SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN-FRANÇOIS LE GALL

Marches aléatoires, mouvement brownien et processus de branchement

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 23 (1989), p. 258-274

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__258_0>

MARCHES ALEATOIRES, MOUVEMENT BROWNIEN ET PROCESSUS DE BRANCHEMENT

Jean-François LE GALL

Laboratoire de Probabilités - Université P. et M. Curie -

4, place Jussieu - Tour 56 - 75252 PARIS CEDEX 05

1. Introduction.

Les relations entre mouvement brownien et marches aléatoires d'une part, processus de branchement d'autre part, ont fait l'objet de plusieurs études récentes. La clé de ces relations se trouve peut-être dans un article de Dwass [D], qui construit un processus de Galton-Watson associé aux excursions de certaines marches aléatoires discrètes. L'idée de Dwass est déjà présente dans un article plus ancien de Kawazu et Watanabe [KW]. Dans ce dernier travail, les théorèmes de Ray-Knight, qui identifient en termes de carrés de processus de Bessel la loi de la famille des temps locaux d'un mouvement brownien linéaire pris à certains temps d'arrêt, sont déduits de théorèmes limites pour les processus de Galton-Watson avec immigration. Comme les carrés de processus de Bessel sont précisément les processus limites qui interviennent dans l'étude des processus de branchement avec immigration, cette approche fournit l'explication peut-être la plus satisfaisante des théorèmes de Ray-Knight (dans le même esprit, voir Rogers [R] et Le Gall [L]). Récemment, Neveu [N1] a remarqué qu'il existe une correspondance naturelle, préservant la mesure, entre l'excursion d'une marche aléatoire standard dans $\mathbb{Z}$ et l'arbre associé à un processus de Galton-Watson de loi de reproduction géométrique de paramètre $1/2$. Cette correspondance est appliquée dans [L] à des démonstrations élémentaires des théorèmes de décomposition de Williams pour les trajectoires browniennes.

Le présent travail poursuit l'étude des liens entre marches aléatoires, mouvement brownien et processus de branchement, en mettant l'accent sur l'importance de la notion d'arbre associé à un processus de branchement. Nous renvoyons à Neveu [N2] pour une formalisation précise du concept d'arbre et des applications aux propriétés des processus de branchement (voir aussi Chauvin [C]). Dans la partie 2, nous retrouvons un résultat classique donnant la loi du temps d'entrée dans $]-\infty,0[$ pour une marche aléatoire sur $\mathbb{R}$, issue de 0 et de loi symétrique et sans atomes. S'il s'agit là d'un résultat bien connu, l'intérêt de la méthode employée est de mettre en évidence les idées qui jouent un rôle essentiel dans le présent travail. Dans la partie 3, nous considérons la marche aléatoire inhomogène $(Z_n, n \geq 0)$ telle que, pour tout

$n \geq 0$, $(-1)^n (Z_{n+1}-Z_n)$ suive une loi exponentielle standard. Nous établissons une correspondance préservant la mesure entre l'excursion de cette marche aléatoire et l'arbre associé à un processus de branchement binaire à temps de vie exponentiels (on appelle ici processus de branchement binaire un processus de branchement qui attribue à un individu donné 0 ou 2 descendants avec la même probabilité 1/2). Cette correspondance est l'analogue continu du résultat mentionné plus haut pour l'excursion de la marche aléatoire standard dans $\mathbb{Z}$. Dans la partie 4, nous appliquons les résultats de la partie 3 à la démonstration d'un joli théorème de Neveu et Pitman [NP1,NP2] ; soient $h > 0$, B un mouvement brownien réel issu de 0, τ le premier instant où le temps local en 0 de B dépasse 1 et, pour tout $x \geq 0$, N_x le nombre d'excursions de hauteur plus grande que h de B au-dessus de x, avant l'instant τ. Le processus $(N_x, x \geq 0)$ est un processus de branchement binaire, à temps de vie exponentiels, partant avec un nombre poissonnien d'individus. Notre approche de ce théorème utilise à la fois les résultats de la partie 3 et l'idée-clé de Neveu et Pitman [NP1] consistant à étudier les montées et descentes successives de hauteur plus grande que h d'une trajectoire brownienne. Enfin, dans la partie 5, nous donnons un résultat voisin, concernant maintenant le nombre $\mathcal{N}_x$ d'excursions au-dessus de x qui atteignent 1 : le processus $(\mathcal{N}_x, x \in [0,1[)$ est un processus de branchement inhomogène, dont la structure probabiliste très simple est décrite dans le théorème 8. Ce dernier résultat est l'analogue brownien d'un théorème de Fleischmann et Siegmund-Schultze [FS] pour l'arbre réduit associé à un processus de Galton-Watson critique conditionné à la non-extinction.

Je remercie vivement J. Neveu et J. Pitman pour de très utiles discussions qui ont été à l'origine du présent travail.

2. Le premier temps d'entrée dans $]-\infty,0[$ pour une marche aléatoire symétrique.

Nous considérons dans cette partie une marche aléatoire $X = (X_n, n \geq 0)$ sur $\mathbb{R}$, issue de 0. Nous supposons que la loi μ de X_1 est symétrique et sans atomes. Il est alors bien connu que, si

$$T = \inf\{n \geq 0 \ ; \ X_n < 0\}$$

on a : $T < \infty$ p.s. Le théorème suivant, qui identifie la loi de T, est classique : voir par exemple Feller [F], p. 414.

Théorème 1 : *La fonction génératrice de* T *est donnée par :*

$$E[a^T] = 1 - \sqrt{1-a} \quad (a \in [0,1]).$$

Il découle de ce résultat que la loi de T ne dépend pas de μ. Feller déduit le théorème 1 d'un résultat plus général, s'appliquant à des marches non nécessairement symétriques, qui lui-même est une conséquence d'un lemme combinatoire. Nous proposons ici une démonstration plus probabiliste qui montre directement que $T-1$ suit la loi du nombre total d'individus d'un certain processus de branchement. Cette démonstration repose sur le lemme suivant, que nous énonçons après quelques notations.

Sur l'ensemble $\{T \geq 2\}$, on définit S comme l'instant, unique p.s., tel que :

$$X_S = \inf\{X_n \ ; \ 1 \leq n \leq T-1\}.$$

Soit Δ un point cimetière ajouté à $\mathbb{R}$. On note W l'espace canonique des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R} \cup \{\Delta\}$, qui sont tuées après un temps fini. Pour tout $w \in W$, le temps de mort $\tau(w)$ de w vérifie :

$$\tau(w) = \inf\{n \ ; \ w(n) = \Delta\} - 1 = \sup\{n \ ; \ w(n) \neq \Delta\}.$$

Enfin, on note $\mathcal{P}$ la loi du processus X^* défini par :

$$X^*_n = \begin{cases} X_n & \text{si } n \leq T, \\ \Delta & \text{si } n > T. \end{cases}$$

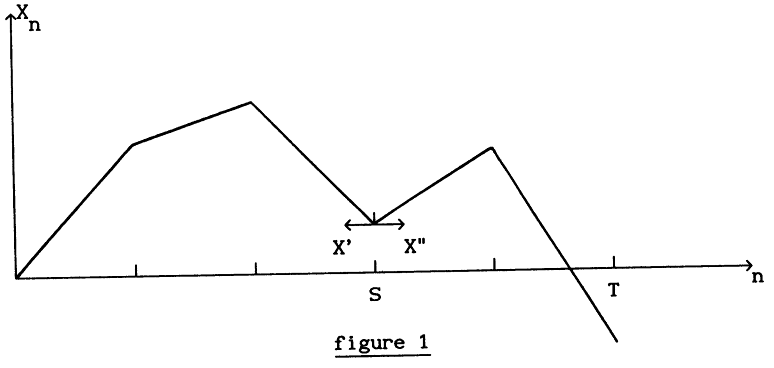
<u>**Lemme 2**</u> : *Sur l'ensemble* $\{T \geq 2\}$ *soient* X', X'' *les deux processus définis par :*

$$X'_n = \begin{cases} X_{S-n} - X_S & si \ n \geq S, \\ \Delta & si \ n < S, \end{cases}$$

$$X''_n = \begin{cases} X_{S+n} - X_S & si \ n \leq T-S, \\ \Delta & si \ n > T-S. \end{cases}$$

La loi conditionnellement à $\{T \geq 2\}$ *du couple* (X', X'') *coïncide avec l'image de* $\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}$ *par l'application :*

$$\Phi(w, w') = \begin{cases} (w, w') & si \ \ w'(\tau(w')) < w(\tau(w)), \\ (w', w) & sinon. \end{cases}$$



<u>figure 1</u>

Remarque : Soit $\tilde{X}$ une seconde marche aléatoire indépendante de X et de même loi, et soit $\tilde{T} = \inf\{n;\ \tilde{X}_n < 0\}$. Le lemme 2 entraîne que la loi de X_S conditionnellement à $\{T \geq 2\}$ est la loi de $\inf(-X_T, -\tilde{X}_{\tilde{T}})$.

Le résultat du Lemme 2 est illustré par la figure 1 ci-dessus.

Démonstration : Soient $p,q \geq 1$ et F,G deux fonctions bornées définies respectivement sur $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$. Alors,

$$E\Big[F(X_{S-n} - X_S,\ 0 \leq n \leq p)\ G(X_{S+n} - X_S,\ 0 \leq n \leq q)\ 1_{(S=p)}\ 1_{(T=p+q)}\Big]$$

$$= E\Big[F(X_{p-n} - X_p,\ 0 \leq n \leq p)\ G(X_{p+n} - X_p,\ 0 \leq n \leq q)$$

$$1_{(X_{p-n} \geq X_p,\ 1 \leq n \leq p-1)} 1_{(X_p > 0)}\ 1_{(X_{p+n} \geq X_p,\ 1 \leq n \leq q-1)} 1_{(X_{p+q} < 0)}\Big]$$

En utilisant l'indépendance des accroissements de X et la symétrie de μ on peut encore écrire dernière espérance comme :

$$E\Big[F(X_n, 0 \leq n \leq p)\ G(\tilde{X}_n, 0 \leq n \leq q)\ 1_{(T=p)}\ 1_{(\tilde{T}=q)}\ 1_{(\tilde{X}_{\tilde{T}} < X_T)}\Big]$$

avec les notations de la remarque ci-dessus. Le lemme en découle en sommant sur p et q. □

Démonstration du théorème 1 : L'identité triviale $T = S + (T-S)$ et le lemme 2 montrent que la fonction génératrice $\varphi(a) = E[a^T]$ satisfait :

$$\varphi(a) = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\,\varphi(a)^2$$

d'où le résultat voulu. □

Remarque : Le résultat du lemme 2 suggère d'introduire le processus $(M_n, n \geq 0)$ défini par :

$$M_0 = 1_{(T \geq 2)},$$
$$M_1 = 1_{(T \geq 2)}(1_{(S \geq 2)} + 1_{(T-S \geq 2)}),$$

puis par la récurrence évidente. Le processus (M_n) est un processus de Galton-Watson (critique), partant avec 0 ou 1 individu avec la même probabilité 1/2, et dont la loi de reproduction est décrite comme suit : chaque individu donne naissance à 0, 1, 2 descendants avec les probabilités respectives 1/4, 1/2, 1/4. De plus, $T - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} M_n$, ce qui redonne le théorème 1.

3. L'arbre associé à l'excursion d'une marche aléatoire de loi exponentielle bilatérale.

Nous supposons maintenant que μ est la loi exponentielle bilatérale : $\mu(dx) = \frac{1}{2} e^{-|x|} dx$. Plutôt que de raisonner sur la marche aléatoire de loi μ, il sera intéressant, surtout en vue des applications développées dans la partie suivante, de considérer le processus $Z = (Z_n, n \geq 0)$ défini comme suit. On se donne une suite $(Y_i; i = 1,2,\dots)$ de variables exponentielles standard (de moyenne 1) indépendantes, et on pose :

$$Z_o = 0, \quad Z_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} Y_i.$$

Evidemment, $X_n = Z_{2n}$ est une marche aléatoire de loi μ.

Soit :

$$H = \inf\{n \geq 0 \ ; \ Z_n < 0\}$$

et soit Q la loi (sur l'espace canonique W de la partie 2) du processus Z^o défini par :

$$Z_n^o = \begin{cases} Z_n & \text{si} \quad n < H, \\ 0 & \text{si} \quad n = H, \\ \Delta & \text{si} \quad n > H. \end{cases}$$

Les propriétés élémentaires de la loi exponentielle montrent que Q est invariante par retournement au temps de mort : l'application ρ définie par

$$\rho(w)(n) = \begin{cases} w(\tau(w)-n) & \text{si} \quad n \leq \tau(w) \\ \Delta & \text{si} \quad n > \tau(w) \end{cases}$$

préserve la probabilité Q.

On se propose d'établir une correspondance bijective, préservant la mesure, entre l'espace probabilisé (W,Q) et un certain espace d'arbres marqués naturellement associé à un processus de branchement en temps continu. Rappelons brièvement les quelques définitions qui nous sont nécessaires (voir Neveu [N2] pour plus de détails, nous nous restreignons ici à des arbres binaires finis, et donc nos définitions sont un peu différentes de celles de [N2]). On note U l'ensemble des suites finies $u = j_1 \dots j_n$ d'entiers appartenant à $\{1,2\}$. La suite vide, notée ∂, appartient à U. La longueur d'une suite $u \in U$ est notée $|u|$ ($|\partial| = 0$). Un arbre ω est un sous-ensemble fini de U qui satisfait les deux propriétés :

(i) $u \in \omega$ dès que $u1 \in \omega$ ou $u2 \in \omega$;

(ii) si $u \in \omega$ et $u2 \in \omega$, alors $u1 \in \omega$.

La propriété (i) entraîne que, ou bien $\omega = \emptyset$, ou bien $\partial \in \omega$. On note Ω l'espace des arbres. Un arbre marqué est la donnée de $\omega \in \Omega$ et pour chaque $u \in \omega$, d'une marque $\eta_u \in \mathbb{R}$. Soit Θ l'ensemble des arbres marqués. Un élément θ de Θ s'écrit $\theta = \{(u_1,\eta_{u_1}),\dots,(u_p,\eta_{u_p})\}$ pour un $\omega = (u_1,\dots,u_p) \in \Omega$.

Nous appellerons processus de branchement binaire un processus de branchement (en temps continu) dans lequel chaque individu donne naissance à 0 ou 2 descendants avec la même probabilité 1/2. Sauf indication du contraire, on suppose toujours que le processus part avec un individu à l'instant 0. A un tel processus de branchement on associe de manière naturelle (voir [N2] ou [C]) une loi sur l'espace Θ des arbres marqués : chaque $u \in \omega$ représente un individu de la population du processus de branchement, et η_u correspond à la durée de vie de u. On note π la probabilité sur Θ qui est associée au processus de branchement binaire à temps de vie exponentiels de paramètre 1/2.

Nous avons besoin d'une dernière notation avant d'énoncer le théorème. Pour tout $w \in W$ tel que $\tau(w) \geq 2$ on pose :

$$\sigma(w) = \inf\{p \geq 1 \ ; \ w(p) = \inf(w(i);\ 0 < i < \tau(w))\ \}$$

et on définit $\Phi_1(w),\ \Phi_2(w) \in W$ par les relations

$$\Phi_1(w)(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ w(n)-w(\sigma(w)) & \text{si } 0 < n \leq \sigma(w), \\ \Delta & \text{si } n > \sigma(w), \end{cases}$$

$$\Phi_2(w)(n) = \begin{cases} w(\sigma(w)+n)-w(\sigma(w)) & \text{si } 0 \leq n < \tau(w)-\sigma(w), \\ 0 & \text{si } n = \tau(w)-\sigma(w), \\ \Delta & \text{si } n > \tau(w)-\sigma(w). \end{cases}$$

<u>**Théorème 3**</u> : *Il existe une unique application mesurable* $\Lambda : W \longrightarrow \Theta$ *qui satisfait les deux propriétés :*

(i) *si* $\tau(w) \leq 1$, $\Lambda(w) = \emptyset$

(ii) *si* $\tau(w) \geq 2$, $\Lambda(w) = \{(\partial, w(\sigma(w)))\} \cup \{(1u,\eta)\ ;\ (u,\eta) \in \Lambda(\Phi_1(w))\}$
$$\cup \{(2u,\eta)\ ;\ (u,\eta) \in \Lambda(\Phi_2(w))\}.$$

De plus, $\Lambda(Q) = \pi$.

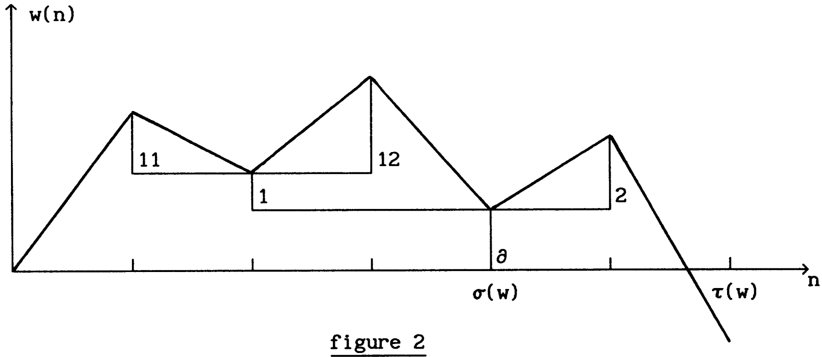


figure 2

Le résultat du théorème 3 est illustré par la figure 2 ci-dessus. La démonstration repose sur le lemme suivant :

Lemme 4 :

(i) Sous la loi Q *conditionnée par* $\{\tau(w) = 2\}$, $w(\sigma(w))$ *suit une loi exponentielle de moyenne* 1/2.

(ii) Sous la loi Q *conditionnée par* $\{\tau(w) > 2\}$, $\Phi_1(w)$, $\Phi_2(w)$ *et* $w(\sigma(w))$ *sont indépendants ;* $\Phi_1(w)$ *et* $\Phi_2(w)$ *ont pour loi* Q *et* $w(\sigma(w))$ *suit une loi exponentielle de moyenne* 1/2.

Démonstration : La partie (i) est évidente : elle revient à dire que si e, e' sont deux variables exponentielles de moyenne 1, $e \wedge e'$ suit une loi exponentielle de moyenne 1/2.

Pour la partie (ii) on introduit les notations suivantes. Sur $\{\tau(w) \geq 2\}$ on définit

$$\psi_1(w)(k) = \begin{cases} w(\sigma(w)-k) & \text{si } 0 \leq k \leq \sigma(w), \\ \Delta & \text{si } k > \sigma(w), \end{cases}$$

$$\psi_2(w)(k) = \begin{cases} w(\sigma(w)+k) & \text{si } 0 \leq k \leq \tau(w)-\sigma(w), \\ \Delta & \text{si } k > \tau(w)-\sigma(w). \end{cases}$$

On note Q^* la loi de $Z^*_n = Z_n$ si $n \leq T$, Δ si $n > T$. Observons que Q coïncide avec la loi sous Q^* de w_+ (où $w_+(n) = w(n) \vee 0$ et par convention $w_+(n) = \Delta$ si $w(n) = \Delta$). De plus, grâce aux propriétés de la loi exponentielle, w_+ et $w(\tau(w))$ sont indépendants sous Q^* et $-w(\tau(w))$ suit une loi exponentielle de moyenne 1.

Une légère modification de la preuve du lemme 2 (nécessaire parce que nous travaillons avec Z au lieu de X) montre que la loi de $(\psi_1(w), \psi_2(w))$, sous Q^* conditionnée par $\{\tau(w) > 2\}$, coïncide avec l'image de $Q^* \otimes Q^*$ par l'application :

$$(w,w') \longrightarrow \begin{cases} (w,w') & \text{si} \quad w(\tau(w)) > w'(\tau(w')), \\ (w',w) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Grâce aux remarques précédentes, il en découle que, toujours sous Q^* conditionnée par $\{\tau > 2\}$, les processus $\psi_1(w)_+, \psi_2(w)_+$ sont indépendants de loi Q, et sont aussi indépendants de

$$w(\sigma(w)) = - \psi_1(w)(\tau(\psi_1(w))).$$

De plus l'argument de (i) montre que cette dernière variable suit une loi exponentielle de moyenne 1/2. La preuve du lemme est complétée en remarquant que $\Phi_2(w) = \psi_2(w)_+$ et $\Phi_1(w) = \rho(\psi_1(w)_+)$. □

Démonstration du théorème 3 : On vérifie d'abord facilement, par exemple en raisonnant par récurrence sur $\tau(w)$, que l'application Λ est bien définie sur W et est caractérisée par les propriétés (i) et (ii). De plus, $Q(dw)$ p.s., Card $\Lambda(w) = 1$ si et seulement si $\tau(w) = 2$. On déduit alors du lemme 4 que :

(i) $Q(\text{card } \Lambda(w) = 1) = \frac{1}{2}$ et, conditionnellement à $\{\text{card } \Lambda(w) = 1\}$, la marque de ∂ , $\eta_\partial = w(\sigma(w))$, suit une loi exponentielle de moyenne 1/2 ;

(ii) $Q(\text{card } \Lambda(w) > 1) = \frac{1}{2}$ et, conditionnellement à $\{\text{card } \Lambda(w) > 1\}$, les arbres "translatés"

$$\Lambda_1(w) = \{(u,\eta) \; ; \; (1u,\eta) \in \Lambda(w)\} = \Lambda(\Phi_1(w))$$

$$\Lambda_2(w) = \{(u,\eta) \; ; \; (2u,\eta) \in \Lambda(w)\} = \Lambda(\Phi_2(w))$$

sont indépendants et indépendants de la variable $\eta_\partial = w(\sigma(w))$, qui suit une loi exponentielle de moyenne 1/2; de plus, la loi conditionnelle de chacun des arbres $\Lambda_1(w)$, $\Lambda_2(w)$ coïncide avec la loi sous Q de $\Lambda(w)$.

Les propriétés (i), (ii) caractérisent la loi de l'arbre associé à un processus de branchement binaire avec temps de vie exponentiels de moyenne 1/2. La démonstration du théorème est donc complète. □

Corollaire 5 : *Pour tous* $x \geq 0$, $w \in W$, *soit* $N_x(w)$ *le nombre d'excursions de* w *au-dessus de* x *:*

$$N_x(w) = \text{card}\{n < \tau(w),\ w(n) \leq x,\ w(n+1) > x\}.$$

Le processus $(N_x, x \geq 0)$ *est sous* Q *un processus de branchement binaire à temps de vie exponentiels de paramètre* 1/2.

Démonstration : On écrit d'abord : $Q(dw)$ p.s,

$$N_x(w) = 1 \quad \text{si} \quad x \in [0, w(\sigma(w))[$$

$$N_x(w) = N_{x-w(\sigma(w))}(\Phi_1(w)) + N_{x-w(\sigma(w))}(\Phi_2(w)), \quad \text{si} \quad x \geq w(\sigma(w)).$$

On se convainc ensuite aisément à l'aide de ces relations que $(N_x, x \geq 0)$ n'est autre que le processus de branchement associé à l'arbre $\Lambda(w)$ du théorème 3, d'où le résultat recherché. □

Remarques : (i) La donnée de l'arbre $\Lambda(w)$ fournit davantage d'informations que celle du processus de branchement $(N_x(w), x \geq 0)$: à condition de se restreindre à un ensemble de Q-mesure pleine, on peut reconstruire w à partir de $\Lambda(w)$, mais non à partir de $(N_x(w), x \geq 0)$.

(ii) On aurait pu aussi étudier le processus des nombres d'excursions pour la marche X (tuée en T). On obtient encore un processus de branchement à temps de vie exponentiels de moyenne $1/2$, mais il part cette fois avec 0 ou 1 individu avec probabilité $1/2$ et la loi de reproduction est celle décrite à la fin de la partie 2. L'arbre associé est obtenu sous Q en supprimant les branches terminales de $\Lambda(w)$.

4. Excursions de hauteur plus grande que h d'un mouvement brownien linéaire.

Nous considérons dans cette partie un mouvement brownien réel $B = (B_t, t \geq 0)$ issu de 0. On note $L^0 = (L^0_t, t \geq 0)$ le processus du temps local de B en 0 et, pour tout $s \geq 0$,

$$\gamma_s = \inf\{t \geq 0 \; ; \; L^0_t > s\}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle intervalle d'excursion en dehors de x un intervalle de la forme $]a,b[$ avec $0 \leq a < b$, $B_a = B_b = x$ et $B_t \neq x$ pour tout $t \in]a,b[$. Pour tous $h > 0$, $T > 0$, on note $N^h_x(T)$ et on appelle nombre d'excursions de B de hauteur plus grande que h au-dessus de x avant l'instant T, le nombre de tels intervalles $]a,b[$ qui satisfont de plus: $b \leq T$ et :

$$\sup(B_s, s \in]a,b[) > x+h.$$

Le théorème suivant (Neveu et Pitman [NP1,NP2]) donne la structure probabiliste du processus $(N^h_x(\gamma_s), x \geq 0)$.

Théorème 6 : *Pour tous* $h > 0$, $s > 0$, *le processus* $(N^h_x(\gamma_s), x \geq 0)$ *est un processus de branchement binaire à temps de vie exponentiels de moyenne* $h/2$, *dont la population initiale suit une loi de Poisson de moyenne* $s/2h$.

<u>Démonstration</u> : Nous montrerons qu'on peut déduire le théorème 6 du corollaire 5 ci-dessus. Auparavant, nous procédons à quelques réductions du problème. Sans perte de généralité, on peut supposer que B est défini sur l'espace canonique Ω des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, de sorte que, pour tout $t \geq 0$, $B_t(\omega) = \omega(t)$. La propriété d'invariance par changement d'échelle de la loi du mouvement brownien permet de se restreindre au cas $h = 1$. Ensuite on utilise la théorie des excursions du mouvement brownien linéaire (voir par exemple [RW] chapter VI.8) qui montre que $N_0^1(\gamma_s)$ suit une loi de Poisson de moyenne $s/2$. A nouveau un argument simple de théorie des excursions permet de se ramener à l'énoncé suivant : soit $n_1(d\omega)$ la mesure d'Itô des excursions conditionnée par l'événement $\{\sup(\omega(s), s \geq 0) > 1\}$; sous n_1 le processus $(N_x^1(\infty), x \geq 0)$ est un processus de branchement binaire, à temps de vie exponentiels de paramètre $1/2$, et partant avec un individu à l'instant 0.

L'idée de la preuve de ce dernier énoncé est de construire un processus discret $(V_n, n \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\Delta\}$, de loi Q et tel que le processus des nombres d'excursions de $(V_n, n \geq 0)$, (défini dans le Corollaire 5) coïncide $n_1(d\omega)$ p.s. avec $(N_x^1(\infty), x \geq 0)$. Le résultat recherché est alors une conséquence du Corollaire 5.

Il sera commode de travailler sous la probabilité $n_1^*(d\omega)$ caractérisée par les deux propriétés suivantes :

(a) si $T_0 = \inf\{t > 0 ; \omega(t) = 0\}$, la loi sous $n_1^*(d\omega)$ de $(\omega(t \wedge T_0), t \geq 0)$ est $n_1(d\omega)$;

(b) les deux processus $(\omega(t \wedge T_0), t \geq 0)$ et $(\omega(T_0 + t), t \geq 0)$ sont indépendants sous n_1^*, et le second suit la loi d'un mouvement brownien linéaire issu de 0.

Soit $T_1 = \inf\{t > 0 ; \omega(t) = 1\}$. Evidemment $T_1 < T_0$ sous n_1^*, et le processus $(\omega(T_1 + t), t \geq 0)$ est sous n_1^* un mouvement brownien linéaire issu de 1, indépendant de $(\omega(t \wedge T_1), t \geq 0)$. Suivant Neveu et Pitman [NP1], on introduit les temps d'arrêt suivants, qui sont finis p.s. sous n_1^*,

$$\alpha_0 = 0 \quad , \text{ et pour tout } p \in \mathbb{N},$$

$$\beta_p = \inf\left\{ t > \alpha_p ; \omega(t) - \inf_{\alpha_p \leq s \leq t} \omega(s) = 1 \right\},$$

$$\alpha_{p+1} = \inf\left\{ t > \beta_p ; \sup_{\beta_p \leq s \leq t} \omega(t) - \omega(t) = 1 \right\}.$$

En des termes plus concrets, les instants α_p, β_p correspondent respectivement aux descentes et aux montées de hauteur plus grande que 1 de la trajectoire de ω sous n_1^*, deux montées successives étant séparées par une descente et inversement (cf fig. 3). On pose ensuite $Z_o = 0$ et pour tout $p \geq 1$,

$$Z_{2p-1} = \omega(\alpha_p) = \sup_{\beta_{p-1} \leq s \leq \alpha_p} \omega(s) - 1$$

$$Z_{2p} = \omega(\beta_p) - 1 = \inf_{\alpha_p \leq s \leq \beta_p} \omega(s).$$

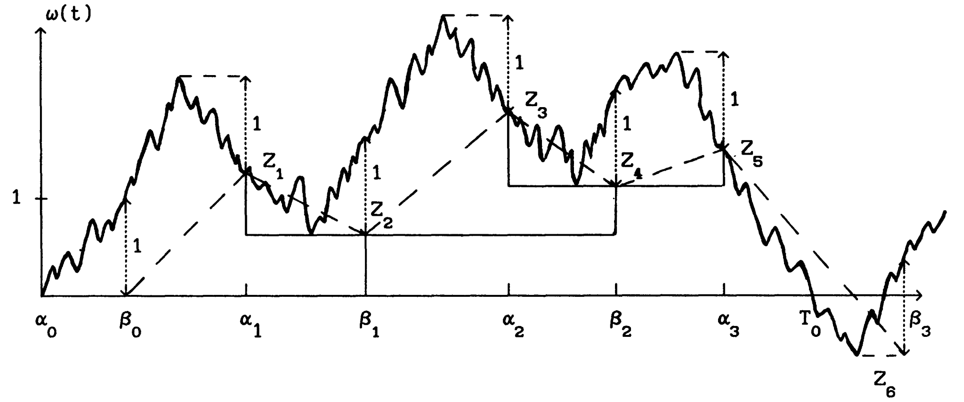


figure 3

Alors, le processus $(Z_k, k \geq 0)$ a la loi décrite au début de la partie 3. En effet, écrivons d'abord pour tout $p \geq 0$,

$$Z_{2p+1} - Z_{2p} = \sup_{\beta_p \leq s \leq \alpha_{p+1}} \omega(s) - \omega(\beta_p),$$

et observons que $\beta_p \geq \beta_o = T_1$ donc, d'après les remarques précédentes, le processus $\theta^p_t = \omega(\beta_p + t) - \omega(\beta_p)$ est sous n^*_1 un mouvement brownien linéaire issu de 0 indépendant de $(\omega(t \wedge \beta_p), t \geq 0)$. De plus,

$$\alpha_{p+1} - \beta_p = \inf\{t \; ; \sup_{0 \leq s \leq t} \theta^p_s - \theta^p_t = 1\},$$

$$Z_{2p+1} - Z_{2p} = \sup_{0 \leq s \leq \alpha_{p+1} - \beta_p} \theta^p_s.$$

Un célèbre théorème de Lévy donne l'identité en loi :

$$\left(\sup_{0 \leq s \leq t} \theta^p_t, \sup_{0 \leq s \leq t} \theta^p_s - \theta^p_t \; ; \; t \geq 0 \right) \overset{(\text{loi})}{=} (L^o_t, |B_t| \; ; \; t \geq 0).$$

On en déduit que $Z_{2p+1} - Z_{2p}$ suit la loi de $L^o_{\sigma_1}$, où $\sigma_1 = \inf\{t, |B_t| = 1\}$, qui est une loi exponentielle de moyenne 1. Les arguments précédents montrent aussi que $Z_{2p+1} - Z_{2p}$ est indépendant de $(Z_i, 0 \leq i \leq 2p)$. Des raisonnements similaires donnent le résultat analogue pour $Z_{2p} - Z_{2p-1}$ ce qui achève de montrer que Z a la loi voulue.

On définit maintenant Z^o comme au début de la partie 3, et on note M_x le nombre d'excursions de Z^o au-dessus de x. La proposition suivante, combinée avec le corollaire 5, complète la preuve du théorème 6.

Proposition 7 : *On a :* $n_1^*(d\omega)$ *p.s. pour tout* $x \geq 0$,

$$N_x^1(T_o) = M_x.$$

Plus précisément, l'application qui à un intervalle $]a,b[$ *associe* $2\sup\{k\ ;\ \alpha_k \leq a\}$ *induit une correspondance bijective entre l'ensemble des intervalles d'excursions de hauteur plus grande que* 1 *au dessus de* x, *avant* T_o, *et l'ensemble des entiers* p *tels que* $Z_p^o \leq x$, $Z_{p+1}^o > x$.

Démonstration : Notons $\mathcal{E}_x$ l'ensemble des intervalles d'excursion de hauteur plus grande que 1 au-dessus de x, avant T_o, et $\mathcal{M}_x$ l'ensemble des entiers p tels que $Z_p^o \leq x$, $Z_{p+1}^o > x$. Nous allons vérifier que, pour tout $x \geq 0$, l'application F_x :

$$F_x(]a,b[) = 2\sup\{k\ ;\ \alpha_k \leq a\}$$

définit une bijection entre $\mathcal{E}_x$ et $\mathcal{M}_x$, dont l'inverse est donné par :

$$G_x(p) =]a_p(x), b_p(x)[,$$

où : $a_p(x) = \sup\{s < \alpha_{p/2+1}\ ;\ \omega(s) = x\}$.

On utilisera implicitement la remarque suivante, qui découle aisément des définitions : si $H = \inf\{p > 0, Z_{2p} \leq 0\}$ on a : $\alpha_H < T_o \leq \beta_H$.

Montrons d'abord que l'application F_x envoie $\mathcal{E}_x$ dans $\mathcal{M}_x$. Si $]a,b[\in \mathcal{E}_x$, un raisonnement simple montre qu'il existe au moins un entier $k \geq 1$ tel que $\alpha_k \in]a,b[$. Choisissons k minimal ayant cette propriété. Alors,

$$Z_{2k-1} = \omega(\alpha_k) > x.$$

D'autre part, on a :

$$Z_{2k-2} = \omega(\beta_{k-1}) - 1 \leq x.$$

En effet, dans le cas contraire on aurait

$$\omega(\beta_{k-1}) > x+1,$$

et la définition de α_k montrerait alors que

$$\inf_{\beta_{k-1} \leq s \leq \alpha_k} \omega(s) > x,$$

et donc aussi (puisque $\omega(\beta_{k-1}) - 1 = \inf_{\alpha_{k-1}\le s\le\beta_{k-1}} \omega(s)$):

$$\inf_{\alpha_{k-1}\le s\le\alpha_k} \omega(s) > x ,$$

ce qui contredirait la minimalité de k. On conclut que $F_x(]a,b[)=2(k-1) \in \mathcal{M}_x$.

Vérifions maintenant que, si $p \in \mathcal{M}_x$, $G_x(p) \in \mathcal{E}_x$. Evidemment $p = 2k$ pour un entier $k \ge 0$ et on a :

$$Z_{2k+1} = \sup_{\beta_k\le s\le\alpha_{k+1}} \omega(s) - 1 > x$$

ce qui, compte-tenu de la définition de α_{k+1} , entraîne aussitôt que

$$a_p(x) = \sup\{s < \alpha_{k+1} ; \omega(s) = x\}$$

est le début d'un intervalle d'excursion de hauteur plus grande que 1 au-dessus de x.

De plus, l'inégalité

$$Z_{2k} = \inf_{\alpha_k\le s\le\beta_k} \omega(s) \le x,$$

montre que $\alpha_k \le a_p(x) < \alpha_{k+1}$, d'où $F_x(G_x(p)) = p$.

De même, les arguments développés ci-dessus entraînent aisément que $G_x(F_x(]a,b[)) =]a,b[$ pour tout $]a,b[\in \mathcal{E}_x$. Ceci termine la preuve de la proposition 7. □

Remarques : (i) Il est naturel de chercher à comprendre comment le processus $(N_x^h(\infty), x \ge 0)$, pris sous n_1 pour simplifier, se transforme quand h varie. Comme le remarquent Neveu et Pitman [NP1], cette transformation s'interprète de manière très simple en termes des arbres associés : le passage de h à $h' > h$ revient à "effacer" sur une longueur de $h'-h$ les branches terminales de l'arbre, en partant des extrémités (voir Neveu [N4] pour plus de détails sur cette procédure d'effacement).

(ii) De manière analogue à la partie 3, on peut bien sûr donner une version "arbre" du théorème 6 (voir [NP1]).

5. Le nombre d'excursions qui atteignent un niveau donné.

Nous nous proposons dans cette partie d'établir un résultat voisin du théorème 6, bien que de démonstration sensiblement plus facile. Nous nous plaçons sous la probabilité $n_1(d\omega)$ introduite dans la partie 4 (la mesure d'Itô conditionnée par $\{\sup \omega(s) > 1\}$) et pour tout $x \in [0,1[$, nous notons $\mathcal{N}_x(\omega)$ le nombre d'excursions de ω au-dessus de x qui atteignent 1.

Théorème 8 : *Sous* $n_1(d\omega)$, *le processus* $(\mathcal{N}_x, x \in [0,1[)$ *est un processus de branchement inhomogène, caractérisé en loi par les trois propriétés suivantes:*

(a) $\mathcal{N}_o = 1$;

(b) la variable $U_1 = \inf\{x \geq 0, \mathcal{N}_x \neq 1\}$ *suit une loi uniforme sur l'intervalle* $[0,1]$;

(c) pour tout $x \in [0,1[$,

$$\mathcal{N}_{U_1+(1-U_1)x} = \mathcal{N}'_x + \mathcal{N}''_x \ ,$$

où $(\mathcal{N}'_x, x \in [0,1[)$, $(\mathcal{N}''_x, x \in [0,1[)$ *sont deux processus indépendants et indépendants de* U_1, *qui ont chacun la même loi que* $(\mathcal{N}_x, x \in [0,1[)$.

De manière plus concrète, $\mathcal{N}_x$ représente le nombre d'individus à l'instant x d'une population évoluant selon les règles suivantes. A l'instant 0 la population comprend un seul individu qui meurt à un temps U_1 uniformément distribué sur $[0,1]$, en donnant naissance à deux descendants. Chacun de ces deux individus meurt à un temps uniformément distribué sur $[U_1,1]$, en donnant naissance à deux descendants, et ainsi de suite.

Le processus de branchement inhomogène du théorème 8 apparait dans certains théorèmes limites concernant la population de l'arbre réduit associé à un processus de Galton-Watson critique partant avec un individu et conditionné à la non-extinction à l'instant n. On appelle ici arbre réduit, l'arbre dépouillé des branches qui n'atteignent pas le niveau n. Après un changement d'échelle convenable en temps (pour se ramener de l'intervalle $[0,n]$ à $[0,1]$) la population de l'arbre réduit converge en distribution, quand n tend vers $+\infty$, vers un processus de même loi que $(\mathcal{N}_x, x \in [0,1[)$ (voir [FS]). En fait, en s'inspirant des méthodes de [L], il serait assez facile de déduire le théorème 8 du résultat principal de [FS]. Nous donnons ici une démonstration directe. Cette démonstration utilise certains théorèmes reliant mouvement brownien réel et processus de Bessel de dimension trois dus pour l'essentiel à Williams [W] (voir [L] pour des preuves dans l'esprit du présent travail, ainsi que des références plus précises).

Démonstration : On se place sous la probabilité n_1 et on reprend les notations de la partie 4, en posant de plus :

$$L_1 = \sup\{t < T_o \ ; \ \omega(t) = 1\}$$

$$U_1 = \inf_{T_1 < s < L_1} \omega(s).$$

Observons que $\mathcal{N}_x = 1$ si $x < U_1$, $\mathcal{N}_x \geq 2$ si $x \geq U_1$. On note m l'instant unique p.s tel que $m \in [T_1, L_1]$ et $\omega(m) = U_1$.

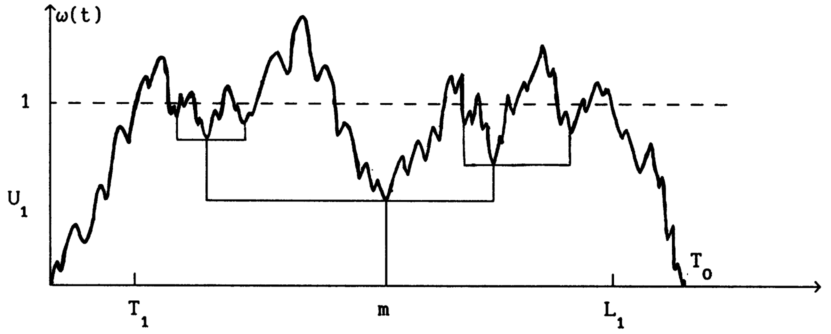


figure 4

Les processus $(\omega(t\wedge T_1),t \geq 0)$ et $(\omega((T_1+t)\wedge T_0),t \geq 0)$ sont indépendants, le premier est un processus de Bessel de dimension trois issu de 0 arrêté au temps d'atteinte de 1, le second est un mouvement brownien réel issu de 1 arrêté au temps d'atteinte de 0. D'après un théorème de décomposition de Williams (voir [W] ou [L], p. 459) la variable U_1 suit une loi uniforme sur $[0;1]$ et conditionnellement à $\{U_1 = h\}$, le processus $(\omega((T_1+t)\wedge m),t \geq 0)$ est indépendant de $(\omega(m+t),t \geq 0)$, et suit la loi d'un mouvement brownien réel issu de 1 arrêté quand il atteint h.

Pour tout $h \in [0,1]$, soient

$$\lambda_h = \sup\{t \leq T_1,\omega(t) = h\} \quad , \quad \mu_h = \inf\{t \geq L_1,\omega(t) = h\}.$$

Observons que le processus $(\omega((\lambda_h+t)\wedge T_1),t \geq 0)$ est un processus de Bessel de dimension trois issu de 0 arrêté au temps d'atteinte de $1-h$ (utiliser par exemple la remarque p. 452-453 de [L]). Il découle alors des remarques précédentes que, conditionnellement à $\{U_1 = h\}$, le processus

$$e'(t) = \omega((\lambda_h+t)\wedge m) - h \qquad (t \geq 0)$$

a pour loi n_{1-h} (la mesure d'Itô conditionnée par $\{ \sup \omega(s) > 1-h \}$). Des arguments similaires, ou l'invariance de n_1 par retournement, montrent que

$$e''(t) = \omega((m+t)\wedge\mu_h) - h \qquad (t \geq 0)$$

a aussi pour loi conditionnelle n_{1-h}. De plus, le théorème de décomposition de Williams rappelé ci-dessus montre que e' et e'' sont indépendants conditionnellement à U_1. Pour $x \in [0,1[$, notons $\mathcal{N}'_x$, respectivement $\mathcal{N}''_x$, le nombre d'excursions de e', respectivement de e'', au-dessus de $(1-U_1)x$ qui atteignent $1-U_1$. Les observations précédentes, et les propriétés d'invariance par changement d'échelle de la mesure d'Itô, entraînent que les processus $\mathcal{N}'_x$ et $\mathcal{N}''_x$ sont conditionnellement à $\{U_1 = h\}$ indépendants et de même loi conditionnelle, qui coïncide avec la loi de $\mathcal{N}_x$. Comme cette loi condiet $\mathcal{N}''_x$ sont conditionnellement à $\{U_1 = h\}$ indépendants et de même loi conditionnelle, qui coïncide avec la loi de $\mathcal{N}_x$. Comme cette loi conditionnelle ne dépend pas de h, on conclut que $\mathcal{N}'_x$, $\mathcal{N}''_x$ et U_1 sont indépendants. L'égalité facile

$$\mathcal{N}_{U_1+(1-U_1)x} = \mathcal{N}'_x + \mathcal{N}''_x$$

montre que la propriété (c) est vérifiée. Comme les propriétés (a) et (b) découlent aussi de ce qui précède, cela termine la preuve du théorème 8. □

Remarque. Notre démonstration du théorème 8 repose sur la décomposition de l'excursion brownienne, prise sous la probabilité n_1 , à l'instant du minimum entre T_1 et L_1 . L'approche du théorème 6 donnée dans Neveu et Pitman [NP2] utilise une autre décomposition au minimum de l'excursion brownienne sous n_1 , la décomposition correspondant au plus petit minimum local de profondeur plus grande que 1 (cette décomposition n'a de sens que s'il existe au moins un tel minimum local, voir [NP2] pour plus de détails).

REFERENCES

[C] B. CHAUVIN : *Arbres et processus de Bellman-Harris. Ann. Inst. H. Poincaré* **22**, *209-232 (1986).*

[D] M. DWASS : *Branching processes in simple random walk. Proc. Amer. Math. Soc.* **51**, *270-274 (1975).*

[F] W. FELLER : *An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol. II, 2nd ed. Wiley, New-York, 1971.*

[FS] K. FLEISCHMANN et R. SIEGMUND-SCHULTZE : *The structure of reduced critical Galton-Watson processes. Math. Nachr.* **79**, *233-241 (1977).*

[KW] K. KAWAZU et S. WATANABE : *Branching processes with immigration and related limit theorems. Theory Probab. Appl.* **16**, *36-54 (1971).*

[L] J.F. LE GALL : *Une approche élémentaire des théorèmes de décomposition de Williams. Séminaire de Probabilités XX. Lecture Notes Math.* **1204**, *447-464. Springer, Berlin 1986.*

[N1] J. NEVEU : *Communication personnelle.*

[N2] J. NEVEU : *Arbres et processus de Galton-Watson. Ann. Inst. H. Poincaré* **22**, *199-207 (1986).*

[N3] J. NEVEU : *Erasing a branching tree. In : Analytic and Geometric Stochastics. Supplement to : Adv. Appl. Probab., 101-108 (1986).*

[NP1] J.NEVEU et J.W. PITMAN : *Renewal property of the extrema and tree property of the excursion of a one-dimensional Brownian motion. Dans ce volume.*

[NP2] J.NEVEU et J.W. PITMAN : *The branching process in a Brownian excursion. Dans ce volume.*

[R] L.C.G. ROGERS : *Brownian local times and branching processes. Séminaire de Probabilités XVIII. Lecture Notes Math.* **1059**, *42-55. Springer, Berlin 1984.*

[RW] L.C.G. ROGERS et D. WILLIAMS : *Diffusions, Markov Processes and Martingales, vol. II, Itô Calculus. Wiley, 1987.*

[W] D. WILLIAMS : *Path decomposition and continuity of local time for one-dimensional diffusions. Proc. London Math. Soc., Ser. 3,* **28**, *738-768 (1974).*