusion du Paragraphe 0.

Pour tout x_0, $\mathbf{P}$-ps., $S^{x_0} = T^{x_0}$ et $x \mapsto S^x$, $x \mapsto T^x$ (fonctions non nécessairement égales) sont continues au point x_0.

Démonstration. $X_{S^{x_0}}^{x_0}$ et $X_{T^{x_0}}^{x_0}$ sont dans $\overline{A} \cup \{\infty\}$, si l'on convient que $X_\infty^{x_0} = \infty$. Si $x_0 \in A$, tout est évident, soit donc $x_0 \in V \setminus A$ auquel cas $X_{S^{x_0}}^{x_0}$ et $X_{T^{x_0}}^{x_0}$ sont dans $\dot{A} \cup \{\infty\}$.

1) Pour $y \in \dot{A}$, donc régulier pour A, $S^y = T^y = 0$ $\mathbf{P}$ ps. ; autrement dit, en reprenant les $\mathbf{P}^y$ sur W, l'espace des trajectoires, comme au Paragraphe 0, $\mathbf{P}^y$ ps. la trajectoire rencontre A dans tout intervalle de temps $]0,\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$; pour $y = \infty$, $\mathbf{P}^y$-ps la trajectoire est constamment au point ∞. Donc, quelle que soit la probabilité μ sur $\dot{A} \cup \{\infty\}$, $\mathbf{P}^\mu$-ps. ou bien la trajectoire rencontre A dans tout $]0,\varepsilon]$, ou bien elle reste au point ∞ de $\widehat{V}$. Par la propriété de Markov, en prenant $\mu = X_S(\mathbf{P}^{x_0})$, $S(w)$, $T(w)$ temps d'entrée de $X(w)$ dans $\overline{A}$, A, on voit que $\mathbf{P}^{X_S(\mathbf{P}^{x_0})}$-ps. cette propriété a lieu, donc $\mathbf{P}^{x_0}$-ps. ou bien la trajectoire rencontre A dans tout intervalle $]S, S+\varepsilon]$, ou bien elle reste au point ∞ de $\widehat{V}$; dans chaque cas, $T = S$, donc $T = S$ $\mathbf{P}^{x_0}$ ps., ou $T^{x_0} = S^{x_0}$ $\mathbf{P}$-ps.

2) Soit $x_0 \in V \setminus \overline{A}$. Soit $\sigma < S^{x_0}(\omega) = T^{x_0}(\omega)$. Dans $[0,\sigma]$, $X^{x_0}(\omega) \in V \setminus \overline{A}$, donc, par la continuité du flot dans l'ouvert $[0, \zeta^x(\omega)[$, et la semi-continuité inférieure de ζ, $X^x(\omega) \in V \setminus \overline{A}$ dans $[0,\sigma]$ pour x assez voisin de x_0 ; alors $T^x(\omega) \geq S^x(\omega) \geq \sigma$, donc $x \mapsto S^x$ et $x \mapsto T^x$ sont $\mathbf{P}$-ps. s.c.i. au point x_0. Soit maintenant $\tau > T^{x_0}(\omega) = S^{x_0}(\omega)$, dans le cas $S^{x_0}(\omega) = T^{x_0}(\omega) < +\infty$ seul intéressant. Alors $X^{x_0}(\omega)$ s'est trouvé dans A à des instants $\leq \tau$, donc c'est encore vrai

de $X^x(\omega)$ pour x assez voisin de x_0, donc $S^x(\omega) \leq T^x(\omega) \leq \tau$, donc $x \mapsto S^x$ et $x \mapsto T^x$ sont $\mathbf{P}$-ps. s.c.s. au point x_0.

Soit enfin $x_0 \in \dot{A}$. Alors $S^{x_0} = T^{x_0} = 0$, $\mathbf{P}$-ps. Mais la fin du raisonnement qui précède montre que, si $\tau > 0$, $\mathbf{P}$-ps. $S^x \leq T^x \leq \tau$ pour x assez voisin de x_0, d'où la continuité cherchée, dans tous les cas.

(6.2)
Remarques (6.2.1) - On ne peut pas remplacer "pour tout x_0, $\mathbf{P}$-ps." par "$\mathbf{P}$-ps. pour tout x_0".
Considérons en effet le brownien normal B sur $\mathbf{R}$, $B_0 = 0$. On prendra le flot $X^x = B + x$, $A =]-\infty, 0[$, $\overline{A} =]-\infty, 0]$, $\zeta \equiv +\infty$. Pour $\omega \in \Omega$, soit $-x_0 = -x_0(\omega)$ le minimum de $B(\omega)$ dans l'intervalle de temps $[0,1]$. Pour presque tout ω, $x_0 > 0$. Alors le temps d'entrée de $B(\omega)$ dans $]-\infty, -x_0(\omega)]$ est ≤ 1, et pour $\mathbf{P}$-presque tout ω il est < 1 et le temps d'entrée dans $]-\infty, -x_0(\omega)[$ est > 1 ; donc le temps d'entrée $S^{x_0}(\omega)$ de $X^{x_0}(\omega) = B(\omega) + x_0(\omega)$ dans $\overline{A}$ est < 1, et le temps d'entrée $T^{x_0}(\omega)$ dans A est > 1 : pour $\mathbf{P}$-presque tout ω, il existe un x_0 tel que $S^{x_0}(\omega) < 1 < T^{x_0}(\omega)$. Ensuite, pour $x > x_0$, $B(\omega) + x > 0$ dans l'intervalle de temps $[0,1]$, donc $S^x(\omega) > 1$, et $y \mapsto S^y(\omega)$ est discontinu au point x_0. Si $x < x_0$, $B(\infty) + x < 0$ à l'instant $t = S^{x_0}(\omega) < 1$, donc $T^x(\omega) < 1$, $y \mapsto T^y(\omega)$ est discontinu au point x^0.

(6.3) On va maintenant considérer une variété compacte C^∞ avec bord $\overline{U}$, d'"intérieur" U, de bord $\dot{U}$; on pourra la supposer plongée dans une variété C^∞ sans bord V. L'opérateur L strictement elliptique sera défini sur $\overline{U}$, et, pour V assez petite, on pourra le supposer prolongé à V. Alors L définit une diffusion sur V ; donc un flot $X_t^x(\omega)$, un temps de mort $\zeta^x(\omega) \leq +\infty$; on supposera, comme avant, tout prolongé au compactifié d'Alexandroff $\widehat{V}$ de V, mais cela n'interviendra pas.

Le compactifié d'Alexandroff $\widehat{U}$ de U est le quotient de $\overline{U}$ obtenu en réduisant $\dot{U}$ à un point, ce qu'on écrira $\overline{U}/\dot{U} = \widehat{U}$; l'image de $x \in U$ dans le quotient sera $x^\cdot$ (ou simplement x si $x \in U$), l'image de $\dot{U}$ sera $\infty^\cdot$, point à l'infini de $\widehat{U}$, $\widehat{U} = U \cup \{\infty^\cdot\}$. Le flot $X_t^{x^\cdot}$ sur $\widehat{U}$ s'obtiendra comme suit : $S^x(\omega)$ est le temps d'entrée $< \zeta^x(\omega)$ donc fini de $X^x(\omega)$ dans $\dot{U}$ ou dans $V \setminus U$, alors $X_t^{x^\cdot}(\omega)$ est son image dans $\widehat{U}$; le temps de mort est $\zeta^{x^\cdot}(\omega) = S^x(\omega)$.

Théorème (6.3).—
1) *Pour tout $x_0 \in \overline{U}$, $\mathbf{P}$-ps., $x \mapsto S^x$ est continue au point x_0. Donc $x^\cdot \mapsto \zeta^{x^\cdot}$ est continu en probabilité sur $\widehat{U}$. En particulier, si $x^\cdot$ tend vers $\infty^\cdot$, $\zeta^{x^\cdot}$ tend vers 0 en probabilité.*

2) *pour $(t,x) \in \mathbf{R}_+ \times U$, $\mathbf{P}\{S^x = t\} = \mathbf{P}\{\zeta^{x^\cdot} = t\} = 0$.*

3) *Pour tout $x_0 \in \overline{U}$, $\mathbf{P}$-ps., pour tout t_0, $(t,x) \mapsto X^x_{t \wedge S^x}$ est continu au point (t_0, x_0). Donc $(t, x^\cdot) \mapsto X_t^{x^\cdot}$ est continu en probabilité sur $\mathbf{R}_+ \times \widehat{U}$. En particulier, quand $x^\cdot$ tend vers $\infty^\cdot$, $X_t^{x^\cdot}$ converge vers $\infty^\cdot$ en probabilité, uniformément pour $t \leq \tau < +\infty$.*

Démonstration.
1) Le début est (6.1), appliqué à $A \subset V$, $A = V \setminus \overline{U}$; tous les points de $\dot{A}$ sont réguliers pour A [(10)].

Nous avons vu à la Remarque (6.2.1) qu'on ne peut pas intervertir "quel que soit x_0"et $\mathbf{P}$-ps ; par contre, cela entraîne que $x \mapsto S^x$ soit continue en probabilité sur $\overline{U}$. Une fonction continue sur $\overline{U}$, continue (nulle) sur $\dot{U}$, est continue sur le quotient obtenu par écrasement de $\dot{U}$ en un point, donc $x^\cdot \mapsto S^{x^\cdot}$ est continue en probabilité sur $\widehat{U}$.

En particulier, pour tout $x_0 \in \dot{U}$, S^x tend $\mathbf{P}$-ps. vers 0 quand x tend vers x_0 ; on ne peut pas en général intervertir "quel que soit $x_0 \in \dot{U}$" et $\mathbf{P}$-ps. [nous disons "pas en général", mais nous n'en savons rien, le contre-exemple (6.2.1) ne s'applique pas ici] ; donc il n'est pas sûr que $\mathbf{P}$-ps. $S^{x^\cdot}$ tende vers 0 quand $x^\cdot$ tend vers $\dot{U}$, mais il est sûr qu'il converge en probabilité vers 0.

2) L'image $1_V X_{t_0}^{x_0}(\mathbf{P})$ est une loi sur V, dont on sait qu'elle est absolument continue par rapport aux mesures de Lebesgue C^∞ sur V ; donc la masse portée par l'hypersurface $\dot{U}$ est nulle. Or, si $\mathbf{P}\{t_0 = S^{x_0}\} > 0$, elle devrait être > 0, puisque $X_{t_0}^{x_0} = X_{S^{x_0}}^{x_0} \in \dot{U}$ sur $\{t_0 = S^{x_0}\}$.

3) Il suffit de modifier légèrement la démonstration de (4.4). Pour tout $x_0 \in \overline{U}$, $\mathbf{P}$-ps., pour tout t_0, lorsquer (t,x) tend vers (t_0,x_0) : ou bien $t_0 < S^{x_0}$, alors $\mathbf{P}$-ps. $t < S^x$ pour (t,x) assez voisin de (t_0,x_0), donc $X_{t\wedge S^x}^x = X_t^x$ tend vers $X_{t_0}^{x_0} = X_{t\wedge S^{x_0}}$, ou bien $t_0 > S^{x_0}$, alors $\mathbf{P}$-ps. $t > S^x$ pour (t,x) assez voisin de (t_0,x_0), donc $X_{t\wedge S^x}^x = X_{S^x}^x$ tend vers $X_{S^{x_0}}^{x_0} = X_{t_0\wedge S^{x_0}}^{x_0}$, ou bien $t_0 = S^{x_0}$, mais $\{t_0 = S^{x_0}\}$ est $\mathbf{P}$-négligeable ; donc $\mathbf{P}$-ps. $(t,x) \mapsto X_{t\wedge S^x}^x$ est continu au point (t_0,x_0). A fortiori $(t,x) \mapsto X_t^{x^\cdot}$ est continue en probabilité sur $\mathbf{R}_+ \times \overline{U}$; constante (égale à $\infty^\cdot$), sur $\mathbf{R}_+ \times \dot{U}$, elle est continue en probabilité sur le quotient $(\mathbf{R}_+ \times \overline{U})/(\mathbf{R}_+ \times \dot{U})$.

En particulier, quand $x^\cdot$ tend vers $\infty^\cdot$, $X_t^{x^\cdot}$ tend vers $\infty^\cdot$ en probabilité, uniformément pour $t \leq \tau < +\infty$ (pour tout compact K de U, $\sup\limits_{t\leq\tau} \mathbf{P}\{X_t^{x^\cdot} \in K\}$ tend vers 0 quand $x^\cdot$ tend vers $\infty^\cdot$).

Ici encore, le contre-exemple (6.2.1) ne s'applique pas, il est donc possible que $\mathbf{P}$-ps. $X_t^{x^\cdot}$ tende vers $\infty^\cdot$ quand $x^\cdot$ tend vers $\infty^\cdot$.

Corollaire (6.4).— *Pour (U,L), toutes les propriétés des trajectoires énoncées à (2.3), (3.3), (4.4), (5.4) sont vérifiées, donc toutes les opérances de $P = (P_t)_{t\geq 0}$ des Paragraphes 2, 3, 4, 5 sont réalisées.*

En particulier P est un semi-groupe de Hille-Yosida de contractions ≥ 0 de $C_0(U)$, ce qui est (0.1), donc les 3 propriétés équivalentes (0.1), (0.2), (0.3) sont réalisées. Nous l'avions déjà vu à (0.5.3.1), en montrant que (0,2) était réalisée (propriété du générateur infinitésimal, par un problème de Dirichlet) ; nous le voyons ici en montrant (0.1) par les propriétés des trajectoires. Mais, en revenant au Paragraphe 0, nous avons vu que ce qui est facile est (0.2) $\Rightarrow$ (0.1) et que (0.1) $\Rightarrow$ (0.2) est plus difficile. Or ici nous venons seulement de retrouver, par ces trajectoires, (0.1) ; pour récupérer (0.2), nous n'évitons pas de le refaire directement par le problème de Dirichlet (0.5.3.1), et de réutiliser l'implication (0.2) $\Rightarrow$ (0.1) pour retrouver $P = \overline{P}$, $\widetilde{L} = L$. L'utilisation des trajectoires n'en garde pas moins son intérêt, d'autant plus qu'elle donne des résultats plus forts ((5.4) : pour $f \in CB(U)$, $P_t f \in C_0(U)$ pour $t > 0$), et qu'on trouve, dans le cas de (U,L), des continuités presque sûres et pas seulement en probabilité, pour les trajectoires et le temps d'explosion.

Proposition (6.5).— *Soit f borélienne bornée sur U, donc $Pf : (t,x) \mapsto \mathbf{P}(t,x)f$ borélienne bornée sur $\mathbf{R}_+ \times U$; elle vérifie, au sens des distributions, $(\partial_t - L)Pf = 0$. Après modification sur un ensemble négligeable de $(\mathbf{R}_+ \setminus \{0\}) \times U$, elle devient une fonction C^∞ sur ce produit, et sans modification si elle est continue.*

Démonstration. L'ensemble des f boréliennes bornées sur U pour lesquelles on a l'équation de la chaleur (au sens des distributions) $(\partial_t - L)Pf = 0$ sur $(\mathbf{R}_+ \setminus \{0\}) \times U$ est stable par passage à la limite simple des suites bornées ; or cette équation est vérifiée pour f dans l'algèbre $C^2_{\mathrm{comp}}(U) \subset \operatorname{Dom} L$, donc pour toute la tribu borélienne (classes monotones). Par l'ellipticité de L, Pf est représentée, en tant que distribution, par une fonction C^∞ à laquelle elle est donc p.p. égale ; elle lui est partout égale si elle est continue, ce qui se produit si f est continue bornée, par (6.4).

Corollaire (6.6).— *La fonction $m, m(t,x) = \mathbf{P}\{t < S^x\} = \mathbf{P}(t,x)1$ est C^∞ sur $(\mathbf{R}_+ \setminus \{0\}) \times U$ et vérifie $(\partial_t - L)m = 0$.*

Remarque (6.7) - Quand $f \in \operatorname{Dom}(L)$, $LP_t f = P_t L f$; ce n'est pas vrai en général. Par exemple $P_t L1 = 0$, mais $LP_t 1 = Lm_t$ n'est pas nul. Sans quoi m, L-harmonique nulle au bord pour $t > 0$, serait nulle.

7. Retour au cas d'une variété V C^∞générale ; l'implication (0.1) $\Rightarrow$ (0.2).

Au Paragraphe 0, nous avons montré les implications (0.1) $\Rightarrow$ (0.3) et (0.2) $\Rightarrow$ (0.3), faciles, l'implication (0.2) $\Rightarrow$ (0.1), relativement facile ; mais pas (0.3) $\Rightarrow$ (0.2), sauf la première étape (problème de Dirichlet, pour le cas $V = U, (0.5.3.1)$).

Nous allons ici nous affranchir des fonctions-barrières (ce n'est pas un titre de gloire, elles sont de toute façon utiles !) ; connaissant l'implication (0.2) $\Rightarrow$ (0.1) par (0.5.1), et la réalisation de (0.2) pour U par (0.5.3.1), problème de Dirichlet, nous allons montrer l'implication (0.1) $\Rightarrow$ (0.2), donc l'équivalence (0.1) $\Leftrightarrow$ (0.2) directement.

Lemme (7.1).— *Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissante d'ouverts relativement compacts de V, à bords réguliers $\dot{U}_n$, $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$, de réunion $\bigcup\limits_n U_n = V$. Soit P_n le semi-groupe relatif à U. Pour toute f borélienne bornée sur V, $P_n f$ (fonction borélienne bornée sur U_n) converge simplement (en restant bornée, et en croissant avec n si $f \geq 0$) pour n infini vers Pf (borélienne bornée sur V).*

Démonstration. C'est évident parce que, si S_n est le temps de sortie de U_n, S_n tend vers ζ (temps de mort de la diffusion sur V). Donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_n(t,x)f &= \mathbf{E}(f(X_t^x)1_{\{t<S_n^x\}}) \quad \text{sur} \quad U_n\ , \text{ et}\\ \mathbf{P}(t,x)f &= \mathbf{E}(f(X_t^x)1_{\{t<\zeta^x\}}) \quad \text{sur} \quad V \quad \text{et} \quad \{t<\zeta^x\} = \bigcup_n \{t < S_n^x\}\end{aligned}$$

Corollaire (7.2).— *Même énoncé que (6.5), mais sur V au lieu de U.*

Démonstration. Soit f borélienne bornée sur V. Les $P_n f$ définis sur des ouverts U_n de plus en plus grands, convergeant, par (7.1), au sens des distributions sur V pour n tendant vers l'infini, vers Pf, d'où le résultat.

(7.3) - Démonstration de l'implication (0.1) $\Rightarrow$ (0.2) sur V.

Supposons que P opère sur $C_0(V)$ comme semi-groupe (de contractions ≥ 0) de Hille-Yosida. Son générateur infinitésimal $\widetilde{L}$ a un domaine inconnu.

Mais, pour $t > 0$, d'après (7.2) (pour $f \in C_0(V)$, Pf est supposée continue), Pf est C^∞, et $\partial_t P_t f = L P_t f$; donc $t \mapsto P_t f$ est dérivable à valeurs dans $C(V)$ (espace des fonctions continues sur V) pour $t > 0$. Si $f \in \operatorname{Dom} \widetilde{L}$, elle est aussi dérivable, pour $t \geq 0$, à valeurs dans $C_0(V)$, avec $\partial_t P_t f = \widetilde{L} P_t f = P_t \widetilde{L} f$.

Quand t tend vers 0, $P_t \widetilde{L} f$ doit tendre vers $\widetilde{L} f$ dans $C_0(V)$, et $L P_t f$ tend vers $L f$ au sens des distributions sur V ; donc $\widetilde{L} f = L f$. Donc $\operatorname{Dom} \widetilde{L} \subset \operatorname{Dom} L = \{f \in C_0(V)\ ;\ Lf \in C_0(V)\}$ et, sur $\operatorname{Dom} \widetilde{L}$, $\widetilde{L} = L$; autrement dit, $(L, \operatorname{Dom} L)$ prolonge $(\widetilde{L}, \operatorname{Dom} \widetilde{L})$. Mais, puisque $\widetilde{L}$ est le générateur infinitésimal de P, $1 - \widetilde{L}$ est bijectif de $\operatorname{Dom} \widetilde{L}$ sur $C_0(V)$;
or, $1 - L$ est injectif de Dom L dans $C_0(V)$, toujours par le principe élémentaire du maximum [si $(1-L)f = 0$, ce qui implique $f \in C^\infty(V)$, et si f n'est pas $\equiv 0$, elle a un maximum > 0 ou un minimum < 0 sur V ; par exemple, pour un maximum > 0 atteint en $a \in V$, $Lf(a) \leq 0$, $f(a) > 0$, donc $(1-L)f(a) > 0$, ce qui contredit $(1-L)f = 0$]. Donc nécessairement $\operatorname{Dom} \widetilde{L} = \operatorname{Dom} L$ et $\widetilde{L} = L$.

Remarque (7.4) - Nous aurions pu donner cette démonstration au Paragraphe 0, elle n'utilise que (6.6), (7.1), (7.2), qui auraient pu être démontrées à ce moment. Nous avons préféré donner ces propriétés à la fin, elles rentrent mieux dans le contexte des trajectoires, qui n'existait au Paragraphe 0 que dans la démonstration de (0.5).

Quelques problèmes ouverts :

1) Dans la configuration du Paragraphe 6, est-ce-que si $x^{\cdot}$ tend vers $\infty^{\cdot}$ (voir 3) de (6.3)), $X_t^{x^{\cdot}}$ tend $\mathbf{P}$-ps. vers $\infty^{\cdot}$ uniformément pour $t \leq \tau < +\infty$? est-ce que $S^{x^{\cdot}}$ tend $\mathbf{P}$-ps. vers 0 ?

2) Il résulte du Corollaire (6.4) que, si $f \in CB(U)$, $P_t f \in C_0(U)$ pour $t > 0$. N'a-t-on pas même $P_t f \in \operatorname{Dom} L$ pour $t > 0$?

NOTES DE BAS DE PAGE

Note (1), page 1

Pour les diffusions, on pourra par exemple consulter P. PRIOURET [1], P.A. MEYER [1]. Seul le dernier donne le flot, dont nous nous servirons au paragraphe 1.

Note (2), page 1

Pour les semi-groupes de Hille-Yosida, les références sont innombrables. Voir par exemple A. PAZY [1].

Note (3), page 2

Il y a de nombreux travaux de G. LUMER ; voir par exemple LUMER [1] ; puis L. PAQUET [1], J.M. BONY [1], M.R. HERVE [1].

Note (4), page 2

Voir R.M. BLUMENTHAL, R.K. GETOOR, [1], chap. I, (9.4), page 46, ou L. SCHWARTZ [2], paragraphe 8, (8.4), page 251.

Note (5), page 3

Pour la dissipativité du générateur infinitésimal, voir A. PAZY [1], chap. I.

Note (6), page 3

Voir J.M. BONY [1].

Note (7), page 4

Voir L. SCHWARTZ [1].

Note (8), page 4

Voir P.A. MEYER [1], page 107.

Note (9) page 6

Voir par exemple N. BOURBAKI [1], chap.IX, paragraphe 5, n°4, proposition 9.

Note (10) page 12

C'est bien connu, par la propriété du cône, pour le mouvement brownien dans $\mathbf{R}^n$ (voir par exemple S.C. PORT et C.J. STONE [1], chap.2, n°3, proposition (3.3), page 30). Mais la régularité est locale donc V se ramène à $\mathbf{R}^N$, et les points réguliers sont indépendants de l'opérateur L dès que ses coefficients sont holdériens, voir Gilbarg et Trudinger [1].

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

[1] R.M. BLUMENTHAL et R.K. GETOOR, Markov processes and potential theory, Academic Press, New-York and London, 1968.

[1] J.M. BONY, Problème de Dirichlet et semi-groupe fortement fellérien associé à un opérateur intégro-différentiel, Note aux C.R.A.S., Paris, tome 265, série A, pages 361-364, 25/IX/67.

[1] N. BOURBAKI, Intégration, Paris Hermann.

[1] D. GILBARG et N.S. TRUDINGER, Elliptic partial differential equations of the second order, Springer, Grundlehren, 1977, vol. 224.

[1] M.R. HERVE, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Annales de l'Institut Fourier, tome XII, 1962, pages 415-571.

[1] G. LUMER, Problème de Cauchy pour opérateurs locaux, C.R.A.S., Paris, tome 281, série A, pages 763-765. 1975.

[1] P.A. MEYER, Flot d'une équation différentielle stochastique, Séminaire de Probabibilté 1979-80, 850, 1981, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York pages 103-117.

[1] L. PAQUET, Opérateurs elliptiques sur les variétés non compactes, Journal of functional analysis, 50, 1984, pages 267-284.

[1] A. PAZY, Semi-groups of linear operators, applications to partial differential equations, Springer-Verlag, Applied Mathematical Sciences, n°44, 1983.

[1] S.C. PORT et C.J. STONE, Brownian motion and classical potential theory, Academic Press, Londres New-York.

[1] P. PRIOURET, Processus de diffusion et équations différentielles stochastiques, Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour, III-1973, n°390, 1974, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-york, pages 37-113

[1] L. SCHWARTZ, Construction directe d'une diffusion sur une variété, Séminaire de Probabilités, XIX, 1983-84, n°1123, New-York Heidelberg Tokyo, pages 91-112.

[2] L. SCHWARTZ, Processus de Markov et Désintégrations régulières, Annales de l'Institut Fourier de l'Université de Grenoble, tome XXVII, fascicule 3, 1977, pages 211-277.

Index des notations et index terminologique

Tout est noté dans l'ordre d'apparition dans l'article :

Table des matieres