H. SADI

Une condition nécessaire et suffisante pour la convergence en pseudo-loi des processus

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 434-437

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__434_0>

UNE CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE POUR LA CONVERGENCE EN PSEUDO-LOI DES PROCESSUS

H. SADI, Université de Paris VI, Laboratoire du Calcul des Probabilités, 4 place Jussieu tour 56 3e étage 75252 Cedex 05

Soient $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X des processus à valeurs dans $\mathbb{D}([0,1],\mathbb{R})$ qu'on munit de la topologie de la convergence en mesure, c'est-à-dire qu'on considère $\mathbb{D}([0,1],\mathbb{R})$ comme un sous-espace de $\mathbb{L}^\circ([0,1],\mathbb{R},\lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue. On donne une condition nécessaire et suffisante particulièrement simple pour que X^n converge vers X en loi en tant que variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{L}^\circ([0,1],\mathbb{R},\lambda)$. Plus généralement, soient $(T,\mathcal{T},\mu)$ un espace standard de masse finie et X^n et X des processus mesurables indexés par T prenant leurs valeurs dans $\mathbb{R}$; on a le résultat suivant:

<u>Théorème</u>: *X^n converge en loi vers X dans dans $\mathbb{L}^\circ(T,\mathcal{T},\mu)$ si et seulement si pour toute sous-suite (n'), il existe une sous-sous-suite (n'') et un ensemble $S\subseteq T$ vérifiant $\mu(S^c)=0$ tels que les lois finidimensionnelles $\mathcal{L}(X^{n''}_{t_1},\dots,X^{n''}_{t_k})$ convergent vers $\mathcal{L}(X_{t_1},\dots,X_{t_k})$ pour tous $t_1,\dots,t_k\in S$.*

<u>Corollaire</u>: *Si $\mathcal{L}(X^n_{t_1},\dots,X^n_{t_k}) \to \mathcal{L}(X_{t_1},\dots,X_{t_k})$ alors $\mathcal{L}(X^n) \to \mathcal{L}(X)$ en tant que variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{L}^\circ(T,\mu)$.*

A la fin de ce papier nous donnerons la démonstration qui permet de passer de [0,1] à n'importe quel espace standard T de masse finie. Avant de passer à la démonstration rappelons les liens qu'il y a avec les pseudo-lois et les pseudo-trajectoires introduites par C. Dellacherie et P.A. Meyer dans [2]. Notons par $\mathbb{P}$, l'espace compact des probabilités sur $[0,1]\times\bar{\mathbb{R}}$ et associons à tout $w\in\mathbb{D}$ un élément $\tilde{w}\in\mathbb{P}$ appelé pseudo-trajectoire de la manière suivante: La pseudo-trajectoire $\tilde{w}$ est l'image de la mesure λ sur [0,1] par l'application.

$$t \to (t,w(t))$$

On note $\Psi\subseteq\mathbb{P}$ l'espace des pseudo-trajectoires ainsi obtenu. On construit la trajectoire w à partir d'un "représentant" u de $\tilde{w}$ (défini à un ensemble de mesure nulle près) ainsi:

$$w(t) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s)ds$$

La topologie héritée par Ψ correspond sur $\mathbb{D}$ à celle induite par la convergence en mesure. C'est précisément là qu'est le lien entre pseudo-lois et lois dans $\mathbb{L}^\circ$.

D'autres auteurs, I.I. Gikhman et A.V. Skorokhod [4], H.Cremers et D. Kadelka [1] ont étudié les théorèmes limites pour des processus à valeurs dans $\mathbb{L}^p([0,1],\lambda)$ $p\geq 1$, P.A. Meyer et W.A. Zheng [5] et R. Rebolledo [6] dans des articles récents ont étudié le cas p=0 . Rebolledo [6] a donné une condition suffisante de convergence en pseudo-loi pour des processus à valeurs mesures ,qui correspond aux critères habituels de convergence en loi, à savoir la convergence finidimensionnelle et la tension . Tandis que Meyer et Zheng [5] ont donné une condition nécessaire pour la convergence en pseudo-loi. Il s'avère que cette condition, qui est celle qui est énoncée dans le théorème précédent est aussi suffisante.La démonstration de la condition nécessaire figure dans Meyer et Zheng [5] et consiste à appliquer le théorème de Skorokhod pour obtenir une convergence $\mathbb{L}^1(\Omega x[0,1], dPxdt)$ après un changement d'échelle,puis une convergence presque sûre pour une sous-suite.

La démonstration de la condition suffisante utilise les mêmes techniques mais fait appel de manière essentielle au résultat suivant de L.Š. Grinblat [4]:

Théorème: [Grinblat] : *Soient $p\geq 1$, (X^n_t) et X_t des processus définis pour $t\in[0,1]$ et supposons que:*

$\mathbb{E}(|X^n_t|^p)\leq C$

$\forall\, t_1,\dots,t_k\in[0,1]$ $\mathcal{L}(X^n_{t_1},\dots X^n_{t_k})$ *tend vers* $\mathcal{L}(X_{t_1},\dots,X_{t_k})$

$\mathbb{E}(|X^n_t|)$ *tend vers* $\mathbb{E}(|X_t|)$ $\forall t\in[0,1]$

Alors pour toute fonctionnelle continue f sur $\mathbb{L}^p([0,1],\lambda)$ la loi de $f(X^n_t)$ tend vers la loi de $f(X_t)$.

La démonstration de ce théorème repose sur le théorème de Prokhorov et une caractérisation des compacts de $\mathbb{L}^p([0,1],\lambda)$

Revenons maintenant à la démonstration de la condition suffisante du théorème énoncé au début dans le cas T=[0,1]: On suppose donc que pour toute sous-suite (n') il existe une sous-sous-suite (n") et un ensemble A

vérifiant $\lambda(A^c)=0$ telle que:
$\mathcal{L}(X^{n''}_{t_1},\dots,X^{n''}_{t_k})$ tende vers $\mathcal{L}(X_{t_1},\dots,X_{t_k})$ $\forall$ $t_1,\dots,t_k\in A$, il s'agit alors de montrer que X^n converge en loi vers X dans $\mathbb{L}^\circ$.

Soit φ: $\mathbb{R} \to]-1,1[$ un homéomorphisme. Alors $\mathcal{L}(\varphi\circ X^{n''}_{t_1},\dots,\varphi\circ X^{n''}_{t_k})$ tend vers $\mathcal{L}(\varphi\circ X_{t_1},\dots,\varphi\circ X_{t_k})$ pour tous $t_1,\dots,t_k\in A$

De plus $\varphi\circ X^{n''}$ et $\varphi\circ X$ sont à trajectoires bornées donc dans $\mathbb{L}^1([0,1],]-1,1[,\lambda)$. Considérés comme tels on ne modifie pas ces processus en posant:

$$\varphi\circ X^{n''}_t=0 \text{ et } \varphi\circ X_t= 0 \quad \text{pour tout } t\in A^c$$

Les nouveaux processus ainsi définis vérifient clairement les hypothéses du théorème de Grinblat pour p=1 et donc les lois $\mathcal{L}(\varphi\circ X^{n''})$ tendent vers $\mathcal{L}(X)$ dans $\mathbb{L}^1([0,1],]-1,1[,\lambda)$, donc dans $\mathbb{L}^\circ([0,1],]-1,1[,\lambda)$. Inversement φ^{-1} induit une application continue de $\mathbb{L}^\circ([0,1],]-1,1[,\lambda)$ dans $\mathbb{L}^\circ([0,1],\mathbb{R},\lambda)$, donc $\mathcal{L}(X^{n''}) \to \mathcal{L}(X)$

Finalement on a montré que pour toute sous-suite (n') il existe une sous-sous-suite (n") telles que les lois de $X^{n''}$ convergent vers la même limite à savoir la loi de X dans $\mathbb{L}^\circ([0,1],\mathbb{R},\lambda)$. On en conclut donc que X et X^n considérés comme variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{L}^\circ$ vérifient:

$$\mathcal{L}(X^n) \to \mathcal{L}(X)$$

Terminons par la démonstration de l'extension signalée au début:
On remplace $([0,1],\lambda)$ par un espace standard $(T,\mathcal{T},\mu)$ c'est-à-dire un espace mesuré tel qu'il existe φ mesurable

$$\varphi : [0,1] \longrightarrow T$$

vérifiant $\mu(U)=\lambda(\varphi^{-1}(U)) \quad \forall\, U \in \mathcal{T}$

1) Preuve de la condition suffisante :

Soient Y^net Y des processus mesurables par rapport à la tribu complétée de μxP et tels que pour toute sous-suite (n') il existe une sous-sous-suite (n") et un ensemble S vérifiant $\mu(S^c)=0$ tel que:
$\forall$ $t_1,\dots,t_k \in S$ $\mathcal{L}(Y^{n''}_{t_1},\dots,Y^{n''}_{t_k}) \to \mathcal{L}(Y_{t_1},\dots,Y_{t_k})$
On définit alors sur [0,1] des processus X^n et X commme suit :

$$X^n_s(\omega)=Y_{\varphi(s)}(\omega) \quad \text{et} \quad X_s(\omega)=Y_{\varphi(s)}$$

On a alors:
$\mathcal{L}(X^{n''}_{s_1},\dots,X^{n''}_{s_k})$ tend vers $\mathcal{L}(X_{s_1},\dots,X_{s_k})$ $\forall$ $s_1,\dots,s_k\in[\varphi^{-1}(S)]$, le résultat établi dans le cadre [0,1] permet alors de conclure que $\mathcal{L}(X^n) \to \mathcal{L}(X)$ dans $\mathbb{L}^\circ([0,1],\mathbb{R},\lambda)$. Il s'ensuit que $\mathcal{L}(Y^n) \to \mathcal{L}(Y)$ dans $\mathbb{L}^\circ(T,\mathcal{T},\mu)$

2)Condition nécessaire:

Si $\mathscr{L}(Y^n) \to \mathscr{L}(Y)$ dans $\mathbb{L}^\circ(T,\mathcal{T},\mu)$ on a $\mathscr{L}(X^n) \to \mathscr{L}(X)$ dans $\mathbb{L}^\circ([0,1],\mathbb{R},\lambda)$ car l'application φ induit une application continue de $\mathbb{L}^\circ(T)$ dans $\mathbb{L}^\circ([0,1])$, par suite on en déduit que les lois finidimensionelles $\mathscr{L}(X^{n''}_{t_1},\dots,X^{n''}_{t_k}) \to \mathscr{L}(X_{t_1},\dots,X_{t_k})$ pour une sous-suite n" de toute sous-suite n'. Il est alors clair que $\mathscr{L}(Y^{n''}_{t_1},\dots,Y^{n''}_{t_k}) \to \mathscr{L}(Y_{t_1},\dots,Y_{t_k})$.

<u>Bibliographie</u>:

[1] H. Cremers et D. Kadelka: On weak convergence of integral functionals of stochastic processes with applications to processes taking paths in $\mathbb{L}^E_p$ Stochastic processes and their applications (21), North Holland 1986, 305-317.

[2] C. Dellacherie et P.A. Meyer: Probabilités et potentiel, Herman vol (1) 1975

[3] I.I.Gikhman et A.V.Skorokhod: Introduction to the theory of the random processes W.B. Saunders Company, 1969.

[4] L.Š.Grinblat: A limit theorem for measurable random processes and its applications, Proceedings of AMS vol (61) 1976, 371-376.

[5] P.A. Meyer et W.A. Zheng : Tightness criteria for laws of semi-martingales, Annales de l'Institut Henri Poincaré vol (20) n°4, 1984.

[6] R. Rebolledo: Topologie faible et méta-stabilité, Séminaire de probabilités XXI,Lect. Notes in Mathematics n° 1247, Springer-Verlag 1987, 545-562.