PAOLO BALDI
MIREILLE CHALEYAT-MAUREL

Sur l'équivalent du module de continuité des processus de diffusion

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 21 (1987), p. 404-427
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1987__21__404_0>

SUR L'EQUIVALENT DU MODULE DE CONTINUITE DES PROCESSUS DE DIFFUSION

P. Baldi, M. Chaleyat-Maurel

Le résultat classique suivant, sur le module de continuité des trajectoires du Mouvement Brownien réel, est dû à P. Lévy ([15], p. 168)

$$P\left\{ \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \sup_{\substack{|t-s|<\varepsilon \\ t,s\in[0,1]}} \frac{|B_t - B_s|}{\sqrt{2\varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}}} = 1 \right\} = 1$$

et ce n'est que très récemment que M. Csörgö et P. Revesz ont remarqué qu'on peut remplacer la $\overline{\lim}$ par une vraie limite.

Dans cet article, nous étudions l'extension de ce résultat aux processus de diffusion. Plus précisement, nous voulons déterminer l'équivalent en zéro du module de continuité des trajectoires d'un processus de diffusion sur une variété, évalué par rapport à une distance naturellement associée au processus.

Nous donnons un résultat précis pour les diffusions elliptiques et pour certaines diffusions hypoelliptiques, canoniquement liées à la structure des groupes nilpotents gradués. En particulier, notre résultat s'applique aux diffusions associées à l'opérateur de Laplace-Beltrami d'une variété riemannienne.

En toute généralité, nous prouvons que ce résultat est valable dès que l'on sait démontrer une estimation de type grandes déviations ((0.1) ci-dessous). Cette estimation mesure la probabilité qu'une diffusion dépendante d'un petit paramètre t, se trouve dans un ensemble dépendant du petit paramètre.

Dans le § 1 nous rappelons la notion de métrique de Carnot-Carathéodory associée à un processus de diffusion.

Nous démontrons dans le § 2 que le résultat est une conséquence de l'estimation suivante

$$(0.1) \qquad \lim_{t\to 0} \frac{1}{\log \frac{1}{t}} \log P^x\{d(x,X_t) \geqslant \eta\sqrt{2t \log \frac{1}{t}}\} = -\eta^2$$

pour tout $\eta>0$. Le preuve est calquée sur la démonstration originale de P.Lévy, telle qu'elle est exposée dans K.Ito et H.P.McKean [13] p. 36, avec l'amélioration de M. Csörgö et P. Revesz. Nous montrons qu'à l'aide de changements de temps et d'arguments de scaling, la preuve de (0.1) est immédiate pour le Mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^n$ ainsi que pour certaines diffusions invariantes hypoelliptiques sur les groupes de Lie nilpotents simplement connexes gradués.

Enfin dans le § 3 nous prouvons que (0.1) est vérifiée pour toute diffusion elliptique sur une variété. L'estimation (0.1) est obtenue grâce aux résultats de S. Molchanov [17] sur l'équivalent en temps petit de la densité de transition d'une diffusion elliptique sur une variété.

1. Métriques de Carnot-Carathéodory.

Soit M une variété C^1 de dimension finie et désignons par T_xM , T_x^*M les espaces tangent et cotangent en x à M.

Soit $x \to a_x$ un choix continu de formes quadratiques positives sur $T_x^* M$ et a_x^* la famille des formes quadratiques duales définie par

$$a_x^*(v) = \sup_{\xi \varepsilon T_x^* M : a_x(\xi) \leqslant 1} (\langle \xi, v \rangle)^2 \quad \text{pour tout} \quad x \varepsilon M \ , \ v \varepsilon T_x M$$

Si a_x n'est pas définie-positive, a_x^* peut prendre la valeur $+\infty$.

On définit alors une notion de longueur: si $\gamma:(\gamma(t)\,;\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$ est un chemin absolument continu joignant x à y en temps 1, sa longueur est donnée par:

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{a^*_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s))}\,ds$$

La distance associée sur M est la fonction $d : M \times M \to \overline{\mathbb{R}}$ telle que:

$$(1.1) \qquad d(x,y) = \inf_{\gamma \varepsilon A_{x,y}} \ell(\gamma)$$

où $A_{x,y}$ désigne l'ensemble de tous les chemins $\gamma:[0,1] \to M$, absolument continus et tels que $\gamma(0)=x$, $\gamma(1)=y$.

Ces métriques $(a_x^*)_{x \varepsilon M}$ ont été introduites par A. Bellaïche [3] et portent le nom de métriques de Carnot-Carathéodory (en abrégé métrique de C-C); d est sa distance (de C-C) associée. Lorsque les a_x sont définies positives, d est une distance riemannienne. (Pour ces questions on pourra consulter M. Gromov [12]).

Soit L un opérateur semi-elliptique du second ordre sur M qui s'écrit dans toute carte locale:

$$(1.2) \qquad L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Son symbole principal est défini dans toute carte locale par:

$$a_x(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \, \xi_j \quad , \qquad \xi \in T_x^* M$$

Si L est un opérateur semi-elliptique à coefficients localement lipschitziens, on associe à a_x par le procédé ci dessus une métrique de C-C $(a_x^*)_{x \in M}$. Si L est strictement elliptique, la métrique de C-C correspondante est riemannienne.

Si $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ est un processus de diffusion sur M de générateur différentiel L, la construction précédente fournit une distance naturellement associée à X. De nombreux auteurs (S. Varadhan [22], S. Molchanov [17], B. Gaveau [11], R. Azencott [1], J.M. Bismut [4], P. Baldi [2], R. Léandre [14], J. Zabczyk [23]) ont déjà remarqué que cette distance apparait souvent dans l'étude de la diffusion X (comportement de la densité de transition en temps petit, loi du logarithme itéré, stabilité,....).

Dans ces questions, il est naturel de considérer l'énergie d'un chemin γ de $A_{x,y}$:

$$I(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 a^*{}_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s))\,ds$$

et l'action $S : M \times M \to \overline{\mathbb{R}}$ associée, définie par:

$$(1.3) \qquad S(x,y) = \inf_{\gamma \in A_{x,y}} I(\gamma)$$

Nous aurons besoin du résultat suivant (dans le cas riemannien, on pourra consulter J. Milnor [16]).

Proposition 1.1.

$$S(x,y) = \frac{1}{2} d^2(x,y)$$

Preuve. L'inégalité de Schwarz donne $\frac{1}{2} \ell^2(\gamma) \leqslant I(\gamma)$ avec égalité seulement si $s \to a^*_{\gamma(s)}(\dot\gamma(s))$ est constante. Si $\ell(\gamma) = +\infty$, pour tout γ dans $A(x,y)$, il n'y a rien à prouver; sinon soit $t \to g(t)$ l'inverse continu à droite de la fonction croissante

$$c : t \to \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_0^t \sqrt{a^*_{\gamma(s)}(\dot\gamma(s))}\, ds$$

On a alors $c(g(t)) \equiv t$, $t \in [0,1]$ car c est continue. De plus g est différentiable presque partout et en tout point de différentiabilité s_0 on a

$$g'(s_0) \frac{1}{\ell(\gamma)} \sqrt{a^*{}_{\gamma(g(s_0))}(\dot\gamma(g(s_0))} = 1$$

Donc, si on prend $\psi = \gamma \circ g$, ψ est absolument continue et on a p.p

$$a^*_{\psi(t)}(\dot\psi(t)) = a^*_{\gamma(g(t))}(g'(t)\dot\gamma(g(t))) \equiv \ell(\gamma)^2$$

ce qui entraine $\ell(\gamma) = \ell(\psi)$ et, $t \to a^*_{\psi(t)}(\dot\psi(t))$ étant constante, $\frac{1}{2} \ell^2(\psi) = I(\psi)$.

Ceci prouve que, pour tout γ de $A_{x,y}$, il existe ψ dans $A_{x,y}$ tel que $\ell(\gamma) = \ell(\psi)$ avec $\ell(\psi) = \sqrt{2I(\psi)}$ d'où

$$d(x,y) \geqslant \sqrt{2S(x,y)}$$

ce qui termine la preuve.

2. Le module de continuité.

Sur une variété C^1, M de dimension finie, considérons un opérateur L comme dans (1.1). Nous ferons l'hypothèse suivante:

(H1) L est un opérateur semi-elliptique à coefficients localement lipschitziens.

Soit $(\Omega,(F_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace de probabilité usuel et $X = (X_t)_{t\geq 0}$ le processus de diffusion sur M associé à L (voir P. Priouret [19]). Notons que le temps de vie de X peut être fini.

Soit d la distance de C-C associée à L par le procédé décrit dans le paragraphe 1.

Pour tout fermé $F\subset M$, soit τ_F le temps de sortie de F et on pose pour tout $\varepsilon>0$

$$w^F(\varepsilon) = \sup_{\substack{|t-s|<\varepsilon \\ 0\leq s\leq t\leq 1\wedge\tau_F}} d(X_s,X_t)$$

w^F est donc le module de continuité des trajectoires de X mesuré par rapport à la distance d jusqu'à la sortie de F. (Nous écrirons w plutôt que w^M).

Dans ce paragraphe, nous allons prouver que si pour tout $\eta>0$, l'estimation cruciale (2.1) ci dessous est valable uniformément pour x variant dans un compact de M, alors la loi de Lévy est vraie (pour d).

$$(2.1) \qquad \lim_{t\to 0} \frac{1}{\log \frac{1}{t}} \log P^x\{d(x,X_t) \geqslant \eta\sqrt{2t \log \frac{1}{t}}\} = -\eta^2$$

Théorème 2.1. - *Sous l'hypothèse* (H1) *et si* (2.1) *est vérifiée uniformément pour* x *dans un compact* $K \subset M$, *alors:*

$$P^x\{\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{w^K(\varepsilon)}{\sqrt{2\varepsilon\log \frac{1}{\varepsilon}}} = 1\} = 1$$

pour tout $x \varepsilon \overset{\circ}{K}$.

Avant de donner la preuve du théorème 2.1, énonçons le résultat principal de ce paragraphe.

Corollaire 2.2. - *Sous l'hypothèse* (H1), *si* (2.1) *est vérifiée uniformément pour* x *dans tout compact de* M *et si le temps de vie de* X *est infini, on* a

$$P^x\{\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{w(\varepsilon)}{\sqrt{2\varepsilon\log \frac{1}{\varepsilon}}} = 1\} = 1$$

pour tout x *dans* M.

Preuve du Corollaire. - Soit $(K_n)_{n \varepsilon \mathbb{N}}$ une suite croissante de compacts telle que $\bigcup_n \overset{\circ}{K}_n = M$ et soient

$$\tilde{\Omega}_n = \{\omega \varepsilon \Omega : \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{w^{K_n}(\varepsilon)}{\sqrt{2\varepsilon\log \frac{1}{\varepsilon}}} = 1\}$$

$$\tilde{\Omega} = \{\omega \varepsilon \Omega : \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{w(\varepsilon)}{\sqrt{2\varepsilon\log \frac{1}{\varepsilon}}} = 1\}$$

alors, $\tilde{\Omega}_n \cap \{\tau_{K_n} > 1\} = \tilde{\Omega} \cap \{\tau_{K_n} > 1\}$. Le théorème 2.1 entraine que pour tout $x \in M$, $P^x(\tilde{\Omega}_n) = 1$, donc on a

$$P^x(\tilde{\Omega}) \geqslant P^x(\tau_{K_n} > 1)$$

Ce qui donne le résultat car $P^x(\tau_{K_n} > 1)$ croît vers 1.

Les deux lemmes suivants seront utiles pour la preuve du théorème 2.1. Pour simplifier les notations, on pose $\psi(\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}}$.

Lemma 2.3. - *Pour tout* δ, $0<\delta<1$, x *dans* $\mathring{K}$, $a>0$ *et* n *assez grand, si* $[x]$ *désigne la partie entière de* x

$$P^x\left\{\max_{k\leqslant an} \frac{d(X(\frac{k-1}{n}),X(\frac{k}{n}))}{\psi(\frac{1}{n})} \leqslant 1-\delta \ ,\ \tau_K \geqslant a\right\} \leqslant \left(1-\frac{1}{n^{(1-\frac{\delta}{2})^2}}\right)^{[an]}$$

Preuve. La propriété de Markov montre que pour tout $1 \leqslant m \leqslant [a\,n]$

$$\text{(2.2)} \qquad P^x\left\{\max_{k\leqslant m} \frac{d(X(\frac{k-1}{n}),X(\frac{k}{n}))}{\psi(\frac{1}{n})} \leqslant 1-\delta \ ,\ \tau_K \geqslant \frac{m}{n}\right\}$$

$$= E^x\left[\max_{k\leqslant m-1} d(X(\tfrac{k-1}{n}),X(\tfrac{k}{n})) \leqslant (1-\delta)\psi(\tfrac{1}{n}) \ ,\ \tau_K \geqslant \frac{m-1}{n} \ ;\right.$$

$$\left. P^{X(\frac{m-1}{n})}\left\{ d(X(0),X(\tfrac{1}{n})) \leqslant (1-\delta)\psi(\tfrac{1}{n}) \ ,\ \tau_K \geqslant \frac{1}{n}\right\}\right]$$

Grâce à (2.1), pour n assez grand,

$$P^y\{d(y,X(\tfrac{1}{n})) \leqslant (1-\delta)\psi(\tfrac{1}{n}), \tau_K \geqslant \tfrac{1}{n}\} \leqslant 1 - \exp[-(1-\tfrac{\delta}{2})^2 \log n]$$

uniformément pour y dans K. Le second membre de (2.2) est donc majoré par:

$$P^x\{ \max_{k\leqslant m-1} d(X(\frac{k-1}{n}),X(\frac{k}{n}))\leqslant(1-\delta)\psi(\frac{1}{n}),\tau_K\geqslant \frac{m-1}{n} \} \quad (1-n^{-(1-\frac{\delta}{2})^2})$$

ce qui, par récurrence sur m, donne le résultat.

Lemme 2.4. - *Soient* Φ, $\tilde{\Phi}$, *deux fonctions croissantes sur* $\mathbb{R}^+$ *et ne s'annulant qu'en* 0; *soit* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante de réels positifs tendant vers* 0. *Supposons qu'il existe deux constantes positives* A *et* B *telles que*

$$\underline{\lim}_n \frac{\tilde{\Phi}(a_{n+1})}{\tilde{\Phi}(a_n)} \geqslant A \qquad \text{et} \qquad \underline{\lim}_n \frac{\Phi(a_n)}{\tilde{\Phi}(a_n)} \geqslant B$$

On a alors: $\underline{\lim}_{t\to 0} \dfrac{\Phi(t)}{\tilde{\Phi}(t)} \geqslant AB$

Preuve. Si A ou B est nul, l'énoncé est évident. Sinon pour tout ε assez petit, soit n_0 tel que

$$\Phi(a_n) \geqslant (B-\varepsilon)\,\tilde{\Phi}(a_n) \qquad \text{et} \qquad \tilde{\Phi}(a_n) \geqslant (A-\varepsilon)\,\tilde{\Phi}(a_{n+1})$$

pour tout $n\geqslant n_0$.

Soit t tel que $0<t\leqslant a_{n_0}$ et supposons $a_{n+1}<t\leqslant a_n$; alors

$$\Phi(t)\geqslant\Phi(a_{n+1})\geqslant(B-\varepsilon)\tilde{\Phi}(a_{n+1})\geqslant(B-\varepsilon)\tilde{\Phi}(t)\,\frac{\tilde{\Phi}(a_{n+1})}{\tilde{\Phi}(a_n)} \geqslant (B-\varepsilon)(A-\varepsilon)\tilde{\Phi}(t)$$

ce qui, ε étant arbitraire, termine la preuve.

Démonstration du théorème 2.1.

a) Montrons que pour tout $\delta > 0$ et x dans K

$$(2.3) \qquad P^x\left\{ \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \frac{w^K(\varepsilon)}{\psi(\varepsilon)} \geq 1-\delta \right\} = 1$$

Le lemme 2.3 entraine facilement que pour tout $x \in \overset{\circ}{K}$, $a > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^x\left\{ \max_{k\leq an} \frac{d(X(\frac{k-1}{n}),X(\frac{k}{n}))}{\psi(\frac{1}{n})} \leq 1-\delta \quad , \quad \tau_k \geq a \right\} < +\infty$$

d'òu, à l'aide du lemme de Borel-Cantelli, P^x- p.s., ou bien $\tau_K<a$, ou bien il existe $N_0 = N_0(\omega)$ tel que, pour tout $n>N_0(\omega)$

$$(2.3)' \qquad \max_{k\leq an} \frac{d(X(\frac{k-1}{n}),X(\frac{k}{n}))}{\psi(\frac{1}{n})} > 1-\delta$$

En se limitant aux a rationnels on trouve que P^x-p.s. pour tout $a \in Q$ ou bien $\tau_K < a$ ou bien (2.3)' est vraie. Si $x \in \overset{\circ}{K}$ on a P^x-p.s. $\tau_K>0$. On peut donc choisir $a \in Q$ tel que $0<a\leq\tau_K$.

Enfin le lemme 2.4 appliqué avec $\phi(t) = w^K(t)$, $\tilde{\phi}(t) = \psi(t)$, $a_n = \frac{1}{n}$ (ce qui donne $A = B = 1$) entraine alors (2.3).

b) Montrons que pour $x \in K$,

$$(2.4) \qquad P^x\left\{ \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \frac{w^K(\varepsilon)}{\psi(\varepsilon)} \leq 1 \right\} = 1$$

On estime d'abord la quantité

$$(2.5)\qquad P^x\Big\{\max_{\substack{j=j_2-j_1\leqslant 2^{n\delta}\\ 0\leqslant j_1<j_2\leqslant 2^n}}\frac{d(X(j_1 2^{-n}),X(j_2 2^{-n}))}{\psi(j2^{-n})}\,1_{\{j_2 2^{-n}\leqslant\tau_K\}}>1+3\delta\Big\}$$

qui est majorée par:

$$(2.6)\qquad \sum_{\substack{j=j_2-j_1\leqslant 2^{n\delta}\\ 0\leqslant j_1<j_2\leqslant 2^n}} P^x\Big\{d(X(j_1 2^{-n}),X(j_2 2^{-n}))\,1_{\{j_2 2^{-n}\leqslant\tau_K\}}>(1+3\delta)\psi(j\,2^{-n})\Big\}$$

La propriété de Markov et l'estimation (2.1) entrainent que

$$P^x\Big\{d(X(j_1 2^{-n}),X(j_2 2^{-n}))\,1_{\{j_2 2^{-n}\leqslant\tau_K\}}>(1+3\delta)\psi(j2^{-n})\Big\}$$

$$= E^x\Big[1_{\{j_1 2^{-n}\leqslant\tau_k\}}\,P^{X(j_1 2^{-n})}\Big\{d(x,X(j2^{-n}))\,1_{\{j2^{-n}\leqslant\tau_K\}}>(1+3\delta)\psi(j2^{-n})\Big\}\Big]$$

$$\leqslant E^x\Big[1_{\{j_1 2^{-n}\leqslant\tau_K\}}\exp\big[-(1+2\delta)^2\log\frac{2^n}{j}\big]\Big]\leqslant \exp\big[-(1+2\delta)^2\log\frac{2^n}{j}\big]$$

La somme dans (2.6) est donc majorée par

$$2^n\,2^{n\delta}\exp\big[-(1+2\delta)^2\log\frac{2^n}{2^{n\delta}}\big]\leqslant$$

$$2^{n[1+\delta-(1+2\delta)^2+\delta(1+2\delta)^2]}\leqslant 2^{-n\delta}\quad\text{pour }\delta\text{ assez petit .}$$

La probabilité en (2.5) est donc sommable et par le lemme de Borel-Cantelli, pour ω en dehors d'un ensemble négligeable N, il existe $N_1=N_1(\omega)$ tel que

$$(2.7)\qquad d(X(j_1 2^{-n}),X(j_2 2^{-n}))\,1_{\{j_2 2^{-n}\leqslant\tau_K\}}\leqslant(1+3\delta)\psi(j2^{-n})$$

pour tout $\quad 0\leqslant j_1<j_2\leqslant 2^n \quad , \quad j=j_2-j_1\leqslant 2^{n\delta} \quad , \quad n\geqslant N_1$.

Démontrons enfin la propriété suivante

Pour tout $\omega \in N^C$, il existe $\bar{t}=\bar{t}(\omega)$ tel que si $0\leqslant t_1<t_2\leqslant 1\wedge\tau_K$ et $t=t_2-t_1<\bar{t}$, alors

$$d(X(t_2),X(t_1))\leqslant(1+11\delta)\psi(t) \tag{2.8}$$

ce qui terminera la preuve de (2.4).

On peut choisir N_1 assez grand pour que

$$2^{(N_1+1)\delta-1} > 2 \tag{2.9}$$

$$2^{-N_1(1-\delta)} < e^{-1} \tag{2.10}$$

$$\sum_{m\geqslant N_1} \psi(2^{-m}) < \delta\ \psi(2^{-(N_1+1)(1-\delta)}) \tag{2.11}$$

En effet, (2.9) et (2.10) sont évidentes alors que (2.11) découle des majorations suivantes

$$\sum_{m\geqslant n}\psi(2^{-m})=\psi(2^{-n})\sum_{m\geqslant 0}\sqrt{2^{-m}\frac{\log 2^{m+n}}{\log 2^n}} = \psi(2^{-n})\sum_{m\geqslant 0}\sqrt{2^{-m}\frac{m+n}{n}} \leqslant$$

$$\leqslant \psi(2^{-n})\sum_{m\geqslant 0}\sqrt{2^{m}(m+1)}\leqslant c\,\psi(2^{-n})\leqslant \delta\ \psi(2^{-(n+1)(1-\delta)})$$

pour n assez grand.

Fixons maintenant $\bar{t}=\bar{t}(\omega) = 2^{-N_1(\omega)(1-\delta)}$ et t_1,t_2 avec $0\leqslant t_1<t_2\leqslant 1\wedge\tau_K$, $t=t_2-t_1<\bar{t}$.

Soit $n>N_1(\omega)$ tel que

$$2^{-(n+1)(1-\delta)}\leqslant t<2^{-n(1-\delta)} \tag{2.12}$$

et considérons les développements:

$$t_1 = j_1\, 2^{-n} - 2^{-n_1} - 2^{-n_2} - \dots \qquad \dots > n_2 > n_1 > n$$

$$t_2 = j_2\, 2^{-n} + 2^{-m_1} + 2^{-m_2} + \dots \qquad \dots > m_2 > m_1 > n$$

(2.9) et (2.12) entrainent que

$$j = j_2 - j_1 = 2^n t - 2^{n-n_1} - 2^{n-n_2} - \dots - 2^{n-m_1} - 2^{n-m_2} - \dots$$

$$\geq 2^n 2^{-(n+1)(1-\delta)} - 2 = 2^{(n+1)\delta - 1} - 2 > 0$$

et grâce à (2.7) et (2.11), on a

$$d(X(t_1), X(j_1 2^{-n})) \leq \sum_{k=0}^{\infty} d(X(j_1 2^{-n} - 2^{-n_1} - \dots - 2^{-n_k}), X(j_1 2^{-n} - 2^{-n_1} - \dots - 2^{-n_{k+1}}))$$

$$\leq (1+3\delta) \sum_{k \geq n} \psi(2^{-k}) \leq (1+3\delta)\, \delta\psi(2^{-(n+1)(1-\delta)})$$

Donc

$$d(X(t_1), X(t_2)) \leq d(X(t_1), X(j_1 2^{-n})) + d(X(j_1 2^{-n}), X(j_2 2^{-n})) + d(X(j_2 2^{-n}), X(t_2))$$

$$\leq (1+3\delta) \left[2\delta\psi(2^{-(n+1)(1-\delta)}) + \psi(j 2^{-n})\right]$$

En utilisant le fait que $j2^{-n} \leq t$, $0 < t < \frac{1}{e}$ grâce à (2.10) et $2^{-(n+1)(1-\delta)} \leq t$ grâce à (2.12), la croissance de ψ sur $[0, \frac{1}{e}]$ entraine que

$$d(X(t_1), X(t_2)) \leq \psi(t)(1+3\delta)(2\delta+1) \leq (1+11\delta)\psi(t)$$

pour δ assez petit. Ceci prouve (2.4) et termine la preuve du théorème 2.1.

Montrons maintenant que (2.1) est vérifiée dans les deux cas suivants:

(i) Soit $M=\mathbb{R}^n$, X un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^n$; d est alors la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Par scaling et invariance par translation on obtient

$$P^x\{d(x,X_t)\geq\eta\sqrt{2t\log\frac{1}{t}}\}=P\{|Z|\geq\eta\sqrt{2\log\frac{1}{t}}\}$$

où Z est une variable $N(0,I)$ (I est la matrice identité de $\mathbb{R}^n$); ceci permet de vérifier facilement (2.1).

(ii) Ce genre d'argument s'applique également à une famille de diffusions hypoelliptiques que nous décrivons brièvement ci dessous. (Pour plus de détails on pourra consulter P. Baldi [2] § 4).

Une algèbre de Lie nilpotente $\mathcal{G}$ se dit graduée si elle admet la décomposition $\mathcal{G}=H_1\oplus\ldots\oplus H_h$, où les H_i sont des sous-espaces de $\mathcal{G}$ tels que, pour tout i,j $[H_i,H_j]\subset H_{i+j}$, avec la convention $H_\ell=\{0\}$ si $h<\ell$. Tout $g\in\mathcal{G}$ peut se décomposer de façon unique en

$$g=\sum g_i \qquad \text{où} \qquad g_i\in H_i$$

et pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ la transformation linéaire (dilatation)

$$D_\alpha g=\sum\alpha^i g_i$$

est un endomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$.

Soit G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe; on peut l'identifier à son algèbre de Lie $\mathcal{G}$ à l'aide de l'application exponentielle et le produit dans G est lié au crochet dans $\mathcal{G}$ par la formule de Campbell-Hausdorff

$$g\cdot h=g+h+\frac{1}{2}[g,h]+\ldots$$

On dira que G est gradué si $\mathcal{G}$ l'est; dans ce cas les dilatations D_α sont des automorphismes de G.

Soient $v_0, v_1, \ldots, v_r$, $r+1$ vecteurs de $\mathcal{G}$ et $V_0, V_1, \ldots, V_r$ les champs de vecteurs invariants à gauche correspondants. On considère sur G l'opérateur différentiel

$$L = V_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} V_i^2 \tag{2.13}$$

On peut montrer que la diffusion X associée à un opérateur L sur G est invariante à gauche pour l'action du groupe si et seulement si L est de la forme (2.13). On dit que la diffusion X est principale si $V_0=0$ et si $V_1, \ldots, V_r$ sont dans H_1. X est hypoelliptique si $V_1, \ldots, V_r$ engendrent H_1.

Il est facile de voir que si X est une diffusion principale, $D_\alpha X_t$ est équivalent en loi à $X_{t\alpha^2}$ sous P^0 (0 désigne l'élément neutre de G dans son identification avec $\mathcal{G}$).

Si d désigne la distance de C-C associée à une diffusion principale hypoelliptique (d est alors finie partout grâce au théorème de H. Sussmann [21]) on a les relations

$$d(x,y) = d(g\cdot x \ , \ g\cdot y) \quad \text{pour tout} \quad g \in G$$

$$d(D_\alpha x \ , \ D_\alpha y) = \alpha d(x,y)$$

De ces propriétés, on déduit que (2.1) est vérifiée pour toute diffusion principale hypoelliptique, uniformément en x. En effet,

$$P^x\left\{ d(x,X_t) \geqslant \eta \sqrt{2t \log \frac{1}{t}} \right\} = P^0\left\{ d(0,X_t) \geqslant \eta \sqrt{2t \log \frac{1}{t}} \right\} = \tag{2.14}$$

$$= P^0\left\{ (2t \log \frac{1}{t})^{-1/2} d(0,X_t) \geqslant \eta \right\}$$

$$= P^0\left\{ d(0, D_{(2t\log\frac{1}{t})^{-1/2}} X_t) \geq \eta \right\} = P^0\left\{ d(0, X_{(2\log\frac{1}{t})^{-1}}) \geq \eta \right\}$$

Or, une estimation standard sur les diffusions hypoelliptiques (R. Azencott [1] p. 160 corollaire 6.5) jointe à la proposition 1.1 donne

$$\lim_{s\to 0} s \log P^0\left\{ d(0,X_s) \geq \eta \right\} = -\frac{1}{2}\ \eta^2 \tag{2.15}$$

ce qui, avec (2.14) permet de déduire (2.1).

Les deux exemples ci-dessus montrent qu'il est facile de prouver (2.1) quand, par scaling et invariance par translation, on peut se ramener à des expressions analogues à (2.15) que l'on sait traiter par la théorie des grandes déviations. Dans le prochain paragraphe on obtiendra (2.1) dans le cas où les diffusions considérées ne jouissent pas de ces propriétés d'invariance.

3. Les diffusions elliptiques sur les variétés.

Dans ce paragraphe, nous établissons l'estimation (2.1) pour les diffusions elliptiques sur une variété. Comme nous l'avons déjà remarqué, (2.1) est une estimation de grandes déviations pour un ensemble dépendant d'un petit paramètre et, pour les diffusions elliptiques, peut être obtenue en raffinant les méthodes usuelles (c'est à dire pour un ensemble fixe) telles qu'elles sont exposées dans R. Azencott [1] et P. Priouret [20]. Nous allons montrer comment déduire plus rapidement cette estimation des résultats, beaucoup plus fins, de S. Molchanov [17] sur l'équivalent en temps petit de la densité de transition d'une diffusion elliptique sur une variété.

Soit M une variété de dimension m, X_t une diffusion sur M de générateur L. Nous ferons les hypothèses suivantes

(A1) M est de classe C^5.

(A2) L est elliptique et ses coefficients sont C^4.

Soit d la distance riemannienne sur M associée à L comme on l'a vu au paragraphe 1 et soit π le volume riemannien correspondant. Soit $p(t,x,y)$ la densité de transition de X_t par rapport à π. Le théorème suivant est dû à S. Molchanov ([17] § 2) (voir aussi L. Elie [7] théorème 1.1).

Théorème 3.1. - *Pour tout compact* K *de* M, *il existe* $\delta>0$ *tel que si on note* $K_\delta = \{(x,y)\in K\times K\ ,\ d(x,y)\leqslant\delta\}$, *alors, on a, uniformément pour* $(x,y)\in K_\delta$, t *tendant vers zéro,*

$$p(t,x,y) \sim (2\pi t)^{-m/2}\, \overline{H}(x,y)\, \exp\left[-\frac{d^2(x,y)}{2t}\right]$$

où $\overline{H}$ *est une fonction sur* K *telle que,*

$$0<H_1\leqslant\overline{H}(x,y)\leqslant H_2<+\infty \quad \textit{pour tout} \quad (x,y)\in K_\delta$$

Le résultat principal de ce paragraphe s'énonce ainsi

Théorème 3.2. - *Sous les hypothèses* (A1) *et* (A2) , *pour tout compact* K *de* M, *on a*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{\log\frac{1}{t}} \log P^x\left\{d(x,X_t)\geqslant\eta\sqrt{2t\log\frac{1}{t}}\right\} = -\eta^2$$

uniformément pour x *dans* K.

Preuve. On pose toujours $\psi(t) = \sqrt{2t \log \frac{1}{t}}$.

a) Minoration: Soit $x \in K$.

On a pour tout $\varepsilon>0$, $c\geqslant 1$, grâce au théorème 3.1, pour t assez petit (tel que $c\eta\psi(t)\leqslant\delta$)

$$P^x\{d(x,X_t)\geqslant\eta\psi(t)\} = \int_{d(x,y)\geqslant\eta\psi(t)} p(t,x,y)\,\pi(dy) \geqslant$$

$$\geqslant \int_{\eta\psi(t)\leqslant d(x,y)\leqslant c\eta\psi(t)} p(t,x,y)\,\pi(dy) \geqslant$$

$$\geqslant (1-\varepsilon)H_1(2\pi t)^{-m/2} \int_{\eta\psi(t)\leqslant d(x,y)\leqslant c\eta\psi(t)} \exp-\frac{d^2(x,y)}{2t}\,\pi(dy)$$

Posons $V(c,\eta,t) = \{y:\eta\psi(t)\leqslant d(x,y)\leqslant c\,\eta\,\psi(t)\}$

On a donc

$$(3.1) \qquad P^x\{d(x,X_t)\geqslant\eta\psi(t)\} \geqslant (1-\varepsilon)H_1 \exp\left[-\frac{c^2\eta^2\psi(t)^2}{2t}\right](2\pi t)^{-m/2}\pi(V(c,\eta,t))$$

L'estimation du volume riemannien d'une couronne sphérique dont le rayon tend vers zéro donne

$$\pi(V(c,\eta,t)) \sim (c^m-1)\eta^m\psi^m(t)\ \Sigma_m$$

Σ_m étant le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^m$; donc

$$\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\log P^x\{d(x,X_t)\geqslant\eta\psi(t)\} \geqslant \frac{C_1}{\log\frac{1}{t}} - c^2\eta^2$$

$$+ \frac{1}{\log\frac{1}{t}}\log\left[\log\frac{1}{t}\right]^{m/2}$$

D'où, $c\geqslant 1$ étant arbitraire,

$$(3.2) \qquad \underline{\lim}_{t\to 0} \frac{1}{\log \frac{1}{t}} \log P^x\{d(x,X_t) \geq \eta\psi(t)\} \geq -\eta^2$$

b) Majoration: Soit $x \in K$.

On prend δ comme dans le théorème 3.1. Soit alors τ le temps de sortie du processus X_t de la boule B de centre x et de rayon $\frac{\delta}{2}$

$$P^x\{d(x,X_t) \geq \eta\psi(t)\} \leq P^x\{d(x,X_t) \geq \eta\psi(t), \tau > t\} + P^x\{\tau \leq t\}$$

Des estimations de grandes déviations classiques (R. Azencott [1] p. 160) donnent:

$$\log P^x\{\tau \leq t\} \sim -\frac{d^2(x,\partial B)}{2t} = -\frac{\delta^2}{8t}$$

Donc

$$\overline{\lim}_{t\to 0} \frac{1}{\log \frac{1}{t}} \log P^x\{\tau \leq t\} = -\infty$$

D'autre part,

$$A = P^x\{d(x,X_t) \geq \eta\psi(t), \tau > t\} = \int_{y\in B, \eta\psi(t) \leq d(x,y)} \tilde{p}(t,x,y)\,\pi(dy)$$

où $\tilde{p}(t,x,y)$ est la densité de transition de la diffusion X arrêtée à la sortie de B; on a $\tilde{p}(t,x,y) \leq p(t,x,y)$.

Donc

$$P^x\{d(x,X_t) \geq \eta\psi(t), \tau > t\} \leq \int_{y\in B, \eta\psi(t) \leq d(x,y)} p(t,x,y)\,\pi(dy)$$

$$\leq \int_{y\in B, d(x,y) > c\eta\psi(t)} p(t,x,y)\,\pi(dy) + \int_{V(c,\eta,t)} p(t,x,y)\,\pi(dy)$$

avec $c \geq 1$.

Le théorème 3.1 entraine alors pour t tendant vers zéro:

$$A \leqslant (1+\varepsilon)(2\pi)^{-m/2} H_2 \exp\left[-\frac{c^2\eta^2\psi^2(t)}{2t}\right] t^{-m/2} \pi(B) +$$

$$+(1+\varepsilon)(2\pi)^{-m/2} H_2 \exp\left[-\frac{\eta^2\psi^2(t)}{2t}\right] \pi(V(c,\eta,t))$$

$$= I_1(t)+I_2(t) .$$

Or

$$\frac{1}{\log\frac{1}{t}} \log I_1(t) \leqslant \frac{C_2}{\log\frac{1}{t}} - c^2\eta^2 + \frac{m}{2}$$

Donc

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{1}{\log\frac{1}{t}} \log I_1(t) \leqslant - c^2\eta^2 + \frac{m}{2} \tag{3.4}$$

De plus,

$$\frac{1}{\log\frac{1}{t}} \log I_2(t) \leqslant \frac{C_3}{\log\frac{1}{t}} - \eta^2 + \frac{1}{\log\frac{1}{t}} \log\left[\log\frac{1}{t}\right]^{m/2}$$

Donc,

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{1}{\log\frac{1}{t}} \log I_2(t) \leqslant - \eta^2 \tag{3.5}$$

Compte tenu de (3.5), (3.4), on a

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{1}{\log\frac{1}{t}} \log P^x\{d(x,X_t) \geqslant \eta\psi(t)\} \leqslant \max\left(-\eta^2, \frac{m}{2} - c^2\eta^2\right)$$

Il suffit alors de choisir c assez grand pour obtenir avec (3.2) l'estimation cherchée pour x dans K, uniformément pour B. Un raisonnement classique de compacité donne l'uniformité sur K.

Remarque.

La méthode utilisée dans la preuve du Théorème 3.2 est en réalité applicable aussi dans certains cas hypoelliptiques (J.M. Bismut [4]) pour lesquels les équivalents du Théorème 3.1 sont aussi vrais.

Remarquons aussi que pour obtenir (2.1) on n'a pas réellement besoin d'un développement aussi précis. Une analyse plus attentive de la preuve du Théorème 3.2 montre qu'un encadrement de la forme

$$(3.6) \qquad \frac{C_1}{t^A} \exp\left[- \frac{d^2(x,y)}{2t}\right] \leqslant p(t,x,y) \leqslant \frac{C_2}{t^B} \exp\left[- \frac{d^2(x,y)}{2t}\right]$$

est suffisant pour obtenir (2.1) (ici les exposants A et B pourraient même dépendre des points x, y, à condition d'être localement bornés et minorés par $m/2$). Jusqu'à maintenant seul le résultat plus faible suivant a été démontré (S. Kusuoka-D. Strook [24], D.S. Jerison-A.Sanchez-Calle [25])

$$(3.7) \qquad \frac{C_1}{t^A} \exp\left[-k_1 \frac{d^2(x,y)}{2t}\right] \leqslant p(t,x,y) \leqslant \frac{C_2}{t^B} \exp\left[- k_2 \frac{d^2(x,y)}{2t}\right]$$

avec $k_1 \geqslant 1 \geqslant k_2$. Notons néammoins que la technique introduite dans ce papier permet de déduire de (3.7) les estimations

$$\underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{w(\varepsilon)}{\psi(\varepsilon)} \geqslant k_2 \qquad \overline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{w(\varepsilon)}{\psi(\varepsilon)} \leqslant k_1 \qquad P - p.s.$$

Ce remarques amènent à conjecturer que la loi de Lévy, telle qu'elle est énoncée dans le Théorème 2.1,est vraie au moins dans le cas d'une diffusion hypoelliptique

Remarque.

Récemment, A. de Acosta [6] et C. Mueller [18] ont prouvé une forme fonctionnelle de la loi de Lévy pour le mouvement brownien, et en relation avec la loi fonctionnelle du logarithme itéré. Il serait intéressant d'explorer ce problème dans le cas des diffusions à la lumière du travail de P. Baldi [2].

Remerciements.

Les auteurs tiennent à remercier A.S. Sznitman pour les nombreuses conversation qu'ils ont eues avec lui, ainsi que J.- F.Le Gall qui a corrigé plusieurs erreurs de la première version.

BIBLIOGRAPHIE

1 AZENCOTT R. Grandes déviations et applications. - dans: Ecole d'été de Probabilités de St.Flour VIII-1978, Lect. Notes Math. 774, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1980.

2 BALDI P. Large Deviations and Functional Iterated Logarithm Law for Diffusion Processes - Z.Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 71, 435-453 (1986).

3 BELLAICHE A. Métriques de Carnot-Carathéodory - Séminaire Arthur Besse 1982-1983.

4 BISMUT J.-M. Large Deviations and Malliavin Calculus. - Progress in Math. 45, Birkhäuser, Boston 1984.

5 CSORGO M., REVESZ P. Strong Approximation in Probability and Statistics - Academic Press, New York 1981.

6 DE ACOSTA A. On the functional form of Levy's Modulus of Continuity for Brownian Motion. - Z.Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 69, 567-569 (1985).

7 ELIE L. Equivalent de la densité d'une diffusion en temps petit. Cas des points proches. - dans Géodésiques et diffusions en temps petit. Astérisque 84-85, 55-72 (1981).

8 FREIDLIN M.I., WENTZELL A.D. On small Random Perturbations of Dynamical Systems. - Russ.Math.Surveys 25, 1-55 (1970).

9 FREIDLIN M.I., WENTZELL A.D. Some problems concerning Stability under Small Random Perturbations - Th.Probab. Appl. 17, 269-283 (1972).

10 FREIDLIN M.I., WENTZELL A.D. Random Perturbations of Dynamical Systems - Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1984.

11 GAVEAU B. Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous-elliptiques sur certains groupes nilpotents. - Acta Math. 139, 95-159 (1977).

12 GROMOV M. Structures métriques sur les variétés Riemanniennes. - Cedic, Paris 1981.

13 ITO K., MCKEAN H.P. Diffusion Processes and their Sample Paths. - Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1965.

14 LEANDRE R. Estimation en temps petit de la densité d'une diffusion hypoelliptique. - C.R.Acad.Sc.Paris 301, 801-804 (1985).

15 LEVY P. Théorie de l'addition des variables aléatoires. - Gauthiers-Villars, Paris 1937.

16 MILNOR J. Morse Theory. - Ann.Math.Studies 51, Princeton 1963.

17 MOLCHANOV S.A. Diffusion Processes and Riemannian Geometry - Russ.Math Surveys 30, 1-63 (1975).

18 MUELLER C. A unification of Strassen's Law and Levy's Modulus of Continuity. - Z.Wahrscheinlichkeitstheorie verw.Gebiete 56, 163-179 (1981).

19 PRIOURET P. Diffusions et équations différentielles stochastiques. - dans: Ecole d'été de Probabilités de St.Flour III-1973, Lect.Notes Math. 390, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1975.

20 PRIOURET P. Remarque sur les petites perturbations de systèmes dynamiques. - dans: Seminaire de Probabilités XVI, Lect.Notes Math. 920, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1981.

21 SUSSMAN H. Orbits of families of Vector Fields and Integrability of Distributions. - Trans.Am.Math.Soc. 180, 171-188 (1973).

22 VARADHAN S.R.S. Diffusion Processes in a Small Time Interval. - Comm.Pure Appl.Math. 20, 659-685 (1967).

23 ZABCYK J. Stable Dynamical Systems under Small Perturbations. - à paraître.

24 JERISON D.S., SANCHEZ-CALLE A. Estimates for the heat kernel for a sum of squares of vector fields - à paraître.

25 KUSUOKA S., STROOCK D. Applications of Malliavin Calculus part III - à paraître.

Paolo BALDI
Dipartimento di Matematica
Via Buonarroti 2
56100 Pisa
(Italia)

Mireille CHALEYAT-MAUREL
Laboratoire de Probabilités
4,Pl.Jussieu
75252 Paris Cedex 05
(France)