MONIQUE PONTIER
JACQUES SZPIRGLAS

Convergence des approximations de McShane d'une diffusion sur une variété compacte

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 21 (1987), p. 534-543
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1987__21__534_0>

CONVERGENCE DES APPROXIMATIONS DE McSHANE D'UNE DIFFUSION SUR UNE VARIETE COMPACTE

Monique PONTIER
Département
Mathématiques & Informatique
Université d'Orléans
B.P. 6759
45067 ORLEANS Cédex 2

Jacques SZPIRGLAS
Institut National
des
Télécommunications
9, rue Charles Fourier
91011 EVRY CEDEX

On montre dans ce papier que les approximations au sens de McSHANE d'une diffusion à valeurs dans une variété riemannienne compacte convergent vers celle-ci en moyenne quadratique et uniformément en probabilité sur un intervalle de temps compact. On donne de plus l'ordre de grandeur de cette convergence, à savoir le pas de la discrétisation.

La motivation initiale de ce travail s'est trouvée dans l'étude du filtrage de processus observés sur une variété [12],[13] et plus particulièrement celle du filtrage approché, tel celui traité dans le cas vectoriel par de nombreux auteurs (par exemple [5] ou [9]).

Les deux références principales sont J.M. BISMUT [1] et K.D. ELWORTHY [4]. Curieusement, le caractère quadratique et l'ordre de grandeur de la convergence des approximations géodésiques de diffusions sur les variétés n'y figurent pas. Les raisons en sont sans doute multiples. Ces deux auteurs étaient avant tout intéressés par la convergence des flots, c'est-à-dire des solutions des équations différentielles associées aux conditions initiales. La méthode de BISMUT consiste à montrer que la famille des lois des approximations est tendue, et ne peut donc conduire à l'évaluation des ordres de grandeur de convergence. En revanche, la méthode d'ELWORTHY développée sur $\mathbb{R}^n$ conduit à la convergence quadratique et donne la vitesse de convergence à condition d'expliciter, à chaque étape du calcul, les bornes en fonction du pas de discrétisation.

Soit donc M une variété riemannienne compacte de classe C^3, de dimension n, et d la distance déduite de la structure riemannienne. On considère sur M (m+1) champs de vecteurs de classe C^2 : $X_o, X_1, \dots X_m$. Soit $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{F}}_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré satisfaisant aux conditions usuelles [3] sur lequel est défini un mouvement Brownien standard W à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. On considère alors les solutions, uniques au sens de l'unicité trajectorielle [7], des équations suivantes :

(1) $$dx_t = X_o(x_t)dt + X_j(x_t) \circ dW_t^j \; ; \; x(o) = x_o \; ;$$

(2) $$dx_t^h = (X_o(x_t^h) + X_j(x_t^h)\dot{W}_t^j)dt \; ; \; x^h(o) = x_o$$

où $j = 1\ldots n$, $t \in [0,T]$; h est le pas de discrétisation d'une partition de l'intervalle fini $[0,T]$: $t_o = 0, t_k = k\,h$, $t_N = T$, et $h.\dot{W}_t^j = (W_{t_{k+1}}^j - W_{t_k}^j) = \Delta W_k^j$ sur $I_k = [t_k, t_{k+1}[$. On note que l'entier N est de l'ordre T/h.
Pour simplifier l'écriture, on pose par convention $W_t^o = t$ et $\dot{W}_t^o = 1$.
Les équations (1) et (2) deviennent :

(3) $$dx_t = X_j(x_t) \circ dW_t^j \; , \; x(o) = x_o \; , \; j = 0\ldots.m$$

(4) $$dx_t^h = X_j(x_t^h)\,\dot{W}_t^j\,dt \; , \; x^h(o) = x_o \; , \; j = 0\ldots.m$$

L'équation (2) et (4) est une équation différentielle ordinaire : c'est l'approximation de Mc SHANE ([10] chap. VI.3).

Le résultat de ce papier est le suivant :

<u>Théorème 1</u> : <u>Soit</u> M <u>une variété riemannienne compacte de classe</u> C^3, d <u>la distance induite</u>, X_i, $i = 0,\ldots,m$, $(m+1)$ <u>champs de vecteurs sur</u> M <u>de classe</u> C^2 <u>et</u> W <u>un mouvement Brownien standard de</u> $\mathbb{R}^m$. <u>Alors les solutions des équations</u> (1) <u>et</u> (2) <u>vérifient</u> :

(5)
$$\sup_{0\le t\le T} E(d^2(x_t, x_t^h)) = O(h)$$
$$\forall \delta > 0, \; \mathbb{P}\,\{\sup_{0\le t\le T} d(x_t\,,\,x_t^h) > \delta\} = O(h)$$

(On note que, par définition, $O(h)$ est tel que $O(h)/h$ est borné quand h tend vers zéro).

La démonstration repose sur deux lemmes : le premier établit un résultat analogue à (5), mais sur $\mathbb{R}^p$, dans lequel est plongée la variété M grâce au théorème de WHITNEY [6] ; le second permet de comparer la distance d sur M à la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^p$.

Le théorème de Whitney donne l'existence d'un plongement de classe C^3, f, de M dans $\mathbb{R}^p$ $(p \le 2n+1)$; en particulier, f et sa différentielle $(f_*)_x$ pour tout x sont injectives. Le plongement f permet de transporter sur $\mathbb{R}^p$ les équations (1) et (2) de la façon suivante : $f_*(X_i)$ définit a priori un champ de vecteurs sur $f(M)$, compact de $\mathbb{R}^p$. D'après ([8] 1.p. 273), on peut étendre $f_*(X_i)$ en un champ Y_i, défini sur tout $\mathbb{R}^p$, de classe C^2 et à support compact. Les équations suivantes sont bien définies et admettent des solutions, uniques au sens de l'unicité trajectorielle :

(6) $$dY_t = Y_j(y_t) \circ dW_t^j \ , \ y_o = f(x_o) \ , \ j = 0\ldots m, \ t\in [0,T];$$

(7) $$dy_t^h = Y_j(y_t^h)\dot{W}_t^j \, dt, \ y_o^h = f(x_o) \ , \ j = 0\ldots m, \ t\in [0,T].$$

La variété M est compacte, donc les solutions de (1) et (2) n'explosent pas (voir par exemple [2a])et d'après [1] ou [4] :

(8) $$y_t = f(x_t) \text{ et } y_t^h = f(x_t^h) \ , \ t\in [0,T].$$

On montre pour les solutions de (6) et (7) sur $\mathbb{R}^p$ l'équivalent de la première partie de (5) :

Lemme 2. Soit sur $\mathbb{R}^p$ des champs (Y_j, $j = 0\ldots m$) de classe C^2 à support compact et W un mouvement brownien standard sur $\mathbb{R}^m$. Alors les solutions des équations (6) et (7) vérifient :

(9) $$\sup_{0\leq t\leq T} E \, \|y_t - y_t^h\|^2 = O(h)$$

Démonstration : C'est celle de ([4] p. 102 et sq) où l'on explicite les majorations de tous les termes. On pose :

(10) $$N(t) = \sup_{0\leq s\leq t} E \, \|y_s - y_s^h\|^2$$

On montre :

(11) $$N(t) \leq O(h) + K \int_0^{t} N(s)ds,$$

et le lemme de Gronwall permet de conclure.
Pour simplifier, on appelle u le processus y^h et on note pour tout k :

(12) $$y_k = y(t_k) \text{ et } u_k = y^h(t_k)$$

De manière générale, pour tout processus z on note $\bar{z}$ le processus étagé défini par :

(13) $$\bar{z}_s = z(t_k) \text{ si } s\in I_k.$$

Il est connu que si z est une diffusion à coefficients bornés son approximation étagée $\bar{z}$ vérifie :

(14) $$\int_0^T E \, \| z_s - \bar{z}_s\|^2 \, ds \quad \text{et} \quad \sup_{0\leq s\leq T} E \, \| z_s - \bar{z}_s\|^2 = O(h)$$

Dans un premier temps, on évalue la différence $(y_i - u_i)$. La formule de Taylor avec reste intégral permet d'exprimer :

(15) $$u_{i+1} - u_i = u'(t_i).h + \int_0^1 (1 - s) \, u''(t_i + sh)h^2 \, ds$$

De (7) on tire :

(16) $$u'(t_i).h = Y_j(u_i)\Delta W_i^j$$

(17) $$u''(t_i + sh) = Y_j(Y_\ell)(u(t_i + sh))\Delta W_i^j \,\Delta W_i^\ell/h^2 \;,\; s \in [\,0,1\,[\;,$$

d'où il vient :

(18) $$u_{i+1} - u_i = Y_j(u_i)\Delta W_i^j + \int_0^1 (1 - s)Y_j(Y_\ell)(u(t_i + sh))\Delta W_i^j\Delta W_i^\ell \, ds.$$

Par sommation sur i de O à k - 1, on obtient :

(19) $$u_k - f(x_o) = A_k + \sum_{i=0,k-1} Y_j(u_i)\Delta W_i^j + \frac{1}{2} Y_j(Y_\ell)(u_i)\Delta W_i^j\Delta W_i^\ell$$

avec

(20) $$A_k = \sum_{i=0,k-1} \Delta W_i^j\Delta W_i^\ell \int_0^1 (1-s)(Y_j(Y_\ell)(u(t_i + sh)) - Y_j(Y_\ell)(u_i))ds$$

L'équation (6) exprimée sous forme d'intégrale de Itô donne :

(21) $$y_k - f(x_o) = \int_0^{t_k} Y_j(y_s)dW_s^j + \frac{1}{2}\,\delta^{j\ell}\, Y_j(Y_\ell)(y_s)\, ds$$

avec $\delta^{j\ell} = 1$ si $j = \ell \neq 0$; O sinon.

Par différence de (19) et (21), on obtient :

(22) $$u_k - y_k = A_k + S_k + J_k + T_k$$

avec :

(23) $$S_k = \int_0^{t_k}((Y_j(\bar{y}_s) - Y_j(y_s))dW_s^j + \frac{1}{2}\,\delta^{j\ell}(Y_j(Y_\ell)(\bar{y}_s) - Y_j(Y_\ell)(y_s))ds)$$

(24) $$T_k = \sum_{i=0,k-1} \frac{1}{2} Y_j(Y_\ell)(u_i)(\Delta W_i^j\Delta W_i^\ell - \delta^{j\ell}h)$$

(25) $$J_k = \int_0^{t_k} ((Y_j(\bar{u}_s) - Y_j(\bar{y}_s))dW_s^j + \frac{1}{2}\,\delta^{j\ell}(Y_j(Y_\ell)(\bar{u}_s) - Y_j(Y_\ell)(\bar{y}_s))ds)$$

On remarque que l'expression T_k peut s'écrire sous forme d'intégrales de Itô :

(26) $$T_k = \frac{1}{2}\int_0^{t_k} Y_j(Y_\ell)(\bar{u}_s)(\Delta_s W^\ell dW_s^j + \Delta_s W^j dW_s^\ell)$$

où les processus $\Delta_s W^j$ sont définis sur I_i par $W_s^j - W_{t_i}^j$.

On majore chacun des termes en utilisant au mieux le caractère borné et lipschitzien des Y et Y(Y) et l'inégalité de Doob pour les termes martingales.

1. <u>Majoration de</u> A_k. On obtient en utilisant (20) et (7) :

(27) $$\|A_k\| \le K \sum_{i=0,k-1} |\Delta W_i^j| \, |\Delta W_i^\ell| \, \|u(t_i + sh) - u_i\| \le K \sum_{i=0,k-1} \|\Delta W_i\|^3 .$$

D'où l'on tire

(28) $$\sup_k \|A_k\|^2 \le K\, N \sum_{i=0,N-1} \|\Delta W_i\|^6$$

et par conséquent :

(29) $$E(\sup_k \|A_k\|^2) = O(h)$$

car $N \le T/h + 1$, et $E\,\|\Delta W_i\|^6 = O(h^3)$.

2. <u>Majoration de</u> S_k. Par l'inégalité de Doob d'une part et la propriété de Lipschitz des Y et Y(Y) on obtient :

(30) $$E\,(\sup_k \|S_k\|^2) \le K \int_0^T E\|y_s - \bar{y}_s\|^2\, ds$$

qui est un O(h) d'après (14).

3. <u>Majoration de</u> T_k. Elle se fait toujours par l'inégalité de Doob

(31) $$E(\sup_k \|T_k\|^2) \le K \int_0^T E\,\|\Delta_s W\|^2\, ds$$

Or, sur tout intervalle I_i, $E\|\Delta_s W\|^2 = m(s-t_i)$ dont l'intégrale sur $[0,T]$ est encore un O(h).

4. <u>Majoration de</u> J_k. Comme pour S_k il vient :

(32) $$E(\sup_{i \le k} \|J_i\|^2) \le K \int_0^t E\,\|\bar{u}_s - \bar{y}_s\|^2\, ds \qquad t \in I_k$$

Il est clair que pour tout s, $E\|\bar{u}_s - \bar{y}_s\|^2$ est majoré par N(s).

Donc, si l'on rassemble les quatre majorations, il vient :

(33) $$E(\sup_{i \le k} \|u_i - y_i\|^2) \le O(h) + K \int_0^t N(s)\, ds$$

On traite maintenant la différence $y_s - u_s$:

(34) $$\|y_s - u_s\|^2 \le 3(\|y_s - \bar{y}_s\|^2 + \|\bar{y}_s - \bar{u}_s\|^2 + \|\bar{u}_s - u_s\|^2)$$

Donc, si t est dans l'intervalle I_k, on obtient :

(35) $$N(t) \le 3(\sup_{s \le t} E\,\|y_s - \bar{y}_s\|^2) + E(\sup_{i \le k} \|y_i - u_i\|^2) + \sup_{s \le t} E\,\|\bar{u}_s - u_s\|^2)$$

Le troisième terme de cette majoration s'exprime à l'aide de l'équation de définition (7), si $s \in I_i$:

(36) $$\| u_s - \bar{u}_s \|^2 \leq a \| \Delta W_i \|^2$$

dont l'espérance est ah pour tout i. Le premier terme est un O(h) par (14) et avec (33) il vient :

(37) $$N(t) \leq O(h) + K \int_o^t N(s)ds$$

ce qui conclut la démonstration par le lemme de GRONWALL.

On obtiendra en corollaire l'analogue de la deuxième partie de (5) sur $\mathbb{R}^p$ à l'aide du lemme classique suivant :

<u>Lemme 3</u>. <u>Soit</u> z <u>une diffusion vectorielle solution de</u>

$$dz_t = \sigma(z_t)dW_t + b(z_t)dt, \ t \in [0,T], \ z_o = z.$$

<u>On suppose que</u> σ <u>et</u> b <u>sont bornés et que</u> σ <u>est lipschitzien</u> :

(38) $$\forall \delta > o \quad \mathbb{P}\{ \sup_{o \leq t \leq T} \| z_t - \bar{z}_t \| > \delta \} = O(h).$$

<u>Démonstration</u> : On explicite $z_t - \bar{z}_t$ quand $t \in I_k$:

(39) $$z_t - \bar{z}_t = \int_{kh}^t (\sigma(z_s) - \sigma(\bar{z}_s))dW_s + \sigma(z_{kh})(W_t - W_{kh}) + \int_{kh}^t b(z_s)ds$$

On utilise le caractère borné de σ et b pour obtenir :

(40) $$\| z_t - \bar{z}_t \|^2 \leq 3 \| \int_{kh}^t (\sigma(z_s) - \sigma(\bar{z}_s))dW_s \|^2 + K \| W_t - W_{kh} \|^2 + K'h^2$$

L'espérance du sup du premier terme du second membre de (40), noté B(t,k), est majoré par la somme en k :

(41) $$E(\sup_k \sup_{t \in I_k} B(t,k)) \leq \sum_{k=0,N} E(\sup_{t \in I_k} \| \int_{kh}^t (\sigma(z_s) - \sigma(\bar{z}_s))dW_s \|^2)$$

On applique l'inégalité de Doob à chaque terme, puis on utilise le caractère lipschitzien de σ , et on somme en k :

(42) $$E(\sup_k \sup_{t \in I_k} B(t,k)) \leq K \int_o^T E\| z_s - \bar{z}_s \|^2 ds$$

qui est un O(h) d'après (14).

Le deuxième terme n'est majoré qu'en probabilité :

(43) $$\mathbb{P}\{ \sup_{k, t \in I_k} \| W_t - W_{kh} \| > c \} \leq \sum_{k=0,N} \mathbb{P}\{ \sup_{t \in I_k} \| W_t - W_{kh} \| > c\}$$

Or, pour tout k, chacun de ces sup suit la loi de la fonction maximale $\|W_h^*\|$. La probabilité de l'évènement$\{\|W_h^*\| > c\}$ est majorée dans [2 b] en dimension 1, d'où l'on déduit facilement en dimension d :

(44) $$\mathbb{P}\{\|W_h^*\| > c\} \leq 4\, d \int_{c/\sqrt{d}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \exp(-u^2/2h)\,du$$

Dans l'intégrale majorante, on fait le changement de variables $u^2 = c^2 h/s$:

(45) $$\mathbb{P}\{\|W_h^*\| > c\} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, d\, c \int_0^{dh} s^{-3/2} \exp(-c^2/2s)\,ds$$

L'étude de l'intégrande montre qu'elle est croissante jusqu'en $s = 3/c^2$ qui dépasse dh dès que h est assez petit :

(46) $$\mathbb{P}\{\|W_h^*\| > c\} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, dc\,(dh)^{-1/2} \exp(-c^2/2dh)$$

En particulier, la somme (43) des N + 1 termes ($N \leq T/h + 1$) égaux à $\mathbb{P}\{\|W_h^*\| > c\}$ est un O(h) :

(47) $$\mathbb{P}\{\sup_{0\leq t\leq T} \|W_t - \bar{W}_t\| > c\} \leq O(h),$$

ce qui montre le lemme avec (40) et (42).

<u>Corollaire du lemme 2</u> : <u>Sous les hypothèses du lemme 2, on a</u> :

(48) $$\forall \delta > 0,\ \mathbb{P}\{\sup_{0\leq t\leq T} \|y_t - y_t^h\| > \delta\} = O(h).$$

<u>Démonstration</u>. Dans la majoration (34) on peut appliquer l'inégalité de Bienaymé Tchébichev, puis (33), (10) et (9) :

(49) $$\mathbb{P}\{\sup_{i\leq N} \|y_i - u_i\| > \delta/3\} = O(h)$$

On applique le lemme 3 au premier terme : y est bien une diffusion à coefficients bornés et lipschitziens :

(50) $$\mathbb{P}\{\sup_{0\leq t\leq T} \|y_t - \bar{y}_t\| > \delta/3\} = O(h).$$

On reprend (36) pour traiter le troisième terme qui est majoré par $\sup_k \|W_{(k+1)/h} - W_{kh}\|$, donc aussi par $\sup_t \|W_t - \bar{W}_t\|$ et (47) permet d'obtenir :

(51) $$\mathbb{P}\{\sup_{0\leq t\leq T} \|u_t - \bar{u}_t\| > \delta/3\} = O(h).$$

Les résultats du lemme 2 et de son corollaire pourront se transposer à la variété M grâce au lemme 4 qui établit que, sur f(M), la distance euclidienne et la distance induite par d sont équivalentes :

Lemme 4. Soit M une variété riemannienne compacte de classe C^3, d la distance déduite de la structure riemannienne ; f un plongement de classe C^3 de M dans $\mathbb{R}^p$. Alors il existe deux constantes C_1 et C_2 strictement positives telles que :

(52) $$\forall x, y \in M, \quad C_1 d(x,y) \leq \| f(x) - f(y) \| \leq C_2\, d(x,y)$$

Démonstration. Les inégalités (52) sont trivialement vérifiées quand x = y. On ne considèrera donc dans la suite que des couples (x,y) avec $x \neq y$. Soit par ailleurs a le "rayon d'injectivité" de la variété M que l'on peut grossièrement définir comme le plus grand réel tel que, pour tout x, $\exp_x^{-1}$ restreint à la boule B(x,a) est un difféomorphisme dans T_xM. On peut montrer (voir par exemple [8] 2 p. 96 et sq) que si M est compacte alors a est strictement positif.

Soit alors x fixé dans M ; le couple $(B(x,a), \exp_x^{-1})$ constitue une carte au voisinage de x ; on note $\tilde{f}$ la lecture de f et $\tilde{y}$ les coordonnées locales de y dans cette carte.

(53) $$\tilde{f} = f \circ \exp_x^{-1} \text{ et } \tilde{y} = \exp_x^{-1} y \;, \quad y \in B(x,a).$$

On déduit du fait que f est de classe C^3 à support compact que $\tilde{f}$ admet des dérivées secondes bornées. On lui applique la formule de Taylor-Mac Laurin.

(54) $$\| \tilde{f}(\tilde{y}) - \tilde{f}(0) - \tilde{y}.D\tilde{f}(0) \| \leq K \|\tilde{y}\|^2$$

Soit encore en utilisant (53) :

(55) $$\| \tilde{y}.D\tilde{f}(0) \| - K \|\tilde{y}\|^2 \leq \| f(y) - f(x) \| \leq \| \tilde{y}.D\tilde{f}(0) \| + K \|\tilde{y}\|^2$$

Par définition de l'exponentielle et de la distance d sur M, la norme de $\tilde{y}$ dans T_xM est exactement d(x,y) ; puisque $x \neq y$ on peut poser :

(56) $$G(x,y) = \|f(y) - f(x)\| \;/\; d(x,y)$$

et on obtient l'encadrement :

(57) $$\left\| \frac{\tilde{y}}{\|\tilde{y}\|} .D\tilde{f}(0) \right\| - K \|\tilde{y}\| \leq G(x,y) \leq \left\| \frac{\tilde{y}}{\|\tilde{y}\|} .D\tilde{f}(0) \right\| + K \|\tilde{y}\|$$

Le vecteur $\tilde{y} / \|\tilde{y}\|$ est un vecteur de norme 1 dans T_xM ; cette sphère unité de T_xM peut être engendrée par l'ensemble des u(e) où e est un vecteur unitaire fixe de $\mathbb{R}^n$ et u un repère orthonormé quelconque de T_xM. Par ailleurs, la différentielle $D\tilde{f}(0)$ est l'expression en coordonnées locales de la différentielle de f en x, $(f_*)_x$:

(58) $$\frac{\tilde{y}}{\|\tilde{y}\|}\cdot D\tilde{f}(0) = (f_*)_x(u(e))$$

On définit ainsi une application sur $O(M)$, fibré des repères orthonormés de M, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$:

(59) $$(x,u) \to (f_*)_x(u(e))$$

Cette application est continue sur $O(M)$, qui est compact comme M ; de plus, f étant un plongement, f_* est injective en tout point et $\|(f_*)_x(u(e))\|$ est encadré par des constantes strictement positives. Il existe donc ε dans $]0,a[$, K_1 et K_2 strictement positives, tels que :

(60) $$\forall x \text{ et } y \in M,\ x \neq y,\ d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow K_1 \leq G(x,y) \leq K_2$$

Le nombre ε étant maintenant fixé, on considère le sous-ensemble compact de $M \times M$:

(61) $$F = \{(x,y) \in M \times M \ / \ d(x,y) \geq \varepsilon\}$$

La fonction G est évidemment continue et strictement positive sur F ; il existe donc deux constantes K'_1 et K'_2 strictement positives telles que :

(62) $$\forall x \text{ et } y \in M,\ d(x,y) \geq \varepsilon \Rightarrow K'_1 \leq G(x,y) \leq K'_2$$

Les encadrements (60) et (62) montrent le lemme.

La démonstration du théorème 1 est alors simple :

Démonstration du théorème 1. Le lemme 4 montre

(63) $$\forall t \in [0,T] \qquad d(x_t, x_t^h) \leq c \ \|f(x_t) - f(x_t^h)\|$$

Le lemme 2 montre alors :

(64) $$\sup_{0 \leq t \leq T} E \ \| f(x_t) - f(x_t^h)\|^2 = \sup_{0 \leq t \leq T} E \ \|y_t - y_t^h\|^2 = O(h),$$

et son corollaire : $\forall\ \delta > 0$

(65) $$\mathbb{P}\{\sup_{0 \leq t \leq T} \| f(x_t) - f(x_t^h)\| > \delta\} = \mathbb{P}\{\sup_{0 \leq t \leq T} \| y_t - y_t^h\| > \delta\} = O(h)$$

ce qui, avec (63), montre les deux résultats du théorème.

On note en conclusion que ces approximations x^h de Mc Shane sont des polygones géodésiques dans le cas où les champs de vecteurs $(X_j, j = 0\ldots m)$ vérifient la condition pour tout i,j,k :

$$\frac{\partial X_j^i}{\partial x_k} + \Gamma_{k\ell}^i \ X_j^\ell = 0$$

En particulier, l'approximation géodésique du brownien ([1], [11]) vérifie ces hypothèses et donc admet les propriétés (5) sur une variété riemannienne compacte.

Que les Professeurs Elworthy et Baxendale soient ici remerciés des utiles suggestions qu'ils ont bien voulu nous faire.

REFERENCES

[1] J.M. BISMUT, "Mécanique aléatoire", L.N. in Math n° 866, Springer-Verlag, 1981.

[2 a] R.W.R. DARLING, "On the convergence of Gangolli Processes to Brownian Motion on a Manifolds", Stochastics 12, 277-301, 1984.

[2 b] R.W.R. DARLING, "Convergence of Martingales on Manifolds", Ann. I.H.P. 21, n° 3, 157-175, 1985.

[3] C. DELLACHERIE, P.A. MEYER, "Probabilités et potentiels", Hermann, Paris, 1975.

[4] K.D. ELWORTHY, "Stochastic Differential Equations on Manifolds", Cambridge University Press 1982.

[5] G.B. DIMASI, M. PRATELLI, W.J. RUNGGALDIER, "An Approximation for the Non Linear Filtering Problem with Error Bound", Stochastics 14, 247-271, 1985.

[6] M.W. HIRSCH, "Differential Topology", Graduate texts in Mathematics n° 33, Springer-Verlag, 1976.

[7] N. IKEDA, S. WATANABE, "Stochastic Differential Equations on Manifolds", North Holland, 1981.

[8] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU, "Fundations of Differential Geometry", vol. 1-2, Interscience, 1969.

[9] H. KOREZLIOGLU, G. MAZZIOTTO, "Modélisation et filtrage approché de systèmes stochastiques non linéaires", Note Technique CNET, 1983.

[10] E.J. Mc SHANE, "Stochastic Calculus and Stochastic Models", Academic Press, New-York, 1974.

[11] P. MALLIAVIN, "Formule de la moyenne, calcul de perturbation et théorèmes d'annulation pour les formes harmoniques", Journal of Functional Analysis 17, 274-291, 1974.

[12] M. PONTIER, J. SZPIRGLAS, "Filtrage non linéaire avec observations sur une variété", Stochastics 15, 121-148, 1985.

[13] M. PONTIER, J. SZPIRGLAS, "Filtering with observation on a Riemannian Symetric space", 3rd Bad Honnef Conference, L.N. in Control and I. Sc. N° 78, 316-329, 1985.