JEAN PICARD

Martingales sur le cercle

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 23 (1989), p. 147-160
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__147_0>

MARTINGALES SUR LE CERCLE

Jean PICARD*

1. Introduction

L'objet de cet article est l'étude de certaines propriétés des martingales à valeurs dans les variétés, et en fait nous nous limiterons au cas où la variété est le cercle $\mathbf{S}^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. Le premier avantage qu'il y a à se limiter à $\mathbf{S}^1$ est la simplicité: le cercle, bien qu'ayant une structure topologique très différente de celle de $\mathbf{R}$, est facile à décrire; en particulier, il n'y aura presque pas de notions géométriques à manipuler. Une autre raison plus profonde est qu'une bonne partie des résultats qui vont être démontrés est liée à la structure de groupe commutatif du cercle; dans le cas de variétés générales, certaines des méthodes que nous allons décrire peuvent encore être employées mais les résultats seront moins complets.

Commençons par décrire le problème dans un cadre général. Si V est une variété riemannienne, ou plus généralement une variété munie d'une connexion, et si on se donne un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq 1})$, il est possible de définir une notion de $\mathcal{F}_t$ martingale à valeurs dans V ([1], [2], [4]); si V est l'espace euclidien $\mathbf{R}^d$, cette notion coïncide avec la notion classique de $\mathcal{F}_t$ martingale locale continue. Notre but est ici d'étudier le comportement d'une martingale M_t, $0 \leq t \leq 1$, en fonction de sa valeur M_1 à l'instant final. Plus précisément, étant donnée une variable aléatoire $\mathcal{F}_1$ mesurable F à valeurs dans V, considérons l'ensemble $\mathcal{M}(F)$ des martingales M_t telles que $M_1 = F$; deux questions se posent alors naturellement: cet ensemble est-il non vide (problème d'existence) et contient-il au plus un élément (problème d'unicité)? En ce qui concerne l'unicité, Emery [2] a répondu affirmativement lorsque V est 'suffisamment petite': plus précisément, il a montré que tout point x de V admet un voisinage ouvert U_x tel que la propriété d'unicité est réalisée pour les martingales à valeurs dans U_x.

Supposons que V est $\mathbf{R}^d$ muni de sa structure euclidienne; dans ce cas, la propriété d'unicité n'est pas réalisée (car les martingales sont en fait des martingales locales); cependant elle l'est si on restreint $\mathcal{M}(F)$ à la classe $\mathcal{C}$ des martingales M_t telles que (M_τ), τ décrivant l'ensemble des temps d'arrêt, est uniformément intégrable. En ce qui concerne l'existence, si F est intégrable, on peut considérer le processus $M_t = \mathbb{E}[F \mid \mathcal{F}_t]$; ce processus est une martingale

* INRIA – Sophia Antipolis, 2004 route des Lucioles, F-06565 VALBONNE Cedex (FRANCE)

(au sens des martingales à valeurs dans les variétés) si et seulement si il admet une version continue et de plus dans ce cas il est dans $\mathcal{C}$; d'après le théorème de représentation de Itô, l'existence d'une version continue est assurée si $\mathcal{F}_t$ est la filtration d'un mouvement brownien. C'est ce type de propriétés que nous désirons étudier dans le cas $V = \mathbf{S}^1$.

Nous commençons par introduire quelques notations; soit p la projection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{S}^1$ et soit d la distance riemannienne sur $\mathbf{S}^1$; le cercle $\mathbf{S}^1$ est muni d'une structure de groupe commutatif et nous utiliserons une notation additive pour désigner cette opération; en particulier, l'élément neutre $p(0)$ sera noté 0. D'autre part, en chaque point x de $\mathbf{S}^1$, on peut considérer la droite tangente $T_x\mathbf{S}^1$ et cette droite peut être identifiée à $\mathbf{R}$: si $\xi(t)$ est une courbe sur $\mathbf{R}$, on identifie $\frac{d}{dt}\xi(t)$ à $\frac{d}{dt}p(\xi(t))$.

Décrivons maintenant la classe des martingales à valeurs dans $\mathbf{S}^1$. Soit M_t un processus continu $\mathcal{F}_t$ adapté à valeurs dans $\mathbf{S}^1$ et soit X_t une détermination continue de $p^{-1}(M_t)$; si X_t et X'_t sont deux telles déterminations, $X_t - X'_t$ est un multiple de 2π et ne dépend pas de t. Alors M_t est une martingale si et seulement si X_t est une martingale locale (cette propriété est évidemment indépendante de la détermination X_t choisie). De plus la variation quadratique $\langle M\rangle_t$ de la martingale M_t est alors égale à celle de X_t.

Si on retire un point a au cercle, la variété $\mathbf{S}^1\setminus\{a\}$ est isométrique à $(0, 2\pi)$, donc la propriété d'unicité est réalisée; en revanche, si on considère $\mathbf{S}^1$ en entier et si on suppose que $\mathcal{F}_t$ est la filtration d'un mouvement brownien, alors $\mathcal{M}(F)$ contient une infinité d'éléments quel que soit F; en effet, si G est une variable aléatoire $\mathcal{F}_1$ mesurable réelle intégrable telle que $p(G) = F$ et si on pose

$$M_t = p\big(\mathbb{E}[G|\mathcal{F}_t]\big), \tag{1}$$

alors M_t est dans $\mathcal{M}(F)$; il est alors facile de vérifier que les différents choix possibles de G conduisent à une infinité de martingales M_t. Comme dans le cas euclidien, nous désirons donc obtenir des sous-classes $\mathcal{C}$ de martingales telles que $\mathcal{C} \cap \mathcal{M}(F)$ contienne au plus un point: ce sera l'objet du paragraphe 2. Au paragraphe 3, en faisant des hypothèses de régularité sur F, nous chercherons à construire, parmi tous les éléments de $\mathcal{M}(F)$, une 'martingale canonique' qui, sous certaines hypothèses, se trouvera dans les classes $\mathcal{C}$ décrites au paragraphe 2; le type de régularité que nous imposerons sur F sera issu du calcul des variations stochastique.

Dans tout cet article, le terme 'fonction régulière' désignera une fonction indéfiniment différentiable bornée ainsi que toutes ses dérivées; la lettre C désignera une constante positive pouvant changer d'une ligne à l'autre.

2. Le problème d'unicité

Nous commençons par rechercher l'unicité dans $\mathcal{M}(F)\cap\mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des martingales M_t dont la variation quadratique $\langle M\rangle_1$ vérifie certaines propriétés d'intégrabilité. Dans le cas euclidien, il suffit de supposer que $\langle M\rangle_1^{1/2}$ est intégrable pour obtenir l'intégrabilité de $\sup_t |M_t|$ et donc la propriété d'unicité; en revanche la situation est moins bonne dans le cas du cercle: en utilisant le procédé de construction (1) décrit dans l'introduction, il apparaît qu'une infinité de martingales M_t peuvent être obtenues à partir de variables G bornées; or, si G est bornée, d'après les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy, tous les moments de la variation quadratique de $\mathbb{E}[G|\mathcal{F}_t]$ (qui est également la variation quadratique de M_t) sont finis; on ne peut donc espérer obtenir l'unicité même en prenant pour $\mathcal{C}$ l'ensemble des martingales M_t telles que tous les moments de $\langle M\rangle_1$ sont finis. Cependant, si on considère les moments exponentiels, on peut démontrer le

Théorème 1. *Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des martingales M_t à valeurs dans $\mathbf{S}^1$ telles que*

$$\mathbb{E}\big[\exp\langle M\rangle_1\big] < \infty.$$

Alors pour toute variable F, $\mathcal{M}(F)\cap\mathcal{C}$ contient au plus un élément.

Pour démontrer ce théorème, il s'agit de prouver que si M_t et M'_t sont deux martingales de $\mathcal{C}$ telles que $M_1 = M'_1$ alors $M = M'$; cette propriété résulte immédiatement du lemme suivant appliqué à $M' - M$.

Lemme 2. *Soit M_t une martingale telle que $M_1 = 0$ et*

$$\mathbb{E}\Big[\exp\frac{1}{4}\langle M\rangle_1\Big] < \infty.$$

Alors $M \equiv 0$.

Démonstration. Soit γ la fonction de $\mathbf{S}^1$ dans $\mathbf{R}_+$ définie par

$$\gamma(x) = 1 - \cos x$$

et posons

$$X_t = \gamma(M_t)\exp\frac{1}{4}\langle M\rangle_t.$$

La formule de Itô fournit

$$X_t = X_0 + \frac{1}{4}\int_0^t (1+\cos M_s)\exp\frac{\langle M\rangle_s}{4}\,d\langle M\rangle_s + \int_0^t \gamma'(M_s)\exp\frac{\langle M\rangle_s}{4}\,dM_s$$

donc X_t est une sous-martingale locale à valeurs dans $\mathbf{R}_+$; de plus d'après les hypothèses du lemme, $\sup_t |X_t|$ est intégrable et $X_1 = 0$, donc $X \equiv 0$, ce qui permet de conclure. $\square$

Nous allons maintenant décrire d'autres classes $\mathcal{C}'$ de martingales possédant la propriété d'unicité; ces classes seront plutôt caractérisées par des propriétés de régularité; plus précisément nous allons supposer que l'espace de probabilité Ω est un espace de Wiener, les propriétés de régularité étant alors des propriétés de différentiabilité au sens du calcul des variations stochastique. Considérons donc $\Omega = C([0,1], \mathbf{R}^m)$, la mesure de Wiener $\mathbb{P}$, le mouvement brownien canonique W_t et la filtration $\mathcal{F}_t$ qu'il engendre. Si V est une variété, soit $\mathcal{S}(V)$ l'ensemble des variables aléatoires à valeurs dans V de la forme

$$F = f(W_{s_1}, W_{s_2} - W_{s_1}, \ldots, W_{s_n} - W_{s_{n-1}})$$

où $0 = s_0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_n = 1$ est une subdivision de $[0,1]$ et f est une fonction régulière de $\mathbf{R}^m \otimes \mathbf{R}^n$ dans V. Si F est dans $\mathcal{S}(V)$ et $1 \leq k \leq m$, on considère le processus

$$D_t^k F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_{k,i}}(W_{s_1}, W_{s_2} - W_{s_1}, \ldots, W_{s_n} - W_{s_{n-1}}) 1_{\{s_{i-1} < t \leq s_i\}}.$$

La variable $(F, D_t^k F)$ est à valeurs dans l'espace tangent $T(V)$.

Rappelons brièvement comment on peut alors construire l'espace $\mathcal{D}_{2,1}(\mathbf{R})$ (voir par exemple [5]). L'application $F \mapsto (F, DF)$ permet de plonger $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ dans $L^2(\Omega, \mathbf{R}) \times L^2([0,1] \times \Omega, \mathbf{R}^m)$; on définit alors $\mathcal{D}_{2,1}(\mathbf{R})$ comme la fermeture de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ dans cet espace. La projection de $\mathcal{D}_{2,1}(\mathbf{R})$ sur $L^2([0,1] \times \Omega, \mathbf{R}^m)$ est alors un opérateur continu qui prolonge D et qui sera encore noté D; d'autre part, on peut montrer que la projection sur $L^2(\Omega, \mathbf{R})$ est injective, ce qui permet de considérer $\mathcal{D}_{2,1}(\mathbf{R})$ comme une partie de $L^2(\Omega, \mathbf{R})$. En résumé, on peut ainsi construire un espace $\mathcal{D}_{2,1}(\mathbf{R})$ de variables aléatoires réelles de carré intégrable; cet espace est muni d'un opérateur D à valeurs dans $L^2([0,1] \times \Omega, \mathbf{R}^m)$, d'une norme

$$\|F\|_{2,1} = \|F\|_2 + \|DF\|_2$$

pour laquelle il est complet, et $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ en est une partie dense. Nous aurons besoin de la formule de Clark-Haussmann-Ocone [6]: si F est dans $\mathcal{D}_{2,1}(\mathbf{R})$ alors sa représentation comme intégrale stochastique peut se mettre sous la forme

$$F = \mathbb{E}F + \sum_{k=1}^{m} \int_0^1 \mathbb{E}[D_s^k F | \mathcal{F}_s] dW_s^k. \tag{2}$$

Nous allons construire $\mathcal{D}_{2,1}(\mathbf{S}^1)$ par une méthode analogue. Soit $L^0(\Omega, \mathbf{S}^1)$ l'ensemble des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{S}^1$ muni de la topologie de la convergence en probabilité; la structure de groupe de $\mathbf{S}^1$ induit une structure de groupe de Lie commutatif sur cet ensemble. Si F est dans $\mathcal{S}(\mathbf{S}^1)$, $D_t^k F(\omega)$ est a priori dans la droite tangente au cercle en $F(\omega)$, mais nous avons vu dans l'introduction que toutes les droites tangentes peuvent être identifiées à $\mathbf{R}$; avec cette remarque, l'homomorphisme de groupes $F \mapsto (F, DF)$ permet de plonger $\mathcal{S}(\mathbf{S}^1)$ dans $L^0(\Omega, \mathbf{S}^1) \times L^2([0,1] \times \Omega, \mathbf{R}^m)$ et on note $\mathcal{D}_{2,1}(\mathbf{S}^1)$ la fermeture de $\mathcal{S}(\mathbf{S}^1)$ dans cet espace; la projection de $\mathcal{D}_{2,1}(\mathbf{S}^1)$ sur $L^2([0,1] \times \Omega, \mathbf{R}^m)$ est notée D. On peut à nouveau montrer que la projection de $\mathcal{D}_{2,1}(\mathbf{S}^1)$ sur $L^0(\Omega, \mathbf{S}^1)$ est injective: en effet, en utilisant la structure de groupe, il suffit de montrer que l'image réciproque de $\{0\}$ est $\{0\}$, c'est-à-dire que si F^n est une suite d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbf{S}^1)$ qui converge en probabilité vers $F \equiv 0$ et si DF^n converge dans L^2, alors la limite est nécessairement nulle; une telle propriété peut se démontrer en plongeant $\mathbf{S}^1$ dans $\mathbf{R}^2$ et en utilisant le résultat classique pour $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$. En résumé, on a ainsi construit un sous-groupe $\mathcal{D}_{2,1}(\mathbf{S}^1)$ de $L^0(\mathbf{S}^1)$; ce sous-groupe est muni d'un homomorphisme D à valeurs dans $L^2([0,1] \times \Omega, \mathbf{R}^m)$, d'une distance

$$\delta(F, F') = \left\| d(F, F') \right\|_2 + \left\| DF - DF' \right\|_2$$

pour laquelle il est complet, et $\mathcal{S}(\mathbf{S}^1)$ en est une partie dense. De plus, si F est dans $\mathcal{D}_{2,1}(\mathbf{S}^1)$ et si ψ est une fonction régulière de $\mathbf{S}^1$ dans $\mathbf{R}$, alors $\psi(F)$ est dans $\mathcal{D}_{2,1}(\mathbf{R})$ et

$$D\psi(F) = \psi'(F) DF.$$

La propriété d'unicité s'énonce alors sous la forme du

Théorème 3. *Pour $r > 1$, soit C'_r l'ensemble des martingales M_t sur l'espace de Wiener telles que pour tout t, la variable M_t est dans $\mathcal{D}_{2,1}(\mathbf{S}^1)$ et*

$$\exists \varepsilon > 0, \qquad \mathbb{E} \int_0^1 \left(\frac{d\langle M \rangle_t}{dt} \right)^{1+2r+\varepsilon} dt < \infty,$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left\| D_s M_t \right\|_{2r/(r-1)}^2 dt\, ds < \infty.$$

Alors pour toute variable F, $\mathcal{M}(F) \cap C'_r$ contient au plus un élément.

Démonstration. Comme pour le théorème 1, il s'agit en fait de considérer une martingale M_t de C'_r telle que $M_1 = 0$ et de montrer que $M \equiv 0$. Soit donc M_t une telle martingale et soit X_t la détermination continue de $p^{-1}(M_t - M_0)$ telle que $X_0 = 0$. Nous allons construire une suite de processus X_t^n qui converge vers X_t; pour cela soit ϕ une fonction régulière de $\mathbf{S}^1$ dans $\mathbf{R}_+$ telle que

$$\phi(x) = \frac{1}{2} d^2(x, 0) \qquad \text{si} \qquad d(x, 0) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Soit $\psi = \phi'$ la fonction dérivée de $\mathbf{S}^1$ dans $\mathbf{R}$ et soit $(t_i^n, 0 \le i \le n)$ une suite de subdivisions de $[0,1]$ dont le pas tend vers 0 quand n tend vers l'infini; on définit alors

$$X_t^n = \sum_{i; t_{i+1}^n \le t} \psi(M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n}).$$

Sur l'ensemble

$$\Omega_n = \left\{ \forall i,\ d(M_{t_i^n}, M_{t_{i+1}^n}) \le \pi/2 \right\},$$

on a $X_{t_i^n}^n = X_{t_i^n}$; comme la probabilité de Ω_n tend vers 1, X_t^n converge en probabilité vers X_t. De plus, on peut développer $\psi(M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i})$ à l'aide de la formule de Itô; en utilisant l'hypothèse faite sur la variation quadratique de M (qui est aussi celle de X), on montre ainsi que X_1^n est borné dans $L^{1+2r+\varepsilon} \subset L^{2+\varepsilon}$. On en déduit que la convergence de X_1^n vers X_1 a lieu dans L^2. D'autre part, comme ψ est régulière, la variable X_1^n est dans $\mathcal{D}_{2,1}(\mathbf{R})$ et

$$D_s X_1^n = \sum_i \psi'(M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})(D_s M_{t_{i+1}^n} - D_s M_{t_i^n}).$$

Donc

$$|D_s X_1^n| \le C \sum_i |D_s M_{t_i^n}|$$

et comme $\psi'(x) = 1$ dès que $d(x, 0) \le \pi/2$, on a

$$D_s X_1^n = D_s M_1 = 0 \qquad \text{sur } \Omega_n.$$

On déduit de ces deux estimations et de l'inégalité de Hölder que

$$\|D_s X_1^n\|_2 = \|D_s X_1^n . 1_{\Omega_n^C}\|_2 \le C \sum_i \|D_s M_{t_i^n}\|_{2r/(r-1)} \mathbb{P}[\Omega_n^C]^{1/2r}$$

d'où

$$\int_0^1 \|D_s X_1^n\|_2^2 ds \le C\, n\, \mathbb{P}[\Omega_n^C]^{1/r} \sum_i \int_0^1 \|D_s M_{t_i^n}\|_{2r/(r-1)}^2 ds.$$

On va maintenant particulariser la suite de subdivisions: on peut choisir (t_i^n) telle que $\frac{i}{n} \le t_i^n \le \frac{i+1}{n}$ et pour $1 \le i \le n-1$,

$$\int_0^1 \|D_s M_{t_i^n}\|_{2r/(r-1)}^2 ds \le n \int_{i/n}^{(i+1)/n} \int_0^1 \|D_s M_t\|_{2r/(r-1)}^2 ds\, dt.$$

Dans ce cas,

$$\int_0^1 \|D_s X_1^n\|_2^2 ds \le C n^2\, \mathbb{P}[\Omega_n^C]^{1/r} \int_0^1 \int_0^1 \|D_s M_t\|_{2r/(r-1)}^2 ds\, dt, \tag{3}$$

le dernier terme étant fini par hypothèse. Il s'agit maintenant d'estimer la probabilité de Ω_n^C; on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\Omega_n^C] &\leq \sum_i \mathbb{P}\left[d(M_{t_i^n}, M_{t_{i+1}^n}) > \pi/2\right] \\
&\leq \sum_i \mathbb{P}\left[|X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}| > \pi/2\right] \\
&\leq C \sum_i \mathbb{E}|X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}|^{2+4r+2\varepsilon} \\
&\leq C \sum_i \mathbb{E}\left|\langle M\rangle_{t_{i+1}^n} - \langle M\rangle_{t_i^n}\right|^{1+2r+\varepsilon} \\
&\leq C \sum_i (t_{i+1}^n - t_i^n)^{2r+\varepsilon} \mathbb{E}\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \left(\frac{d\langle M\rangle_s}{ds}\right)^{1+2r+\varepsilon} ds \\
&\leq C n^{-2r-\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{4}$$

D'après (3) et (4), DX_1^n converge vers 0 dans $L^2([0,1] \times \Omega, \mathbf{R}^m)$. On a déjà vu que X_1^n converge vers X_1 dans $L^2(\Omega, \mathbf{R})$, donc puisque $\mathcal{D}_{2,1}(\mathbf{R})$ est complet, la variable X_1 est dans $\mathcal{D}_{2,1}(\mathbf{R})$ et $DX_1 \equiv 0$. La formule (2) implique alors immédiatement que X_1 est déterministe; comme X_t est une martingale uniformément intégrable et $X_0 = 0$, on a $X \equiv 0$ donc $M_t = M_0$ pour tout t. □

3. Formule de Clark sur le cercle

Nous supposons à nouveau que Ω est l'espace de Wiener décrit au paragraphe précédent. Nous avons vu dans l'introduction que dans ce cas $\mathcal{M}(F)$ contient toujours une infinité d'éléments; on voudrait donc savoir dans quels cas on peut, parmi toutes ces martingales, en distinguer une possédant certaines bonnes propriétés. Nous supposerons que F est dans $\mathcal{D}_{2,1}(\mathbf{S}^1)$ et nous allons construire une martingale arrivant en F en utilisant DF. Dans le cas réel, si F est dans $\mathcal{D}_{2,1}(\mathbf{R})$, la formule de Clark-Haussmann-Ocone (2) permet d'obtenir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}F + \sum_k \int_0^t \mathbb{E}[D_s^k F|\mathcal{F}_s] dW_s^k \\
&= F - \sum_k \int_t^1 \mathbb{E}[D_s^k F|\mathcal{F}_s] dW_s^k.
\end{aligned}$$

Dans le cas du cercle, la première équation faisant intervenir l'espérance de F n'a plus de sens mais la seconde peut être étendue.

Théorème 4. *Soit F une variable de $\mathcal{D}_{2,1}(\mathbf{S}^1)$; posons*

$$M_t = F - p\left(\sum_k \int_t^1 \mathbb{E}[D_s^k F|\mathcal{F}_s] dW_s^k\right). \tag{5}$$

Alors M_t est dans $\mathcal{M}(F)$; de plus pour tout t la variable M_t est dans $\mathcal{D}_{2,1}(\mathbf{S}^1)$ et

$$D_s M_t = \mathbb{E}[D_s F | \mathcal{F}_t] 1_{[0,t]}(s). \tag{6}$$

On peut tout d'abord remarquer que dans la première partie de l'énoncé, la seule assertion non triviale est que M_t est $\mathcal{F}_t$ adapté (c'est alors automatiquement une martingale comme projection sur $\mathbf{S}^1$ d'une martingale réelle). D'autre part, on voit facilement que

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t |\mathbb{E}[D_s F | \mathcal{F}_s]|^2 \, ds.$$

Cette relation et (6) permettent d'obtenir des conditions sous lesquelles la martingale M_t est dans $\mathcal{C}$ et/ou $\mathcal{C}'_r$. Nous allons d'abord démontrer le théorème dans le cas particulier du

Lemme 5. *Si F est dans $\mathcal{S}(\mathbf{S}^1)$, alors les assertions du théorème 4 sont vérifiées.*

Une première démonstration du lemme 5 consiste à étudier DM_0. En utilisant la formule fournissant la valeur de D appliqué à une intégrale de Itô, et en appliquant (2) à $D_s F$, on montre que $M_0 \in \mathcal{D}_{2,1}(\mathbf{S}^1)$ et que $D_s M_0 = 0$; on en déduit que M_0 est déterministe, donc que M_t est bien une $\mathcal{F}_t$ martingale. Nous allons cependant donner une démonstration sensiblement plus longue; en effet, c'est la méthode que nous allons décrire qui se généralise à d'autres variétés riemanniennes pour lesquelles il n'y a pas de formule de Clark (5); de plus, cette méthode fait apparaître M_t comme limite des solutions de problèmes variationnels (voir [3]).

Démonstration du lemme 5. La démonstration du lemme sera divisée en trois étapes. Nous nous fixons une variable F de $\mathcal{S}(\mathbf{S}^1)$: c'est une fonction régulière des valeurs de W sur une subdivision (s_j) de $[0,1]$. Considérons alors une suite de subdivisions $(t_i^n, 0 \le i \le n)$ dont le pas δ_n tend vers 0; pour chaque n, notons (s_j^n) la subdivision obtenue en ajoutant à (s_j) les points de (t_i^n) et notons $\mathcal{S}^n$ l'ensemble des variables de $\mathcal{S}(\mathbf{S}^1)$ qui sont fonction des valeurs de W sur (s_j^n). Dans la première étape, nous allons construire des variables M_i^n de $\mathcal{S}^n$ qui seront $\mathcal{F}_{t_i^n}$ mesurables; dans la seconde étape, nous étudierons DM_i^n; enfin dans la troisième étape, nous considérerons la suite de processus $\mathcal{F}_t$ adaptés

$$\overline{M}_t^n = M_i^n \qquad \text{sur} \quad [t_i^n, t_{i+1}^n). \tag{7}$$

Nous montrerons que pour tout t, $\overline{M}_t^n$ converge en probabilité vers M_t et $D\overline{M}_t^n$ converge dans L^2 vers le membre de droite de (6), ce qui permettra de conclure: en effet, la première convergence impliquera que M_t est $\mathcal{F}_t$ adapté donc est dans $\mathcal{M}(F)$, et la seconde convergence impliquera $M_t \in \mathcal{D}_{2,1}(\mathbf{S}^1)$ et (6).

Etape 1: Construction de M_i^n. Fixons n; la suite de variables M_i^n va être définie par récurrence descendante sur i. Le point de départ est la définition $M_n^n = F$; cette variable est bien dans $\mathcal{S}^n$. Maintenant, pour $0 \leq i < n$, supposons que nous avons défini une variable M_{i+1}^n de $\mathcal{S}^n$ qui soit $\mathcal{F}_{t_{i+1}^n}$ mesurable. Notre intention est de définir M_i^n par une formule du type

$$M_i^n = \operatorname*{argmin}_x \mathbb{E}\big[d^2(x, M_{i+1}^n) \mid \mathcal{F}_{t_i^n}\big]$$

qui est l'analogue de la caractérisation variationnelle de l'espérance conditionnelle. Cependant, comme le carré de la fonction distance n'est pas régulier sur $\mathbf{S}^1$, il est préférable de le modifier. Soit A le demi-cercle constitué des points x de $\mathbf{S}^1$ tels $d(x,0) \leq \pi/2$ et soit ϕ une fonction régulière de $\mathbf{S}^1$ dans $\mathbf{R}_+$ telle que

$$\begin{cases} \phi(x) = \frac{1}{2} d^2(x,0) & \text{si } x \in A, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 < \phi(x) \leq \frac{1}{2} d^2(x,0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit

$$\rho_i^n(x) = \mathbb{E}\big[\phi(M_{i+1}^n - x) \mid \mathcal{F}_{t_i^n}\big].$$

Dans cette étape, nous allons chercher une condition permettant d'affirmer que ρ_i^n atteint son minimum en un point unique, et sous cette condition, nous définirons alors M_i^n comme étant ce point. Nous utiliserons les notations

$$K_{i+1}^n = \|DM_{i+1}^n\|_{L^\infty([0,1]\times\Omega, \mathbf{R}^m)}, \qquad C_i^n = 4K_{i+1}^n \sqrt{t_{i+1}^n - t_i^n}. \tag{8}$$

Tout d'abord, en plongeant $\mathbf{S}^1$ dans $\mathbf{R}^2$ et en notant $\beta_1(x)$, $\beta_2(x)$ les coordonnées de $x \in \mathbf{S}^1$, on obtient deux fonctions régulières β_1 et β_2 de $\mathbf{S}^1$ dans $\mathbf{R}$ dont les dérivées premières sont majorées par 1 et telles que

$$d(x,y) \leq \big|\beta_1(x) - \beta_1(y)\big| + \big|\beta_2(x) - \beta_2(y)\big|.$$

Pour $j \in \{1,2\}$, on en déduit que $D_s\beta_j(M_{i+1}^n)$ est dominé par K_{i+1}^n, d'où, en appliquant la formule (2) à $\beta_j(M_{i+1}^n)$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}\big[\beta_j(M_{i+1}^n) \mid \mathcal{F}_{t_i^n}\big] &= \mathbb{E}\left[\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \Big|\mathbb{E}\big[D_s\beta_j(M_{i+1}^n) \mid \mathcal{F}_s\big]\Big|^2 ds \;\Big|\; \mathcal{F}_{t_i^n}\right] \\ &\leq (K_{i+1}^n)^2 (t_{i+1}^n - t_i^n) \end{aligned}$$

(on remarquera qu'on utilise ici cette formule dans le cadre initialement étudié par Clark puisque M_{i+1}^n est dérivable au sens de Fréchet). En notant μ_{i+1}^n la loi conditionnelle de M_{i+1}^n relative à $\mathcal{F}_{t_i^n}$, comme

$$\int_{\mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^1} |\beta_j(x) - \beta_j(y)|^2 \mu_{i+1}^n(dx)\mu_{i+1}^n(dy) = 2\operatorname{Var}\big[\beta_j(M_{i+1}^n) \mid \mathcal{F}_{t_i^n}\big],$$

on a donc

$$\int_{\mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^1} d^2(x,y)\mu_{i+1}^n(dx)\mu_{i+1}^n(dy) \le 8(K_{i+1}^n)^2(t_{i+1}^n - t_i^n).$$

On en déduit qu'il existe au moins un point $x \in \mathbf{S}^1$ tel que

$$\int_{\mathbf{S}^1} d^2(x,y)\mu_{i+1}^n(dy) \le 8(K_{i+1}^n)^2(t_{i+1}^n - t_i^n)$$

ce qui implique

$$\exists x \in \mathbf{S}^1, \qquad \rho_i^n(x) \le 4(K_{i+1}^n)^2(t_{i+1}^n - t_i^n). \tag{9}$$

Soient maintenant x_1 et x_2 deux points réalisant le minimum de $\rho_i^n(x)$; en particulier, ils vérifient (9). Nous commençons par majorer la distance entre x_1 et x_2. Si c est un réel inférieur à $\pi/2$ et $j \in \{1,2\}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big[d(x_j, M_{i+1}^n) > c \mid \mathcal{F}_{t_i^n}\big] &= \mathbb{P}\big[\phi(M_{i+1}^n - x_j) > c^2/2 \mid \mathcal{F}_{t_i^n}\big]\\ &\le 2\rho_i^n(x_j)/c^2\\ &\le 8(K_{i+1}^n)^2(t_{i+1}^n - t_i^n)/c^2.\end{aligned}$$

En appliquant cette inégalité avec $c = C_i^n$ (voir (8)) et en supposant que $C_i^n \le \pi/2$, on obtient

$$\mathbb{P}\big[d(x_j, M_{i+1}^n) \le C_i^n \mid \mathcal{F}_{t_i^n}\big] > 1/2$$

d'où

$$\mathbb{P}\big[d(x_1, M_{i+1}^n) \le C_i^n,\, d(x_2, M_{i+1}^n) \le C_i^n \mid \mathcal{F}_{t_i^n}\big] > 0.$$

On en déduit à l'aide de l'inégalité triangulaire que la distance entre x_1 et x_2 est majorée par $2C_i^n$; dans la suite, nous supposons que C_i^n est strictement majoré par $\pi/4$. Comme ϕ est régulière, ρ_i^n l'est également et en remarquant que $\phi'' = 1$ sur A,

$$\begin{aligned}(\rho_i^n)''(x) - 1 &= \mathbb{E}\big[\phi''(M_{i+1}^n - x) - 1 \mid \mathcal{F}_{t_i^n}\big]\\ &= \mathbb{E}\big[((\phi'' - 1)1_{A^c})(M_{i+1}^n - x) \mid \mathcal{F}_{t_i^n}\big]\end{aligned}$$

d'où

$$\big|(\rho_i^n)''(x) - 1\big| \le C\mathbb{P}\big[(x - M_{i+1}^n) \notin A \mid \mathcal{F}_{t_i^n}\big].$$

Considérons le plus court des deux segments $[x_1, x_2]$ et supposons que x est un point de ce segment; alors

$$d(x, M_{i+1}^n) \le d(x, x_1) + d(x_1, M_{i+1}^n) \le d(x_1, x_2) + d(x_1, M_{i+1}^n)$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big[(x - M^n_{i+1}) \notin A \mid \mathcal{F}_{t^n_i}\big] &\leq \mathbb{P}\big[d(x_1, M^n_{i+1}) > \pi/2 - d(x_1,x_2) \mid \mathcal{F}_{t^n_i}\big] \\ &\leq 2\rho^n_i(x_1)\big(\pi/2 - d(x_1,x_2)\big)^{-2} \\ &\leq \frac{1}{2}(C^n_i)^2(\pi/2 - 2C^n_i)^{-2}\end{aligned}$$

et ainsi

$$\big|(\rho^n_i)''(x) - 1\big| \leq C(C^n_i)^2(\pi/2 - 2C^n_i)^{-2}.$$

Donc si C^n_i est inférieur à une certaine constante $C_0 < \pi/4$, la dérivée seconde de ρ^n_i est strictement positive sur le segment $[x_1, x_2]$; comme x_1 et x_2 sont des minima de ρ^n_i, on a donc nécessairement $x_1 = x_2$. Nous pouvons donc définir sans ambiguïté la variable

$$M^n_i = \begin{cases} \operatorname*{argmin}_x \rho^n_i(x) & \text{si } C^n_i < C_0, \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient ainsi une variable $\mathcal{F}_{t^n_i}$ mesurable et si $C^n_i < C_0$, $(\rho^n_i)''(M^n_i)$ est minoré par une constante strictement positive C_1. Comme M^n_{i+1} est dans S^n, $\rho^n_i(x)$ est une fonction régulière de x et des valeurs de W sur (s^n_j); si $C^n_i < C_0$, la positivité de sa dérivée seconde (par rapport à x) en M^n_i implique par le théorème de la fonction implicite que M^n_i est également dans S^n; cette appartenance est évidemment aussi réalisée si $C^n_i \geq C_0$. Cela termine la construction de M^n_i.

Etape 2: Etude de DM^n_i. Supposons $C^n_i < C_0$. La différentiation de la formule

$$\mathbb{E}[\phi'(M^n_{i+1} - M^n_i) \mid \mathcal{F}_{t^n_i}] = (\rho^n_i)'(M^n_i) = 0 \tag{10}$$

conduit à

$$D_s M^n_i = \frac{\mathbb{E}[\phi''(M^n_{i+1} - M^n_i) D_s M^n_{i+1} \mid \mathcal{F}_{t^n_i}]}{(\rho^n_i)''(M^n_i)} \tag{11}$$

si $s \leq t^n_i$. Comme $(\rho^n_i)''(M^n_i)$ est minoré par $C_1 > 0$, on en déduit

$$|D_s M^n_i| \leq \Big|\mathbb{E}[\phi''(M^n_{i+1} - M^n_i) D_s M^n_{i+1} \mid \mathcal{F}_{t^n_i}]\Big| \Big(1 + C\big|(\rho^n_i)''(M^n_i) - 1\big|\Big).$$

En utilisant à nouveau les propriétés $\phi'' = 1$ sur A et $|D_s M^n_{i+1}| \leq K^n_{i+1}$, on obtient

$$|D_s M^n_i| \leq K^n_{i+1}\big(1 + C\mathbb{P}\big[d(M^n_i, M^n_{i+1}) > \pi/2 \mid \mathcal{F}_{t^n_i}\big]\big).$$

D'autre part en remarquant que $\rho^n_i(M^n_i) \leq (C_0)^2/4 < \pi^2/8$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big[d(M^n_i, M^n_{i+1}) > \pi/2 \mid \mathcal{F}_{t^n_i}\big] &= \mathbb{P}\big[\phi(M^n_{i+1} - M^n_i) > \pi^2/8 \mid \mathcal{F}_{t^n_i}\big] \\ &\leq \frac{\mathbb{E}\big[|\phi(M^n_{i+1} - M^n_i) - \rho^n_i(M^n_i)|^4 \mid \mathcal{F}_{t^n_i}\big]}{|\pi^2/8 - \rho^n_i(M^n_i)|^4} \\ &\leq C(K^n_{i+1})^4(t^n_{i+1} - t^n_i)^2 \end{aligned} \tag{12}$$

où la dernière estimation provient de la formule de Clark

$$\phi(M_{i+1}^n - M_i^n) - \rho_i^n(M_i^n) = \sum_k \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \mathbb{E}[\phi'(M_{i+1}^n - M_i^n) D_s^k M_{i+1}^n \mid \mathcal{F}_s] dW_s^k.$$

Ainsi

$$\|D_s M_i^n\|_\infty = K_i^n \le K_{i+1}^n \left(1 + C(K_{i+1}^n)^4 (t_{i+1}^n - t_i^n)^2\right). \tag{13}$$

Cette inégalité est évidemment aussi vraie si $C_i^n \ge C_0$ car alors $K_i^n = 0$.

Etape 3: Convergence lorsque n tend vers l'infini. En notant $K = \|DF\|_\infty$, on déduit de (13) que $K_i^n \le \alpha^n(K_{i+1}^n)$ avec

$$\alpha^n(x) = K \exp\{C\delta_n x^4\}.$$

La fonction α^n est croissante; si n est assez grand, l'équation $\alpha^n(x) = x$ admet deux solutions $\beta_1^n < \beta_2^n$; la plus petite solution β_1^n est supérieure à K et converge vers K lorsque $n \to \infty$. Comme $x < \beta_1^n$ implique $\alpha^n(x) < \beta_1^n$ et $K_n^n = K < \beta_1^n$, on a donc $K_i^n < \beta_1^n$ pour tout i. En prenant $n \ge n_0$ assez grand, on a donc $K_i^n \le 2K$ et dans ce cas, d'après (8),

$$C_i^n \le 8K\sqrt{\delta_n}.$$

Donc pour $n \ge n_1$ assez grand, C_i^n est inférieur à C_0 pour tout i; la variable M_i^n est alors l'unique point minimal de la fonction aléatoire ρ_i^n pour tout i. Nous supposons désormais que $n \ge n_1$. Nous devons étudier la convergence de M_i^n et $D_s M_i^n$. D'après (11) et (12), on a si $s \le t_i^n$

$$\begin{aligned}\left|D_s M_i^n - \mathbb{E}[D_s M_{i+1}^n | \mathcal{F}_{t_i^n}]\right| &\le C\mathbb{P}[d(M_{i+1}^n, M_i^n) > \pi/2 | \mathcal{F}_{t_i^n}] \\ &\le C(t_{i+1}^n - t_i^n)^2,\end{aligned}$$

donc en sommant

$$\left|D_s M_i^n - \mathbb{E}[D_s F | \mathcal{F}_{t_i^n}]\right| \le C\delta_n. \tag{14}$$

D'autre part, d'après (10) et la formule de Clark, on peut écrire

$$\phi'(M_{i+1}^n - M_i^n) = \sum_k \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \mathbb{E}[\phi''(M_{i+1}^n - M_i^n) D_s^k M_{i+1}^n \mid \mathcal{F}_s] dW_s^k.$$

Cette formule et

$$\left\|\mathbb{E}[\phi''(M_{i+1}^n - M_i^n) D_s M_{i+1}^n \mid \mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[D_s F | \mathcal{F}_s]\right\|_2 \le C\delta_n$$

qui est une conséquence de (12) et (14) impliquent

$$\lim_{n\to\infty} \sup_i \left\| \sum_{j=i}^{n-1} \phi'(M_{j+1}^n - M_j^n) - \sum_k \int_{t_i^n}^1 \mathbb{E}[D_s^k F|\mathcal{F}_s]dW_s^k \right\|_2 = 0.$$

Projetons sur $\mathbf{S}^1$ les deux termes à l'intérieur de la norme; on a

$$p\left(\sum_{j=i}^{n-1} \phi'(M_{j+1}^n - M_j^n)\right) = F - M_i^n \qquad \text{sur} \quad \Omega_n = \bigcap_i \{d(M_i^n, M_{i+1}^n) \leq \pi/2\}$$

et

$$p\left(\sum_k \int_{t_i^n}^1 \mathbb{E}[D_s^k F|\mathcal{F}_s]dW_s^k\right) = F - M_{t_i^n}.$$

Comme la probabilité de Ω_n tend vers 1 (voir (12)), on en déduit la convergence en probabilité

$$\forall c > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_i \mathbb{P}[d(M_i^n, M_{t_i^n}) > c] = 0.$$

Si maintenant on considère le processus $\overline{M}_t^n$ défini en (7), on en déduit immédiatement que $\overline{M}_t^n$ converge en probabilité vers M_t. Il ne nous reste donc plus qu'à montrer que $D\overline{M}_t^n$ converge dans $L^2([0,1] \times \Omega)$ vers le membre de droite de (6). Fixons t et pour tout n, considérons l'indice i tel que $t_i^n \leq t < t_{i+1}^n$. Alors $D_s\overline{M}_t^n = D_s M_i^n$; cela implique d'après (14)

$$\left|D_s\overline{M}_t^n - \mathbb{E}[D_s F|\mathcal{F}_{t_i^n}]\right| \leq C\delta_n \qquad \text{si} \quad s \leq t_i^n,$$

d'où

$$\int_0^t \left|D_s\overline{M}_t^n - \mathbb{E}[D_s F|\mathcal{F}_t]\right|^2 ds$$
$$\leq C\delta_n^2 + 2\int_0^{t_i^n} \left|\mathbb{E}[D_s F|\mathcal{F}_{t_i^n}] - \mathbb{E}[D_s F|\mathcal{F}_t]\right|^2 ds + \int_{t_i^n}^t \left|\mathbb{E}[D_s F|\mathcal{F}_t]\right|^2 ds.$$

Pour tout s, $\mathbb{E}[D_s F|\mathcal{F}_{t_i^n}]$ converge dans L^2 vers $\mathbb{E}[D_s F|\mathcal{F}_t]$ (propriété de continuité des martingales de la filtration brownienne), donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\int_0^t \left|D_s\overline{M}_t^n - \mathbb{E}[D_s F|\mathcal{F}_t]\right|^2 ds = 0. \qquad \square$$

Démonstration du théorème 4. Fixons une variable F de $\mathcal{D}_{2,1}(\mathbf{S}^1)$ et une suite F^n d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbf{S}^1)$ telle que F^n converge en probabilité vers F et

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\int_0^1 |D_sF^n - D_sF|^2 ds = 0.$$

A chaque F^n correspond une martingale M_t^n construite au lemme 5; en comparant les expressions (5) de M_t et M_t^n, on vérifie aisément que M_t^n converge en probabilité vers M_t, donc M_t est $\mathcal{F}_t$ adapté et c'est un élément de $\mathcal{M}(F)$. D'autre part, comme

$$D_sM_t^n = \mathbb{E}[D_sF^n|\mathcal{F}_t]1_{\{s\leq t\}},$$

on a

$$\mathbb{E}\int_0^t \left|D_sM_t^n - \mathbb{E}[D_sF|\mathcal{F}_t]\right|^2 ds \leq \mathbb{E}\int_0^t \left|D_sF^n - D_sF\right|^2 ds$$

qui tend vers 0, donc M_t est dans $\mathcal{D}_{2,1}(\mathbf{S}^1)$ et D_sM_t vérifie la formule (6) du théorème. □

Bibliographie

[1] R.W.R. Darling, Martingales in manifolds – Definition, examples, and behaviour under maps, *Séminaire de Probabilités XVI, Supplément: Géométrie Différentielle Stochastique*, Lect. N. in Math. **921**, Springer, 1982.

[2] M. Emery, *Manifold-valued semimartingales and martingales*, Cours à Lausanne et Changhai.

[3] M. Emery, En cherchant une caractérisation variationnelle des martingales, *Séminaire de Probabilités XXII*, Lect. N. in Math. **1321**, Springer, 1988.

[4] P.A. Meyer, Géométrie stochastique sans larmes, *Séminaire de Probabilités XV*, Lect. N. in Math. **850**, Springer, 1981.

[5] D. Nualart, Noncausal stochastic integrals and calculus, *Stochastic Analysis and Related Topics (Silivri 1986)*, Lect. N. in Math. **1316**, Springer, 1988.

[6] D. Ocone, Malliavin's calculus and stochastic integral representations of functional of diffusion processes, *Stochastics* **12** (1984), 161–185.