Rémi Léandre

Densité en temps petit d'un processus de saut

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 21 (1987), p. 81-99

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1987__21__81_0>

DENSITE EN TEMPS PETIT D'UN PROCESSUS DE SAUTS

Rémi LEANDRE
Laboratoire de Mathématiques
Faculté des Sciences et des Techniques
16, Route de Gray
25030 BESANCON - FRANCE

INTRODUCTION :

Le calcul des variations permet de montrer que certains processus de sauts possèdent une densité ([B],[L.1],[B.G.J]).

Plus précisément, appelons $x_t(x)$ un processus de sauts purs issu de x, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, de mesure de Lévy $g(x,z)dz$. Le fait qu'il possède une densité $p_t(x,y)$ se traduit par le fait que $\int g(x,z)dz = \infty$. Notre but est de montrer qu'en temps petit, on a, si $x \neq y$:

$$(0.1) \qquad p_t(x,y) \sim g(x,y-x)t,$$

dès que $g(x,y-x) \neq 0$.

L'hypothèse $g(x,y-x) \neq 0$ traduit le fait que le processus peut sauter en un seul saut de x à y. (0.1) signifie que la trajectoire optimale qu'utilise le processus $x_t(x)$ pour aller de x à y est de sauter en une seule fois de x à y et de ne pas bouger avant et après le temps de saut. En temps petit, le processus tend à utiliser cette trajectoire optimale. Ainsi apparaît l'aspect combinatoire qui intervient dans l'estimation de $p_t(x,y)$: si le nombre minimum de sauts nécessaires pour aller de x à y était 2, on aurait un équivalent en Ct^2... Contrairement à ce qui se passe dans la théorie des grandes déviations ([F.V]), il faudrait utiliser un autre modèle pour faire apparaître une action et une décroissance exponentielle de la densité.

I. GENERALITES :

Considérons un champ de vecteurs X_o sur $\mathbb{R}^d$, de dérivées de tous ordres bornées et une application bornée $\gamma(x,z)$ de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^d$, de dérivées de tous ordres bornées. Supposons que :

$$(1.1) \qquad \gamma(x,0) = 0.$$

Introduisons un processus z_s à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, qui soit une martingale à accroissements indépendants, de mesure de Lévy $g(z)dz$. Supposons qu'il soit la somme compensée de ses sauts ([J]).

On suppose que g vérifie les conditions rendant possible le calcul des variations stochastiques ([B],[B.G.J]) : elle est C^∞ sur $\mathbb{R}^p - (0)$, et pour $\varepsilon > 0$, on a :

$$(1.2) \qquad \int_{|z|\geq\varepsilon} \frac{|\frac{\partial g}{\partial z}(z)|^2}{g(z)}\, dz < \infty.$$

Enfin, on suppose qu'il existe une fonction ν C^∞ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$(1.3) \qquad \nu(z) \leq C\,|z|^2$$

$$(1.4) \qquad \int_{|z|\leq 1} \left|\frac{d}{dz}\ \nu(z)\,g(z)\right|^2 \frac{dz}{g(z)} < \infty.$$

De plus, supposons que $\nu(z) > 0$ si $g(z) > 0$ et si z est non nul.

Considérons la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$(1.5) \qquad x_t(x) = x + \overset{c}{\sum_{s\leq t}} \gamma(x_{s^-}(x), \Delta z_s) + \int_0^t X_0(x_s(x))\, ds,$$

X_0 étant un champ de vecteurs de dérivées de tout ordre bornées. (L'opérateur de somme compensée $\overset{c}{\underset{s\leq t}{S}}$ est défini dans [J]).

En général, l'application Ψ_t qui à x associe $x_t(x)$, bien que presque sûrement C^∞ n'est pas un difféomorphisme ([L.2]). Toutefois, si l'on fait la restriction suivante :

$$(1.6) \qquad \operatorname*{Inf}_{g(z)>0,\ x\in\mathbb{R}^d} \left|\det\left(I + \frac{\partial\gamma}{\partial x}(x,z)\right)\right| > 0,$$

Ψ_t est un difféomorphisme.

Notons $C\gamma$ la matrice :

$$(1.7) \qquad C\gamma = \operatorname*{Inf}_{g(z)\neq 0,\ x\in\mathbb{R}^d} \frac{\partial\gamma}{\partial z}(x,z)\ {}^t\frac{\partial\gamma}{\partial z}(x,z).$$

Rappelons le théorème suivant ([B.G.J]).

<u>Théorème I.1</u> : <u>Supposons que</u> (1.6) <u>soit vérifiée</u>, <u>et que</u> $C\gamma$ <u>est inversible. Pour que</u> $x_t(x)$ <u>possède une densité</u> C^∞, <u>il suffit qu'il existe un entier</u> $\alpha \in \,]0,2[$ <u>tel que</u> :

$$(1.8) \qquad \varliminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^\alpha \int_{|z|>\varepsilon} g(z)\, dz > 0.$$

<u>Remarque</u> : La condition "$C\gamma$ inversible" est beaucoup trop forte. Nous l'introduisons dans le but de simplifier les calculs qui suivront. Elle s'interprète de la façon suivante : appelons ε_C le plus grand réel >0 tel que :

$$(1.9) \qquad \int_{z>\varepsilon} g(z)\,dz > 0.$$

Considérons une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^p$ dans $[0,1]$, notée ϕ_ε, nulle sur la boule de centre 0 et de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ et égale à 1 en dehors de la boule de rayon ε.

Introduisons la variable aléatoire X_ε à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et de loi :

$$(1.10) \qquad dP(X_\varepsilon)(z) = \frac{\phi_\varepsilon(z)\, g(z)\, dz}{\int \phi_\varepsilon(z)\, g(z)\, dz}.$$

Il faut bien sûr supposer que $\varepsilon < \varepsilon_C$ dans (1.10).

Considérons la variable aléatoire $x + \gamma(x, X_\varepsilon)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Esquissons brièvement comment le calcul des variations stochastiques et la condition "$C\gamma$ inversible" permettent de montrer que $x + \gamma(x, X_\varepsilon)$ possède une densité $g_\varepsilon(x,y)$ C^∞ en x et y, et que g_ε est bornée, γ possédant des dérivées de tout ordre bornées.

Introduisons une fonction f C^∞ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, à support compact, X un vecteur de $\mathbb{R}^d$ et λ un réel positif. Si λ est assez petit, $z \to z + \lambda\, {}^t\frac{\partial\gamma}{\partial z}(x,z)X$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^p$ noté $\Psi\lambda$, de Jacobien J_λ. On a alors la formule de quasi-invariance :

$$(1.11) \qquad \begin{aligned} &\int f(x+\gamma(x,z))\, \phi_\varepsilon(z)\, g(z)\, dz = \\ &= \int f(x+\gamma(x,\Psi\lambda(z))), \phi_\varepsilon(\Psi\lambda(z))\, g(\Psi\lambda(z))\, J_\lambda\, dz. \end{aligned}$$

En dérivant cette dernière expression en λ, on obtient une formule d'intégration par parties :

$$(1.12) \qquad \begin{aligned} &E[< f'(x+\gamma(x,X_\varepsilon)), \frac{\partial\gamma}{\partial z}(x,X_\varepsilon)\ {}^t\frac{\partial\gamma}{\partial z}(x,X_\varepsilon)X>] = \\ &= E[f(x+\gamma(x,X_\varepsilon))\, L_\varepsilon(\gamma)]. \end{aligned}$$

L_ε s'interprète comme l'opérateur d'Ornstein-Ühlenbeck associé à X_ε.

$\frac{\partial\gamma}{\partial z}(x,X_\varepsilon)\ {}^t\frac{\partial\gamma}{\partial z}(x,X_\varepsilon)$ s'interprète comme la matrice de Malliavin associé à γ ([B.G.J]).

Compte tenu du fait que $C\gamma$ est inversible, on peut appliquer la procédure générale de ([I.W] [St]) pour en déduire l'existence de $g_\varepsilon(x,y)$ et sa régularité.

Bien évidemment, ceci résulte aussi du théorème des fonctions implicites, mais nous avons donné cette méthode à titre pédagogique. Elle s'applique aussi pour montrer que la transformée de $g(z)dz$ par $z \to x + \gamma(x,z)$ est une mesure μ_x possédant une densité $g(x,y)$ C^∞ en x et y si $x \neq y$. De plus si K est un compact de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ne rencontrant pas la diagonale, on peut choisir ε assez petit de sorte que pour tout (x,y) de K on ait :

$$(1.13) \qquad g_\varepsilon(x,y) = \frac{g(x,y)}{\int \phi_\varepsilon(z)\, g(z)\, dz}.$$

Ceci provient du fait que $\gamma(x,0) = 0$.

Revenons au théorème I. Notons $p_t(x,y)$ la densité de $x_t(x)$: elle est C^∞ en x,y et $t > 0$.

<u>Proposition I.2</u> : <u>Considérons la boule</u> B(y,r) <u>de centre</u> y <u>et de rayon</u> r.

<u>Uniformément sur tout compact de</u> R^d, <u>on a</u> :

(1.14) $$\lim_{t\to 0} \int_{B(y,r)} p_t(x,y)\,dx = 1.$$

<u>Preuve</u> : Introduisons deux fonctions C^∞ $f_1(x)$ et $f_2(x)$, positives, égales à 1 sur un voisinage de l'origine. Supposons qu'elles encadrent la fonction indicatrice de $B(0,r)$. Il suffit de montrer qu'uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d$:

(1.15) $$\lim_{t\to 0} \int f_1(y-x)\,p_t(x,y)\,dx = \lim_{t\to 0} \int f_2(y-x)\,p_t(x,y)\,dx.$$

Il suffit d'effectuer la démonstration pour f_1. Soit $\mu_1(t)$ la mesure sur $\mathbb{R}^d$:

(1.16) $$g \to \int E[f_1(x_t(x)-x)\,g(x_t(x))]dx.$$

On a évidemment :

(1.17) $$\mu_1(t)(g) = \int g(y)\,dy \int f_1(y-x)\,p_t(x,y)\,dx.$$

La fonction $y \to \int f_1(y-x)\,p_t(x,y)dx$ est C^∞ en y, et est la densité de $\mu_1(t)$.

De plus, $x \xrightarrow{\Psi_t} x_t(x)$ est un difféomorphisme de Jacobien $J_t^{-1}(x)$. La formule de Fubini et la formule du changement de variable impliquent que :

(1.18) $$\begin{aligned}\mu_1(t)(g) &= E[\int f_1(x_t(x)-x)\,g(x_t(x))dx] = \\ &= E[\int f_1(x-\Psi_t^{-1}(x))\,g(x)\,J_t^{-1}(x)\,dx].\end{aligned}$$

Si nous identifions (1.17) et (1.18), nous obtenons :

(1.19) $$\int f_1(y-x)p_t(x,y)\,dx = E[f_1(y-\Psi_t^{-1}(y))J_t^{-1}(y)].$$

Car il résulte de (1.18) que $y \to E[f_1(y-\Psi_t^{-1}(y)J_t^{-1}(y)]$ est une autre version C^∞ de la densité de $\mu_1(t)$. □

L'hypothèse (1.7) implique que l'application

(1.20) $$x \xrightarrow{H_z} x + \gamma(x,z)$$

est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ si $g(z) \neq 0$. Notons H_z^{-1} son inverse, et posons :

(1.21) $$\tilde{\gamma}(x,z) = H_z^{-1}(x) - x.$$

(1.7) implique que $\tilde{\gamma}$ est C^∞ en x,z de dérivées de tout ordre bornées. De plus, on a $\tilde{\gamma}(x,0) = 0$ car $H_o(x) = x$.

Posons :

(1.22) $$S_\gamma \quad \operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}^d\, g(z)>0} |\tilde{\gamma}(x,z)|.$$

On a :

(1.23) $$S_\gamma = \sup_{x\in\mathbb{R}^d\, g(z)>0} |\tilde{\gamma}(H_z(x),z)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^d\, g(z)>0} |\tilde{\gamma}(x,z)|$$

car $x \to H_z(x)$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$.

<u>Proposition I.3</u> : <u>Pour tout entier</u> p, <u>il existe un entier</u> K <u>tel que si</u> $r > KS_\gamma$, <u>on ait</u> :

(1.24) $$\overline{\lim_{t\to 0}}\ \frac{1}{t^p} \sup_{y\in\mathbb{R}^d} \int_{B^c(y,r)} p_t(x,y)dx < \infty .$$

<u>Preuve</u> : Majorons la fonction indicatrice de $B^c(y,KS_\gamma)$ par une fonction $C^\infty f_1$, appliquant $\mathbb{R}^d$ dans $[0,1]$. Supposons de plus que f_1 soit nulle sur $B(y,(K-1)S_\gamma)$, K étant un entier ≥ 2.

Si l'on procède comme dans la proposition précédente, il suffit de prouver que :

(1.25) $$\overline{\lim_{t\to 0}} \sup_{y\in\mathbb{R}^d} \frac{1}{t^p} E[f_1(y-\Psi_t^{-1}(y))] < \infty$$

pour un entier K bien choisi.

Or $\Psi_t^{-1}(y)$ a même loi que la solution d'une équation différentielle stochastique. En effet, d'après l'appendice, $\Psi_t^{-1}(y)$ a même loi que la solution prise au temps t de l'équation différentielle stochastique :

(1.5)' $$\tilde{x}_s(y) = y + \sum_{u\leq s}^{c} \tilde{\gamma}(\tilde{x}_{u-}(x),\Delta\tilde{z}_u) + \int_o^s \tilde{X}_o(\tilde{x}_u(x))du,$$

$\tilde{z}_s$ étant une martingale à accroissement indépendant de mesure de Lévy g(-z)dz.

(1.25) résulte des deux propriétés suivantes :

La première affirme que :

(1.26) $$\sup_{y\in\mathbb{R}^d} E[|J_t(y)|^2] < \infty$$

et provient de la théorie des flots stochastiques ([L.2],[M]).

La seconde affirme que si l'on choisit un entier K assez grand, on a, si t est assez petit :

(1.27) $$\sup_{y\in\mathbb{R}^d} E[f_1^2(y-\Psi_t^{-1}(y))] < Ct^{2p}.$$

En effet, $\phi_t^{-1}(y)$ se décompose d'après (1.5)' en la forme d'une variable aléatoire $M_t(y)$ et d'une variable $y+\int_o^t A_s ds$. De plus A_s est bornée, ceci implique que si t est assez petit :

(1.28) $$\sup_{y\in\mathbb{R}^d} E[f_1^2(y-\Psi_t^{-1}(y))] \leq P\{\sup_{s\leq t} |M_s(y)| \geq (K-2)S_\gamma\}.$$

De plus $M_t(y)$ est la variable terminale associée à une martingale $s \to M_s(y)$ à sauts bornées par S_γ. Et l'on a d'après (1.5)'

(1.29) $$\langle M_s(y), M_s(y)\rangle = \int_0^s du \int |u(\tilde{x}_u(x),z)|^2 g(-z)dz \leq ks.$$

On peut donc appliquer la proposition suivante qui généralise au cas des processus de sauts la majoration exponentielle habituellement utilisée pour les diffusions.

Proposition I.4 : Considérons une martingale M_t à valeurs dans $\mathbb{R}$, dont les sauts sont bornés par S et dont le crochet oblique $\langle M,M\rangle$ vérifie :

(1.30) $$\langle M,M\rangle_t \leq kt.$$

Il existe alors une constante $C(k,S)$ qui ne dépend que de k et de S tel que pour tout ≤ 1, on ait :

(1.31) $$P\{\sup_{0\leq s\leq t} |M_s| \geq pS\} \leq C(k,S)t^p.$$

Preuve : L'inégalité exponentielle de [L.M] implique que :

(1.32) $$P\{\sup_{0\leq s\leq t} |M_s| \geq C\} \leq 2 \exp[-\lambda C + \frac{\lambda^2}{2} S^2 kt(1+\exp[\lambda S])]$$

pour $C > 0$, $\lambda > 0$.

Il suffit de prendre $C = pS$ et $\lambda = \frac{\mathrm{Log}\,|t|}{S}$.

II. MINORATION DE LA DENSITE :

Considérons une fonction ϕ_ε de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ égale à 1 en dehors de la boule de xzbtre 0 et de rayon ε et égale à 0 sur la boule de centre 0 et de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$. De plus $0 \leq \phi_\varepsilon \leq 1$.

Considérons deux martingales à accroissements indépendants, indépendantes entre elles. L'une, notée $z_t(\varepsilon)$ a pour mesure de Lévy $\phi_\varepsilon(z)g(z)dz$, et l'autre, notée $z'_t(\varepsilon)$ a pour mesure de Lévy $(1-\phi_\varepsilon(z))g(z)dz$.

z_t a même loi que $z_t(\varepsilon)+z'_t(\varepsilon)$. Grâce à cette décomposition, on va pouvoir séparer dans $p_t(x,y)$ la contribution des grands sauts de z_t et celle des petits sauts de z_t.

Comme $z_t(\varepsilon)$ possède une mesure de Lévy de masse finie, les temps de sauts de $z_s(\varepsilon)$ constituent un processus de Poisson ponctuel $N_s(\varepsilon)$ de paramètre $\int \phi_\varepsilon(z)g(z)dz$.

A une trajectoire $s \to N_s(\varepsilon)$, $s \leq t$, on associe la subdivision S_t de $[0,t]$ correspondant aux temps de sauts $s_1 < s_2, \ldots < s_k$ de $N_s(\varepsilon)$ avant t. On définit ainsi une mesure $\tilde{P}_{t,\varepsilon}$ sur l'espace de toutes les subdivisions de $[0,t]$.

Considérons une infinité de variables aléatoires $X_i(\varepsilon)$ indépendantes de même loi $\dfrac{\phi_\varepsilon(z)g(z)dz}{\int\phi_\varepsilon(z)g(z)dz}$.

Fixons une subdivision S_t finie de $[0,t]$ et considérons la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$
\begin{aligned}
x_s(\varepsilon,S_t,x) &= x + \sum_{u\leq s}^{c} \gamma(x_{u-}(\varepsilon,S_t,x),\Delta z'(\varepsilon)) + \\
(2.1)\qquad &+ \sum_{s_i\in S_t\, s_i\leq s} \gamma(x_{s_{i-}}(\varepsilon,S_t,x),\Delta X_i(\varepsilon)) + \\
&+ \int_0^s X_0(x_u(\varepsilon,S_t,x))du - \int_0^s du \int\phi_\varepsilon(z)\gamma(x_u(\varepsilon,S_t,x),z)g(z)dz.
\end{aligned}
$$

Du fait de la condition (1.6), elle possède un flot stochastique $\Psi_s(\varepsilon,S_t,x)$, $0\leq S\leq t$.

On peut effectuer le calcul des varaitions stochastiques sur $\Psi_s(\varepsilon,S_t,x)$. Considérons donc la forme quadratique de Malliavin $K_t(\varepsilon,S_t,x)$ associée à $x_t(\varepsilon,S_t,x)$. Rappelons ([B.G.J]) que :

$$
\begin{aligned}
K_t(\varepsilon,S_t,x) &= \sum_{s\leq t} \nu(\Delta z'_s(\varepsilon)(\frac{\partial\Psi_s}{\partial x}(\varepsilon,S_t,x))^{-1}\frac{\partial\gamma}{\partial z}(x_{s-}(\varepsilon,S_t,x), \\
&\Delta z'_s(\varepsilon))\,{}^t\!\frac{\partial\gamma}{\partial z}(x_{s-}(\varepsilon,S_t,x),\Delta z'_s(\varepsilon))^t\,(\frac{\partial\Psi_s}{\partial s}(\varepsilon,S_t,x))^{-1} + \\
(2.2)\qquad &+ \sum_{s_i\in S_t} \nu(X_i(\varepsilon))(\frac{\partial\Psi_{s_i}}{\partial x}(\varepsilon,S_t,x))^{-1}\frac{\partial\gamma}{\partial z}(x_{s_{i-}}(\varepsilon,S_t,x)X_i(\varepsilon)), \\
&{}^t\frac{\partial\gamma}{\partial z}(x_{s_{i-}}(\varepsilon,S_t,x),X_i(\varepsilon))\}^t(\frac{\partial\Psi_{s_i}}{\partial x}(\varepsilon,S_t,x))^{-1}.
\end{aligned}
$$

Comme $K_t^{-1}(\varepsilon,S_t,x)$ existe et est dans tous les L^p, $x_t(\varepsilon,S_t,x)$ possède une densité $p_t(\varepsilon,S_t,x,y)$.

De plus, comme $z'_t(\varepsilon)$ et $z_t(\varepsilon)$ sont indépendants, on a :

$$
(2.3)\qquad p_t(x,y) = \int p_t(\varepsilon,S_t,x,y)\,d\tilde{P}_{t,\varepsilon}(S_t).
$$

On distingue trois cas :

- $z_s(\varepsilon)$ ne saute pas entre 0 et t
- $z_s(\varepsilon)$ saute une fois entre 0 et t
- $z_s(\varepsilon)$ saute au moins deux fois entre 0 et t.

On en déduit la décomposition de $p_t(x,y)$.

$$p_t(x,y) = p_t(0,\varepsilon,x,y) + p_t(1,\varepsilon,x,y) + p_t(2,\varepsilon,x,y) =$$

(2.4)
$$= \int_{\# S_t = 0} p_t(\varepsilon,S_t,x,y)\,d\tilde{P}_{t,\varepsilon}(S_t) + \int_{\# S_t = 1} p_t(\varepsilon,S_t,x,y)\,d\tilde{P}_{t,\varepsilon}(S_t) +$$

$$+ \int_{\# S_t \geqq 2} p_t(\varepsilon,S_t,x,y)\,d\tilde{P}_{t,\varepsilon}(S_t).$$

Pour obtenir la minoration désirée de $p_t(x,y)$, nous allons utiliser l'inégalité

(2.5)
$$p_t(x,y) \geqq p_t(1,\varepsilon,x,y)$$

qui découle de (2.4), toutefois il nous faudra auparavant choisir ε assez petit.

Il n'y a évidemment qu'une seule subdivision S_t de cardinal nul : notons-la $\emptyset$.

Considérons la solution de l'équation différentielle stochastique :

(2.5)
$$x_t(\varepsilon,\emptyset,x) = x + \sum_{u \leqq t}^{c} \gamma(x_{u-}(\varepsilon,\emptyset,x),\Delta z'_u(\varepsilon)) +$$

$$+ \int_0^t X_o(x_u(\varepsilon,\emptyset,x)) - \int_0^t du \int \phi_\varepsilon(z)\gamma(x_u(\varepsilon,\emptyset,x),z)g(z)dz.$$

Elle aussi possède du fait de (1.4) un flot stochastique noté $\Psi_t(\varepsilon,\emptyset,x)$. $x_t(\varepsilon,\emptyset,x)$ possède la densité $p_t(\varepsilon,\emptyset,x,y)$. Supposons que $S_t = \{s\}$.

Rappelons que le processus $x_u\{\varepsilon,\{s\},x\}$ a même loi sur $[0,s[$ que le processus $x_u\{\varepsilon,\emptyset,x\}$, en s il saute de $x_{s-}(\varepsilon,\emptyset,x)$ suivant la loi $g_\varepsilon(x_{s-}(\varepsilon,\emptyset,x),z)dz$ qui a été définie en (1.11), et après suit la même loi que $x_u(\varepsilon,\emptyset,x_s(\varepsilon,\{s\}))$. Il résulte de cela que l'on a la formule :

(2.6)
$$p_t(\varepsilon,\{s\},x,y) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} p_s(\varepsilon,\emptyset,x,z)g_\varepsilon(z,z')p_{t-s}(\varepsilon,\emptyset,z',y)\,dz\,dz'.$$

De plus, la loi de l'unique temps de saut de $N_s(\varepsilon)$ conditionnée par le fait que $N_t(\varepsilon) = 1$ est une loi uniforme sur $[0,t]$. Donc :

(2.7)
$$p_t(1,\varepsilon,x,y) = \frac{1}{t}\int_0^t p_t(\varepsilon,\{s\},x,y)ds\ t\int \phi_\varepsilon(z)g(z)dz$$

$$\exp\ [-t\int \phi_\varepsilon(z)g(z)dz]$$

et donc :

(2.7)'
$$p_t(1,\varepsilon,x,y) = \int \phi_\varepsilon(z)g(z)dz\ \ \exp\ [-t\int \phi_\varepsilon(z)g(z)dz]$$

$$\int_0^t p_t(\varepsilon,\{s\},x,y)ds.$$

Rappelons que $g(x,y)$ a été défini peu avant (1.13).

<u>Proposition II.1</u> : <u>Considérons un compact de</u> $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ <u>ne rencontrant pas la diagonale</u>. <u>Uniformément sur</u> K, <u>on a</u> :

(2.8) $$\varliminf_{t\to 0} \frac{p_t(x,y)}{t} \geq g(x,y)$$

si (1.8) est vérifiée et si $C\gamma$ est inversible.

Preuve :en vertu de (2.7)', il suffit de montrer que l'on peut choisir un ε assez petit pour que :

(2.9) $$\varliminf_{t\to 0} \operatorname*{Inf}_{s\in[0,t]} p_t(\varepsilon,\{s\},x,y) \geq \frac{g(x,y)}{\int \phi_\varepsilon(z)g(z)dz}.$$

Il résulte de (2.6) que :

(2.10) $$p_t(\varepsilon,\{s\},x,y) \geq \int_{|x-y|\leq\eta} \int_{|y-z'|\leq\eta} g_\varepsilon(z,z') \, p_s(\varepsilon,\emptyset,x,z)p_{t-s}(\varepsilon,\emptyset,x,z)dzdz'.$$

Fixons $\varepsilon_o > 0$.

Choisissons ε assez petit et de η assez petit pour que :

(2.11) $$g_\varepsilon(z,z') \geq \frac{g(x,y)-\varepsilon_o}{\int\phi_\varepsilon(z)g(z)dz}$$

dès que $|z'-y|\leq\eta$, $|z-x|\leq\eta$, $(x,y)\in K$. Ceci est possible en vertu de la continuité de g en dehors de la diagonale de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ et en vertu de (1.13).

(2.10) et (2.11) impliquent alors que :

(2.12) $$p_t(\varepsilon,\{s\},x,y) \geq \frac{g(x,y)-\varepsilon_o}{\int\phi_\varepsilon(z)g(z)dz} \cdot \int_{|z-x|<\eta} p_s(\varepsilon,\emptyset,x,z)dz. \cdot \int_{|y-z|\leq\eta} p_{t-s}(\varepsilon,\emptyset,z,y)dz.$$

Or :

(2.13) $$\lim_{t\to 0} \operatorname*{Inf}_{s\leq t,\ x\in\mathbb{R}^d} \int_{|z-x|\leq\eta} p_s(\varepsilon,\emptyset,x,z)dz = 1.$$

Car on a évidemment :

(2.14) $$\int_{|z-x|\leq\eta} p_s(\varepsilon,\emptyset,x,z)dz = P\{|x_s(\varepsilon,\emptyset,x)-x|\leq\eta\}.$$

De plus il résulte de (1.14) que :

(2.15) $$\lim_{t\to 0} \operatorname*{Inf}_{s\leq t,\ (x,y)\in K} \int_{|y-z|\leq\eta} p_{t-o}(\varepsilon,\emptyset,z,y)dz = 1.$$

(2.9) découle alors de (2.12), (2.14) et (2.15).

III. MAJORATION DE LA DENSITE :

Rappelons le principe de la méthode ; on distingue 3 cas :

- $z_s(\varepsilon)$ ne saute pas entre 0 et t,
- $z_s(\varepsilon)$ saute une fois entre 0 et t,
- $z_s(\varepsilon)$ saute au moins deux fois entre 0 et t.

On en déduit la décomposition de $p_t(x,y)$ en trois densités.

$$p_t(x,y) = p_t(0,\varepsilon,x,y) + p_t(1,\varepsilon,x,y) + p_t(2,\varepsilon,x,y). \tag{3.1}$$

Dans une première étape, nous montrerons que la contribution de $p_t(0,\varepsilon,x,y)$ et $p_t(2,\varepsilon,x,y)$ est négligeable devant t.

Première étape : Majoration de $p_t(0,\varepsilon,x,y)$

Reprenons les notations de la partie II. On a l'égalité :

$$p_t(0,\varepsilon,x,y) \leq p_t(\varepsilon,\emptyset,x,y). \tag{3.2}$$

Rappelons que $K_t(\varepsilon,\emptyset,x)$ est la forme quadratique définie par :

$$\begin{aligned} K_t(\varepsilon,\emptyset,x) = \sum_{s\leq t} \nu(\Delta z'_s(\varepsilon)) \left(\frac{\partial\Psi_s}{\partial x}(\varepsilon,\emptyset,x)\right)^{-1} \\ \frac{\partial\gamma}{\partial z}(x_{s-}(\varepsilon,\emptyset,x),\Delta z'_s(\varepsilon))\ {}^t\frac{\partial\gamma}{\partial z}(x_{s-}(\varepsilon,\emptyset,x),\Delta z'_s(\varepsilon))^t\left(\frac{\partial\Psi_s}{\partial x}(\varepsilon,\emptyset,x)\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Lemme III.1 : Pour tout $p>1$, il existe un entier $n(p)$ indépendant de ε tel que pour $t\leq 1$:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d,\ \varepsilon'>\varepsilon} E[|K_t^{-1}(\varepsilon,\emptyset,x)|^p] \leq C(\varepsilon)t^{-n(p)} \tag{3.4}$$

dès que (1.8) est vérifiée et dès que $C\gamma$ est inversible.

Preuve : Elle est très proche de celle que Bismut donne dans [B] p.200, 210 (on peut voir aussi [L.1] sur ce point).

Aussi n'en rappellerons-nous que les grandes lignes.

Considérons un vecteur f de norme 1 et un réel p positif ≥ 1.

D'après [I.W], Lemme 8.4, il suffit de montrer que :

$$\sup_{\|f\|=1,\ x\in\mathbb{R}^d,\ \varepsilon'>\varepsilon} E[|K_t(\varepsilon,\emptyset,x)(f)|^{-p}] \leq C(\varepsilon)t^{-n'(p)} \tag{3.5}$$

pour en déduire (3.4). Posons :

$$\tilde{K}_t(\varepsilon,\emptyset,x) = \sum_{s\leq t} \nu(\Delta z'_s(\varepsilon)) \frac{(\frac{\partial\Psi_s}{\partial x}(\varepsilon,\emptyset,x))^{-1}}{|(\frac{\partial\Psi_{s-}}{\partial x}(\varepsilon,\emptyset,x)^{-1}|}$$

(3.6) $$\frac{\partial\gamma}{\partial z}(x_{s-}(\varepsilon,\emptyset,x),\Delta z'_s(\varepsilon)) \ {}^t\frac{\partial\gamma}{\partial z}(x_{s-}(\varepsilon,\emptyset,x),\Delta z'_s(\varepsilon))$$

$$\frac{(\frac{\partial\Psi_s}{\partial x}(\varepsilon,\emptyset,x))^{-1}}{|{}^t(\frac{\partial\Psi_{s-}}{\partial x}(\varepsilon,\emptyset,x))^{-1}|}.$$

Comme :

(3.7) $$\sup_{x\in\mathbb{R}^d,\ \varepsilon\leq 1} E[\sup_{s\leq 1} |{}^t(\frac{\partial\Psi_s}{\partial x}(\varepsilon,\emptyset,x))^{-1}|^{-p}] < \infty,$$

il suffit pour montrer (3.5) de montrer que :

(3.5)' $$\sup_{\|f\|=1,\ x\in\mathbb{R}^d,\ \varepsilon'>\varepsilon} E[|\tilde{K}_t(\varepsilon',\emptyset,x)(f)|^{-p}] \leq C(\varepsilon)t^{-n'(p)}.$$

Notons $\Gamma(p)$ la fonction d'Euler. On a la relation fondamentale :

(3.8) $$E[|\tilde{K}_t(\varepsilon',\emptyset,x)(f)|^p] = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty r^{p-1} E[\exp[-r\tilde{K}_t(\varepsilon',\emptyset,x)(f)]]\,dr.$$

$s\to\tilde{K}_s(\varepsilon,\emptyset,x)(f)$ est un processus de sauts strictement croissant. Notons $d\tilde{\mu}(\varepsilon',\emptyset,f)(u)$ sa mesure de Lévy.

Le processus :

(3.9) $$t\to\exp[-r\tilde{K}_t(\varepsilon',\emptyset,x)(f)_t + \int_0^t ds \int(1-\exp[1-ru])d\tilde{\mu}_s(\varepsilon',\emptyset,x,f)(u)]$$

est une martingale de carré intégrale. On a donc :

(3.10) $$(E[|\tilde{K}_t(\varepsilon',\emptyset,x)(f)|^p] \leq \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty r^{p-1}[E[\exp[\int_0^t 2\,ds \int(\exp[\frac{-ru}{2}]-1)d\tilde{\mu}_s(\varepsilon',\emptyset,x,f)(u)]]]^{\frac{1}{2}}\,dr.$$

Or $\tilde{\mu}_s(\varepsilon',\emptyset,x,f)$ est la transformée de la mesure sur $\mathbb{R}^p$ $(1-\phi_\varepsilon(z))g(z)dz$ par l'application H de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ qui est donnée par :

$$z\to\nu(z)\ |{}^t\frac{\partial\gamma}{\partial z}(x_{s-}(\varepsilon',\emptyset,x),z)\ {}^t(I+\frac{\partial\gamma}{\partial x}(x_{s-}(\varepsilon',\emptyset,x),z))^{-1}$$

(3.11) $${}^t(\frac{\partial\Psi_{s-}}{\partial x}(\varepsilon',\emptyset,x))^{-1}f\,|^2 . \frac{1}{|{}^t(\frac{\partial\Psi_{s-}}{\partial x}(\varepsilon',\emptyset,x))^{-1}|^2}.$$

Or la mesure g(z)dz vérifie (1.8). $C\gamma$ est inversible, donc il est possible de trouver un réel $\beta \in]0,2[$ tel que :

(3.12) $$\underline{\lim}_{\eta \to 0} \operatorname*{Inf}_{t<0,\, x \in \mathbb{R}^d,\ \varepsilon<\varepsilon',\ \|f\|=1} \eta^{\beta} \tilde{\mu}_t(\varepsilon',\emptyset,x)\{[\eta,\infty[\} > C(\varepsilon) > 0.$$

Appliquons alors le théorème taubérien de [B], p.200-210.

On peut trouver un réel $\gamma' > 0$ tel que :

(3.13) $$\operatorname*{Sup}_{\|f\|=1,\ x\in\mathbb{R}^d,\ \varepsilon'>\varepsilon} E[|K_t(\varepsilon',\emptyset,x)(f)|^{-p}] \leq$$
$$\leq C_1(\varepsilon) + C_2(\varepsilon) \int_1^{\infty} r^{2p} \exp[-C_3(\varepsilon) t r^{\gamma'}]\, dr.$$

Il ne reste plus qu'à poser $tr^{\gamma'} = r'^{\gamma'}$ dans la dernière intégrale pour en déduire (3.7).

On a alors la proposition suivante :

Proposition III.2 : Supposons que $C\gamma$ est inversible et que g vérifie (1.8). Considérons un réel $p > 1$ et un réel η. Il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour $t \leq 1$ et pour $0 < \varepsilon' < \varepsilon$

(3.14) $$\operatorname*{Sup}_{|x-y| \geq \eta} p_t(0,\varepsilon',x,y) \leq C(\eta,\varepsilon') t^{p}.$$

Preuve : Elle est très proche de celle donnée dans [K.S] pour obtenir des majorations des densités des diffusions, en n'utilisant que le calcul de Malliavin. Toutefois une difficulté apparaît ici dans la majoration exponentielle, moins simple à utiliser que celle des diffusions.

Soit f une fonction C^{∞} à support compact de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, et soit un multi-indice (α). D'après le calcul de Malliavin sur les processus de sauts [B.G.J], on a la formule d'intégration par parties :

(3.15) $$E\left[\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}} f(x_t(\varepsilon',\emptyset,x))\right] = E[J_t^{(\alpha)}(\varepsilon',\emptyset,x) f(x_t(\varepsilon',\emptyset,x))],$$

$J_t^{(\alpha)}(\varepsilon',\emptyset,x)$ étant une "expression universelle" qui résulte du calcul des variations stochastiques.

De plus :

(3.16) $$J_t^{(\alpha)}(\varepsilon',\emptyset,x) = |K_t(\varepsilon',\emptyset,x)^{-1}|^{2|\alpha|} Q_t^{(\alpha)}(\varepsilon',\emptyset,x)$$

avec :

(3.17) $$\operatorname*{Sup}_{\varepsilon\leq 1,\ x\in\mathbb{R}^d,\ t\leq 1} E[|Q_t^{(\alpha)}(\varepsilon',\emptyset,x)|^{p}] < \infty.$$

Utilisons le lemme III.1. Il existe un entier N tel que pour $t \leqq 1$

(3.18) $$\sup_{\varepsilon<\varepsilon'<1,\ x\in\mathbf{R}^d} E[\,|J_t^{(\alpha)}(\varepsilon',\emptyset,x)|^p\,] < \frac{C(\varepsilon)}{t^N}.$$

N <u>ne dépend que de</u> p <u>et</u> (α), <u>et pas de</u> ε.

Fixons η et prenons un entier N' arbitraire. D'après la majoration exponentielle de [L.M], on peut trouver un réel $\varepsilon>0$ tel que pour $t<1$:

(3.19) $$\sup_{\varepsilon'<\varepsilon,\ x\in\mathbf{R}^d} P\{|x_t(\varepsilon',\emptyset,x)-x| \geqq \eta\} < Ct^{N'}.$$

Revenons à la formule d'intégration par partie (3.16) et à (3.18). Considérons une fonction C^∞ de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}$, à support compact, nulle en dehors de la boule de centre 0 et de rayon η. (3.19) implique alors que l'on peut choisir un ε tel qu'il existe une constante $C(\varepsilon'')$ telle que pour $0<\varepsilon'<\varepsilon$

(3.20) $$\sup_{x\in\mathbf{R}^d} E[\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}} f(x_t(\varepsilon',\emptyset,x)-x)] \leqq C(\varepsilon')t^p \,\|f\|_\infty$$

si $|(\alpha)| \leqq d$.

<u>Deuxième étape</u> : <u>Majoration de</u> $p_t(2,\varepsilon,x,y)$

<u>Proposition III.3</u> : <u>Supposons que</u> $C\gamma$ <u>est inversible et que</u> g <u>vérifie</u> (1.8). <u>Il existe un réel</u> $\varepsilon>0$ <u>tel que pour</u> $t<1$, <u>on ait</u> :

(3.21) $$\sup_{x\in\mathbf{R}^d,\ y\in\mathbf{R}^d} p_t(2,\varepsilon',x,y) \leqq C(\varepsilon')t^2$$

<u>dès que</u> $0<\varepsilon'<\varepsilon<1$.

<u>Preuve</u> : Rappelons que d'après (2.4), on a :

(3.22) $$\int_{\#S_t\geqq 2} p_t(\varepsilon',S_t,x,y)\,d\tilde{P}_{t,\varepsilon'}(S_t) = p_t(2,\varepsilon,x,y).$$

Il suffit alors de montrer que l'on peut trouver $\varepsilon>0$ tel que pour $0<\varepsilon'<\varepsilon$, on ait :

(3.23) $$\sup_{\#S_t\geqq 2,\ x\in\mathbf{R}^d,\ y\in\mathbf{R}^d} p_t(\varepsilon',S_t,x,y) \leqq C(\varepsilon') < \infty.$$

En effet :

(3.24) $$\tilde{P}_{t,\varepsilon'}\{\#S_t\geqq 2\} \leqq C(\varepsilon')t^2.$$

Considérons maintenant la forme quadratique de Malliavin $K_t(\varepsilon',S_t,x)$ associée à $x_t(\varepsilon',S_t,x)$. Si $\#S_t\geqq 2$,

$$K_t(\varepsilon',S_t,x) \geq \sum_{i=1}^{2} \nu(X_i(\varepsilon'))\left(\frac{\partial\Psi_{s_i}}{\partial x}(\varepsilon',S_t,x)\right)^{-1}$$

(3.25) $$\frac{\partial\gamma}{\partial z}(x_{s_{i-}}(\varepsilon',S_t,x),X_i(\varepsilon))$$

$$^t\frac{\partial\gamma}{\partial z}(x_{s_{i-}}(\varepsilon',S_t,x),X_i(\varepsilon))\left({}^t\frac{\partial\Psi_{s_i}}{\partial x}(\varepsilon',S_t,x)\right)^{-1},$$

ce que nous écrirons plus simplement :

(3.26) $$K_t(\varepsilon',S_t,x) \geq \tilde{K}_t(\varepsilon',S_t,x).$$

De plus ν est >0 et g est à support compact. Donc $\nu(X_i(\varepsilon')) > C(\varepsilon')$. Donc :

(3.27) $$\sup_{\# S_t \geq 2,\ x\in\mathbb{R}^d,\ t\leq 1} E[|\tilde{K}_t^{-1}(\varepsilon',S_t,x)|^p] \leq C(\varepsilon').$$

La démonstration est alors identique à celle du théorème III.2. Soit une fonction C^∞ à support compact de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. Notons-la f. Soit un multi-indice (α).

Il existe une fonctionnelle $J_t^{(\alpha)}(\varepsilon',S_t,x)$ "universelle" telle que :

(3.15)' $$E\left[\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}} f(x_t(\varepsilon',S_t,x))\right] + E[J_t^{(\alpha)}(\varepsilon',S_t,x) f(x_t(\varepsilon',S_t,x))] = 0.$$

De plus :

(3.16)' $$J_t^{(\alpha)}(\varepsilon',S_t,x) = |K_t^{-1}(\varepsilon',S_t,x)|^{2|\alpha|}\, Q^{(\alpha)}(\varepsilon',S_t,x)$$

avec :

(3.17)' $$\sup_{\# S_t \geq 2,\ \varepsilon'\leq\varepsilon,\ x\in\mathbb{R}^d,\ t\leq 1} E[|Q_t^{(\alpha)}(\varepsilon',S_t,x)|^p] < \infty.$$

D'après (3.26), (3.15)', (3.16)' et (3.17)' et (3.27), on a :

(3.20)' $$\sup_{\# S_t \geq 2,\ \varepsilon'\leq 1,\ x\in\mathbb{R}^d,\ t\leq 1} E\left[\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}} f(x_t(\varepsilon',S_t,x))\right] \leq C\|f\|_\infty$$

pour tout multi-indice (α) tel que $|\alpha| \leq d$. D'où (3.23).

<u>Troisième étape</u> : <u>Majoration de la densité</u> $p_t(1,\varepsilon,x,y)$

On réutilise les résultats et les notations de la partie II. Rappelons que :

(3.28) $$p_t(1,\varepsilon',x,y) = \int\phi_\varepsilon(z)g(z)dz \,.\, \exp[-t\int\phi_\varepsilon(z)g(z)dz] \,.\!\!:\, \int_0^t p_t(\varepsilon',\{s\},x,y)ds$$

et que :

$$p_t(\varepsilon',\{s\},x,y) = \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} p_s(\varepsilon',\emptyset,x,z)g^1_\varepsilon(z,z') \tag{3.29}$$
$$p_{t-s}(\varepsilon',\emptyset,z',y)dz\,dz'.$$

Soit un réel $\eta > 0$.
Décomposons $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ en $A_1(\eta) \cup A_2(\eta) \cup A_3(\eta) \cup A_4(\eta)$ avec :

$$\begin{aligned}
A_1(\eta) &= \{(z,z') \mid |x-z| \leqq \eta,\ |y-z| \leqq \eta\}\\
A_2(\eta) &= \{(z,z') \mid |x-z| \leqq \eta,\ |y-z'| > \eta\}\\
A_3(\eta) &= \{(z,z') \mid |x-z| > \eta,\ |y-z'| \leqq \eta\}\\
A_4(\eta) &= \{(z,z') \mid |x-z| > \eta,\ |y-z'| > \eta\}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

On déduit de (3.29) 4 intégrales notées $I_{i,t,\eta}(\varepsilon',\{s\},x,y)$.

<u>Lemme III.4</u> : <u>Considérons un compact</u> K <u>de</u> $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ <u>ne rencontrant pas la diagonale</u>, <u>et un réel</u> $\eta > 0$. <u>Il existe un réel</u> $\varepsilon > 0$ <u>tel que pour</u> $\varepsilon' < \varepsilon$ <u>et pour</u> $t \leqq 1$, <u>on ait</u> :

$$\sup_{s \leqq t\,(x,y)\in K} \sum_{i=2}^{4} I_{i,t,\eta}(\varepsilon',\{s\},x,y) \leqq C(\varepsilon',\eta)t^2. \tag{3.31}$$

<u>Preuve</u> : Rappelons que $g_{\varepsilon'}(z,z')$ est borné pas $C(\varepsilon')$.
On en déduit que :

$$I_{2,t,\eta}(\varepsilon',\{s\},x,y) + I_{4,t,\eta}(\varepsilon',\{s\},x,y) \leqq \tag{3.32}$$
$$\leqq C(\varepsilon')\int_{|z-y|>\eta} p_{t-s}(\varepsilon',\emptyset,z,y)dz \leqq C(\varepsilon',\eta)t^2$$

si ε' est assez petit par rapport à η, d'après la proposition (I.3).
On en déduit aussi que :

$$I_{3,t,\eta}(\varepsilon',\{s\},x,y) \leqq C(\varepsilon')P\{|x_s(\varepsilon,\emptyset,x) - x| \geqq \eta\} \tag{3.33}$$
$$\int_{|z-y|\leqq\eta} p_{t-s}(\varepsilon',\emptyset,z,y)dy.$$

Or la deuxième intégrale est bornée;d'après la majoration exponentielle,

$$P\{|x_s(\varepsilon',\emptyset,x) - x| > \eta\} \leqq C(\varepsilon',\eta)t^2 \tag{3.34}$$

si ε' est assez petit par rapport à η. D'où le lemme.
On peut en déduire maintenant le résultat suivant :

<u>Proposition III.5</u> : <u>Supposons que</u> $C\gamma$ <u>est inversible et que</u> g <u>vérifie</u> (1.8).
<u>Soit un compact</u> K <u>de</u> $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ <u>ne rencontrant pas la diagonale</u>.

Alors :

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \sup_{s\leq t(x,y)\in K} p_t(\varepsilon,\{s\},x,y) \leq \frac{g(x,y)}{\int \phi_\varepsilon(z)g(z)dz} \qquad (3.35)$$

si ε est assez petit.

Preuve : Soit $\varepsilon_o > 0$. Si on utilise le lemme précédent, il suffit de montrer que l'on peut choisir η assez petit et ε assez petit pour que uniformément sur K

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \sup_{s\leq t} p_t(\varepsilon,\{s\},x,y) \leq \frac{g(x,y)+\varepsilon_o}{\int \phi_\varepsilon(z)g(z)dz}. \qquad (3.36)$$

C'est exactement la même preuve que (2.9).

Nous pouvons maintenant donner la conclusion de cette partie :

Proposition III.6 : Supposons que $C\gamma$ est inversible et que g vérifie (1.8).

Alors uniformément sur K, on a :

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{p_t(x,y)}{t} \leq g(x,y). \qquad (3.37)$$

Preuve : D'après les propositions III.2 et III.3, on a si ε est assez petit :

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \sup_{(x,y)} \frac{p_t(0,\varepsilon,x,y)+p_t(2,\varepsilon,x,y)}{t} = 0. \qquad (3.38)$$

Par ailleurs il résulte de (3.35) et de (3.28) que :

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{p_t(0,\varepsilon,x,y)}{t} \leq g(x,y) \qquad (3.39)$$

uniformément sur K, si ε est assez petit.

APPENDICE : ETUDE DU FLOT RETOURNE

Considérons un processus à accroissements indépendants z_t à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Supposons qu'il soit la somme compensée de ses sauts, et, afin de simplifier, qu'il soit de carré intégrable. Notons $d\mu(z)$ sa mesure de Lévy ([J]). Supposons qu'elle soit à support compact dans $\mathbb{R}^p$.

Fixons $t_o > 0$.

Considérons le processus $z'_t = z_{t_o-t} - z_{t_o}$ défini pour $0 \leq t \leq t_o$. Puisque les trajectoires de z_t sont continues à droite et limitées à gauche, celles de z'_t sont continues à gauche et limitées à droite.

Régularisons les trajectoires de z'_t de façon à ce qu'elles soient continues à droite et limitées à gauche.

Notons $\tilde{z}_t$ le processus obtenu.

$\tilde{z}_t$ est la somme compensée de ses sauts, et est de carré intégrable. De plus sa mesure de Lévy $\tilde{\mu}$ construite à partir de sa filtration naturelle vérifie :

(A.1) $$\int f(z)d\tilde{\mu}(z) = \int f(-z)d\mu(z).$$

Introduisons une application C^∞ $\gamma(x,z)$ de source $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, dont les dérivées de tout ordre en $x \in \mathbb{R}^d$ et $z \in \operatorname{Supp}\mu$ sont bornées.

Notons H_z l'application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$

(A.2) $$x \to x + \gamma(x,z).$$

Supposons que z appartienne au support de μ.

Pour que H_z soit un difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, il suffit que l'on ait :

(A.3) $$\inf_{z \in \operatorname{Supp}\mu,\ x \in \mathbb{R}^d} \left|\det\left[I + \frac{\partial\gamma}{\partial x}(x,z)\right]\right| > 0.$$

$H_z(x)$ et $H_z^{-1}(x)$ dépendent de façon C^∞ de z et x.

Leurs dérivées de tout ordre sont bornées. De plus $H_o(x) = x$ et

(A.4) $$\frac{\partial}{\partial z} H_o(x) - \frac{\partial}{\partial z} H_o^{-1}(x) = 0.$$

Comme μ est une mesure de Lévy à support compact, il résulte de (A.4) que le champ de vecteur $\tilde{X}_o$ défini par :

(A.5) $$\tilde{X}_o(x) = \int (H_z(x) - H_z^{-1}(x))d\mu(z) - X_o(x)$$

est C^∞, de dérivées de tout ordre bornées.

De plus, posons si z est dans le support de $\tilde{\mu}$:

(A.6) $$\tilde{\gamma}(x,z) = H_{-z}^{-1}(x) - x.$$

$\tilde{\gamma}$ dépend de façon C^∞ de $x \in \mathbb{R}^d$ et $z \in \operatorname{Supp}\tilde{\mu}$. Elle se prolonge en une application C^∞ de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$. De plus les dérivées de tout ordre de $\tilde{\gamma}$ en $x \in \mathbb{R}^d$ et $z \in \operatorname{Supp}\tilde{\mu}$ sont bornées.

Enfin, si $\gamma(x,0) = 0$, on a aussi $\tilde{\gamma}(x,0) = 0$.

Introduisons les deux équations différentielles stochastiques :

(A.7) $$x_t(x) = x + \sum_{s \leq t}^{c} \gamma(x_{s^-}(x), \Delta z_s) + \int_o^t X_o(x_s(x))ds$$

(A.$\tilde{7}$) $$\tilde{x}_t(x) = x + \sum_{s \leq t}^{c} \tilde{\gamma}(\tilde{x}_{s^-}(x), \Delta\tilde{z}_s) + \int_o^t \tilde{X}_o(\tilde{x}_s(x))ds.$$

Comme γ vérifie (A.3), et comme X_o et γ ont des dérivées de tout ordre bornées, $x_t(x)$ possède un flot stochastique $\Psi_t(x)$, pour $t \leq t_o$.

De plus les dérivées de tout ordre de $\tilde{\gamma}$ en $x \in \mathbb{R}^d$, $z \in \operatorname{Supp}\tilde{\mu}$ sont bornées.

(A.~3)

$$\operatorname*{Inf}_{z \in \operatorname{Supp} \tilde{\mu},\ x \in \mathbb{R}^d} \left| \det \left[I + \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial x}(x,z) \right] \right| = \operatorname*{Inf}_{z \in \operatorname{Supp} \tilde{\mu},\ x \in \mathbb{R}^d} \left| \det \left[\frac{\partial H_z^{-1}}{\partial x}(x) \right] \right| > 0.$$

Enfin, les dérivées de tout ordre de $\tilde{X}_o$ sont bornées.

Donc (A.~7) possède un flot stochastique $\tilde{\Psi}_t(x)$ pour $t \leq 0$.

Théorème A.1 : Il existe un ensemble de probabilité 1 tel que pour tout x :

(A.8) $$\Psi_{t_o}(\tilde{\Psi}_{t_o}(x)) = \tilde{\Psi}_{t_o}(\Psi_{t_o}(x)) = x.$$

Preuve : Considérons un réel $\varepsilon > 0$. Introduisons le processus $z_s(\varepsilon)$ défini par :

(A.9) $$z_s(\varepsilon) = \sum_{u \leq s}^{c} 1_{[\varepsilon,\infty[}(|\Delta z_s|)\, \Delta z_s.$$

Introduisons le processus $\tilde{z}_s(\varepsilon)$ construit à partir de $z_s(\varepsilon)$ par le procédé donné au début de l'appendice. $\tilde{X}_o$ est transformé en $\tilde{X}_o(\varepsilon)$:

(A.10) $$\tilde{X}_o(\varepsilon) = \int_{|z| \geq \varepsilon} (H_z(x) - H_z^{-1}(x))\, d\mu(z) - X_o(x).$$

Considérons les équations (A.7)(ε) et (A.~7)(ε) correspondantes.

Elles possèdent des flots stochastiques $\Psi_t(\varepsilon,x)$ et $\tilde{\Psi}_t(\varepsilon,x)$.

De plus, il existe un ensemble de probabilité 1 tel que pour tout x, tout $t \leq t_o$, on ait :

(A.11) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \Psi_t(\varepsilon,x) = \Psi_t(x)$$

(A.12) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{\Psi}_t(\varepsilon,x) = \Psi_t(x).$$

Donc il suffit de montrer que :

(A.13) $$\Psi_{t_o}(\varepsilon, \tilde{\Psi}_{t_o}(\varepsilon,x) = \tilde{\Psi}_{t_o}(\varepsilon, \Psi_{t_o}(\varepsilon,x)) = x$$

pour montrer (A.8).

Or $z_s(\varepsilon)$ et $\tilde{z}_s(\varepsilon)$ ne possèdent qu'un nombre fini de sauts. On peut donc résoudre les équations (A.7)(ε) et (A.~7)(ε) trajectoires par trajectoires, pour en déduire (A.13), l'adjonction dans $\tilde{X}_o(\varepsilon)$ du terme intégré provenant des compensations.

BIBLIOGRAPHIE

[B] J.M. BISMUT : Calcul des variations stochastiques et processus de sauts. Z.W. 63 (147-235) (1983).

[B.G.J] K. BICHTELER - GRAVEREAUX - J. JACOD : Malliavin calculus for processes with jumps (à paraître).

[F.W] M.I. FREIDLIN - A.D. WENTZELL : Random perturbations of dynamical systems. Grund. Math. Wis. n°260 (1984) Berlin - Springer.

[I.W] N. IKEDA - S. WATANABE : Stochastic differential equations and diffusion processes - Amsterdam : North-Holland (1981).

[J] J. JACOD : Calcul stochastique et problème des martingales. Lecture Notes in Math. n°714 Berlin - Springer (1979).

[K.S] S. KUSUOKA - D.W. STROOCK : Applications of the Malliavin calculus, Part II (à paraître).

[L.1] R. LEANDRE : Thèse de 3ème cycle - Université de Besançon.

[L.2] R. LEANDRE : Flot d'une équation différentielle stochastique avec semi-martingale directrice discontinue. Séminaire de probabilités n° XIX (271-275), Lecture Notes in Math. n°1123 Berlin - Springer (1984).

[L.M] J.P. LEPELTIER - R. MARCHAL : Problèmes de martingales associées à un opérateur integro différentiel - Ann. I.H.P. B.12 43.103 (1976).

[M] P.A. MEYER : Flot d'une équation différentielle stochastique. Séminaire de Probabilités n° XV (103-117), Lecture Notes in Math. n°850 Berlin - Springer (1981).

[St] D.W. STROOCK : Some applications of stochastic calculus to partial differential equations in Ecole d'Eté de Saint-Flour pp. 267-382. Lecture Notes in Math. n°976 Berlin - Springer (1983).