Séminaire de probabilités (Strasbourg)

J.-Y. Calais
Marc Yor

Renormalisation et convergence en loi pour certaines intégrales multiples associées au mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 21 (1987), p. 375-403
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1987__21__375_0>

RENORMALISATION ET CONVERGENCE EN LOI POUR CERTAINES INTEGRALES MULTIPLES ASSOCIEES AU MOUVEMENT BROWNIEN DANS $\mathbb{R}^d$

J.Y. CALAIS et M. YOR(*)

1. INTRODUCTION.

(1.0) Soit $(B_t, t \geq 0)$ mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, issu de 0. L'objet de ce travail est l'étude asymptotique, lorsque $t \uparrow \infty$, des intégrales multiples :

$$(1.a) \qquad \int_0^t du_1 \int_{u_1}^t du_2 \ldots \int_{u_{k-1}}^t du_k \, f(B_{u_2}-B_{u_1} \, ; \, B_{u_3}-B_{u_2} \, ; \ldots ; \, (B_{u_k}-B_{u_{k-1}}))$$

où $f : (\mathbb{R}^d)^{k-1} \to \mathbb{R}$ désigne une fonction continue à support compact. Plus précisément, on s'intéresse au comportement asymptotique du processus en t obtenu en remplaçant, dans ces intégrales, la variable t par (λt), et en faisant tendre λ vers ∞.

Par scaling, cette étude est ramenée à celle du comportement asymptotique, lorsque $n \to \infty$, des processus en t définis par :

$$(1.b) \qquad I_k^{(n)}(f;t) \equiv \int_0^t du_1 \int_{u_1}^t du_2 \ldots \int_{u_{k-1}}^t du_k f(n(B_{u_2}-B_{u_1}); n(B_{u_3}-B_{u_2}); \ldots ; n(B_{u_k}-B_{u_{k-1}}))$$

(1.1) On connaît déjà, pour $k = 2$, les résultats suivants :

- si $d = 2$, la suite :

$$(1.c) \qquad n^2 \int_0^t du_1 \int_{u_1}^t du_2 \, \{f(n(B_{u_2}-B_{u_1})) - E[f(n(B_{u_2}-B_{u_1}))]\}$$

converge p.s. et dans L^2 ; ce résultat, dû pour l'essentiel à Varadhan [9], et redémontré de différentes manières à l'aide du temps local d'intersection (Rosen [7] ; Le Gall [5] ; Yor [10]) est souvent appelé "renormalisation de Varadhan".

(*) *UNIVERSITE PARIS VI - Laboratoire de Probabilités - 4, place Jussieu - Tour 56 - 3ème Etage - 75252 PARIS CEDEX 05*

• si $d = 3$, le processus à valeurs dans $\mathbb{R}^4$:

$$(1.d) \quad (B_t \,;\, \frac{1}{\sqrt{\log n}}\{n^3 \int_0^t du_1 \int_{u_1}^t du_2 f(n(B_{u_2}-B_{u_1})) - \frac{tn}{2\pi}\int \frac{dy}{|y|} f(y)\} \quad (t \geq 0)\}$$

converge en loi vers :

$$(B_t \,;\, \frac{1}{\pi}(\int f(y)dy)\beta_t \quad (t \geq 0)),$$

où $(\beta_t \,;\, t \geq 0)$ désigne un mouvement Brownien réel indépendant de $(B_t \,;\, t \geq 0)$ (cf : Yor [11]).

Pour compléter ces résultats, et par analogie avec les études "au second ordre" pour les fonctionnelles additives du mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^d$, en dimension $d = 1$ (Tanaka [14]) ou $d = 2$ (Kasahara-Kotani [4]), il semble naturel d'étudier :

- d'une part, la vitesse de convergence de l'expression (1.c) vers sa limite ; cette étude est menée en [12].

- d'autre part, la convergence en loi du processus à valeurs dans $\mathbb{R}^4$, qui figure en (1.d), lorsque f satisfait : $\int dx\, f(x) = 0$ (on dit alors que f est une <u>fonction-charge</u>), et que l'on a supprimé le facteur $(\log n)^{-1/2}$; cette étude est entreprise au chapitre 3 du présent travail.

(1.2) Restons dans le cas $k = 2$, et présentons les résultats obtenus ci-dessous pour les dimensions $d \neq 2,3$.

• Le cas de la dimension $d = 1$ est, bien sûr, très particulier, ceci étant dû à l'existence et à la continuité des temps locaux (ℓ_t^a) du mouvement Brownien réel. Nous montrons que :

$$(1.e) \qquad \frac{n}{2}\{n\int_0^t du_1 \int_0^t du_2\, f(n(B_{u_2}-B_{u_1})) - \bar{f}\int da(\ell_t^a)^2\} \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} -n(f)\cdot t,$$

où $\bar{f} = \int_0^\infty db\, f(b)$, et $n(f) = \int_0^\infty db\, bf(b)$.

• Pour les dimensions $d \geq 4$, nous montrons que le processus à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$:

$$(1.f)\quad \left(B_t ; n^3\int_0^t du_1\int_{u_1}^t du_2 f(n(B_{u_2}-B_{u_1}))-tnc_d\int\frac{dy}{|y|^{d-2}}f(y)\right) \qquad \left(c_d \equiv \frac{\Gamma(\frac{d}{2}-1)}{2\cdot\pi^{d/2}}\right)$$

converge en loi vers :

$$\left(\beta_t(1)\ ;\ \sum_{i=1}^{d}\beta_t^{(i)}(F^{(i)})\right),$$

où $F = (F^{(i)}\ ;\ 1 \leq i \leq d) = \int_0^\infty ds\ \nabla(Uf)(B_s)$,

Uf désigne le potentiel newtonien de f, et $(\beta_t^{(i)}(H)\ ;\ i\leq d,\ t\geq 0,\ H\in L^2(\sigma(B_s, s\geq 0\ ;\ P))$ est un processus gaussien centré de covariance : $\mathbb{E}(\beta_t^{(i)}(H)\beta_s^{(j)}(K)) = \delta_{i,j}(t\wedge s)E(HK)$.

Ce résultat est démontré en particulier au chapitre 2 ; il s'étend, à l'aide d'un argument de récurrence, aux processus $(I_k^{(n)}(f;t)t \geq 0)$ pour tout $k \geq 2$, lorsque $d \geq 4$. La loi limite obtenue peut encore être exprimée en termes du processus $(\beta_t(H))$ présenté ci-dessus.

En outre, la même méthode de démonstration permet de couvrir le cas des fonctions charge $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dont il a été question au paragraphe précédent ; pour ces fonctions, le résultat (1.f) est encore valable (avec $d = 3$, et $c_d = \frac{1}{2\pi}$).

(1.3) Nous terminons cette introduction en complétant le tableau de l'étude asymptotique de $I_k^{(n)}(f;t)$ pour toutes les dimensions d, et toutes les multiplicités k :

a) $\underline{d = 1}$. Le résultat (1.e) admet une extension adéquate à tout ordre de multiplicité k, les quantités

$$\int da(\ell_t^a)^2 \qquad \text{et} \qquad t$$

qui figurent en (1.e) étant alors remplacées respectivement par :

$$\int da(\ell_t^a)^k \qquad \text{et} \qquad \int da(\ell_t^a)^{k-1}.$$

b) d = 2. Le résultat de renormalisation (1.c) vient d'être étendu par J. Rosen [8] sous la forme suivante : à toute fonction $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, continue, à support compact, on associe $\phi^{(n)}(x) = n^2 \phi(nx)$ $(n \in \mathbb{N})$; alors, pour tout $t > 0$, l'expression :

$$(1.g) \qquad \int_0^t du_1 \int_{u_1}^t du_2 \ldots \int_{u_{k-1}}^t du_k \{\phi^{(n)}(B_{u_2}-B_{u_1})\} \ldots \{\phi^{(n)}(B_{u_k}-B_{u_{k-1}})\}$$

converge dans L^2, lorsque $n \to \infty$ (on a posé : $\{X\} = X-E(X)$).

Indépendamment, E. Dynkin [2] a donné un développement asymptotique pour l'expression :

$$(1.g') \qquad \int_0^t du_1 \int_{u_1}^t du_2 \ldots \int_{u_{k-1}}^t du_k \; \phi^{(n)}(B_{s_2}-B_{s_1}) \ldots \; \phi^{(n)}(B_{s_k}-B_{s_{k-1}})$$

en s'appuyant sur sa construction des processus gaussiens liés aux intersections du mouvement brownien plan ([1]).

J. Rosen et M. Yor ([13])ontégalement montré la convergence de (1.g) pour $k = 3$ et donné une représentation de sa limite comme intégrale stochastique.

c) d = 3. Nous conjecturons que le résultat (1.d) s'étend comme suit, pour tout ordre de multiplicité $k \geq 3$, et nous prouvons cette conjecture pour $k = 3$: le processus à valeurs dans $\mathbb{R}^4$:

$$(B_t \; ; \frac{1}{\sqrt{\log n}} [n^{2k-1} \, I_k^{(n)}(f_k;t) - ntf_1], \; t \geq 0)$$

converge en loi vers :

$$(B_t \; ; c(f_k)\beta_t \; ; t \geq 0)$$

où $(\beta_t \; ; t \geq 0)$ désigne un mouvement brownien réel indépendant de $(B_t \; ; t \geq 0)$ et $c(f_k)$ est une constante dépendant de f_k. Ces convergences en loi ont lieu conjointement pour tous les ordres de multiplicité, avec le même mouvement brownien β.

d) $d \geq 4$. Nous avons déjà signalé en (1.2) que le résultat (1.f) s'étend de façon convenable à tout $k \geq 3$. Nous renvoyons ici simplement le lecteur à l'énoncé précis (Théorème (2.2) ci-dessous), celui-ci nécessitant un ensemble de notations assez important.

Indiquons enfin que la méthode de démonstration utilisée tout au long de ce travail est une variante de celle développée en [11] pour $d = 3$, $k = 2$. De façon à ne pas reprendre plusieurs fois les mêmes arguments sous différentes formes, nous avons dégagé un énoncé général (Proposition (2.1)) dont nous déduisons les différents résultats de ce travail pour $d \geq 3$.

2. ETUDE POUR LES DIMENSIONS $d \geq 4$.

La démonstration consiste à mettre en place une méthode de réduction de l'étude de $I_k^{(n)}(f;t)$, lorsque $n \to \infty$, à celle de certaines intégrales stochastiques, dont on fera ensuite l'étude asymptotique.
Nous aurons besoin d'un ensemble assez important de notations, que nous introduirons peu à peu au cours de la démonstration.
Il est suggéré au lecteur, dans un premier temps, de se placer dans le cas $k = 2$, puis, ensuite, de considérer le cas général.

(2.1) Dans toute la démonstration, les fonctions dépendant de $(k-1)$ variables $(k \geq 2)$ seront affectées de l'indice k.
Ainsi, on note f_k pour f ; $\tilde{f}^{(k)}$ désigne le potentiel newtonien, pris par rapport à la variable x_{k-1}, de $f(x_1,\ldots,x_{k-2},\cdot)$, et ϕ_k le gradient par rapport à la variable x_{k-1} de $\tilde{f}^{(k)}$. On a, de façon explicite, en posant $c_d = \dfrac{2^{\frac{d}{2}-1}}{(2\pi)^{d/2}}\,\Gamma(\frac{d}{2}-1)$:

$$\tilde{f}^{(k)}(x_1,x_2,\ldots,x_{k-2},x_{k-1}) = c_d \int \frac{dy}{|x_{k-1}-y|^{d-2}}\, f_k(x_1,\ldots,x_{k-2},y)$$

$$\phi_k(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1}) = c_d(2-d) \int \frac{dy\,(x_{k-1}-y)}{|x_{k-1}-y|^{d}}\, f_k(x_1,\ldots,x_{k-2},y).$$

On notera encore : $\quad f_{k-1}(x_1,\ldots,x_{k-2}) = \tilde{f}^{(k)}(x_1,\ldots,x_{k-2},0)$.

Pour permettre au lecteur de mémoriser ces notations, nous présentons le diagramme suivant :

Légende : la flèche $\nearrow$ symbolise une intégration
$\longrightarrow$ symbolise une restriction
$\downarrow$ symbolise une dérivation.

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & & & \tilde f^{(2)} \arrow[r] \arrow[d] & f_1 \equiv \tilde f^{(2)}(0) \\
 & & & & & \tilde f^{(k-2)} \arrow[r] \arrow[d] & f_{k-3} \arrow[ur, dashed] & \phi_2 & \\
 & & & \tilde f^{(k-1)} \arrow[r] \arrow[d] & f_{k-2} \arrow[ur] & \phi_{k-2} & & & \\
 & \tilde f^{(k)} \arrow[r] \arrow[d] & f_{k-1} \arrow[ur] & \phi_{k-1} & & & & & \\
f \arrow[ur] & \phi_k & & & & & & &
\end{tikzcd}$$

On a alors, en utilisant ces notations, à l'aide de la formule d'Itô :

$$f^{(k)}\,[n(B_{u_2}-B_{u_1}),n(B_{u_3}-B_{u_2}),\ldots,n(B_t-B_{u_{k-1}})]$$

$$= f_{k-1}\,[n(B_{u_2}-B_{u_1}),n(B_{u_3}-B_{u_2}),\ldots,n(B_{u_{k-1}}-B_{u_{k-2}})]$$

$$+\, n\int_{u_{k-1}}^{t}(dB_{u_k}\,;\,\phi_k\,[n(B_{u_2}-B_{u_1}),n(B_{u_3}-B_{u_2}),\ldots,n(B_{u_k}-B_{u_{k-1}})])$$

$$-\, n^2\int_{u_{k-1}}^{t}du_k\, f_k\,[n(B_{u_2}-B_{u_1}),\ldots,n(B_{u_k}-B_{u_{k-1}})].$$

En intégrant les deux membres de cette identité par rapport à $n^{2k-3}(du_1\cdot du_2\ldots du_{k-1})$, on obtient :

(2.a) $$n^{2k-1}\,I_k^{(n)}(f_k;t) = n^{2(k-1)-1}I_{k-1}^{(n)}(f_{k-1};t)+\int_0^t(dB_{u_k};D_{k-1}^{(n)}(\phi_k;u_k)) - \frac{1}{n}D_{k-1}^{(n)}(f^{(k)};t),$$

où $D_{k-1}^{(n)}(g;t) = n^{2(k-1)}\int_0^t du_{k-1}\int_0^{u_{k-1}}du_{k-2}\ldots\int_0^{u_2}du_1\, g(n(B_{u_2}-B_{u_1}),\ldots,n(B_t-B_{u_{k-1}}))$.

(2.2) Nous montrons maintenant que, pour tout $d \geq 4$, on a :

(2.b) $$\frac{1}{n}\,D_{k-1}^{(n)}(|f^{(k)}|,t)\ \xrightarrow[(n\to\infty)]{(P)}\ 0.$$

On a en effet :

(2.b') $$\begin{cases} -\text{ si } d \geq 5, \text{ l'expression } D_{k-1}^{(n)}(|f^{(k)}|;t) \text{ converge en loi ;} \\ -\text{ si } d = 4, \quad E[D_{k-1}^{(n)}(|f^{(k)}|,t)] = O(\log n) \quad (n\to\infty). \end{cases}$$

Dans les deux cas, l'assertion (2.b) en découle :

Pour démontrer (2.b'), remarquons que, pour toute fonction $g : (\mathbb{R}^d)^{k-1} \to \mathbb{R}_+$, on a :

$$D_{k-1}^{(n)}(g;t) \overset{(d)}{=} \int_0^{n^2t}dv_{k-1}\int_{v_{k-1}}^{n^2t}dv_{k-2}\ldots\int_{v_2}^{n^2t}dv_1\, g(B_{v_1}-B_{v_2},\ldots,B_{v_{k-1}}).$$

Cette dernière expression est majorée, dans le cas où $g = |f^{(k)}|$, par :

$$C \int_0^{n^2 t} dv_{k-1}\, h_R(B_{v_{k-1}}) \left(\int_0^{\infty} ds\, 1_{(|B_{s+v_{k-1}} - B_{v_{k-1}}| \leq R')} \right)^{k-2}$$

avec C, R, R' des constantes convenables dépendant de f, et
$h_R(x) = \int_{|y| \leq R} \frac{dy}{|x-y|^{d-2}}$.

L'assertion (2.b') découle alors facilement de cette dernière majoration.

(2.3) En appliquant conjointement la formule de récurrence (2.a), et le résultat (2.b), il apparaît que :

$$\sup_{s \leq t} |(n^{2k-1} I_k^{(n)}(f_k; s) - nsf_1) - \sum_{j=2}^{k} \int_0^s (dB_u ; D_{-1}^{(n)}(\phi_j, u))| \xrightarrow[(n\to\infty)]{(P)} 0.$$

L'existence de la limite en loi, lorsque $n \to \infty$, de la suite de processus à trajectoires continues : $\{B_t ; n^{2k-1} I_k^{(n)}(f_k; t) - ntf_1 \quad (t \geq 0)\}$ et la caractérisation de cette limite sont donc ramenées à celles de la suite de processus :

$$\text{(2.c)} \qquad \{B_t ; \sum_{j=2}^{k} \int_0^t (dB_u ; D_{j-1}^{(n)}(\phi_j; u)) \qquad (t \geq 0)\}.$$

Cette dernière étude sera faite à l'aide du résultat général de la proposition (2.1) ci-dessous. Afin de pouvoir énoncer cette proposition, il nous faut introduire d mesures Browniennes indépendantes $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(d)}$ définies sur l'espace $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega_d ; dt \times W_d)$ où $\Omega_d \equiv C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ muni de la topologie de la convergence compacte, et W_d désigne la mesure de Wiener sur cet espace.
Nous considérerons plus particulièrement les mouvements Browniens associés aux variables de $L^2(W_d)$, à partir de ces mesures gaussiennes, au moyen de la formule :

$$\beta_t^{(i)}(H) \stackrel{\text{déf}}{=} \beta^{(i)}(1_{[0,t]} \times H) \qquad (H \in L^2(W_d)).$$

On précisera toujours le choix de $(\beta_t^{(i)}(H), t \geq 0)$ en prenant une version continue de ce mouvement Brownien. Notons que la covariance des mouvements Browniens ainsi obtenus est :

$$\mathbb{E}[\beta_t^{(i)}(H) \beta_s^{(j)}(K)] = \delta_{ij}\ (t \wedge s)\ E[HK]].$$

Remarque : A l'aide de la décomposition de tout élément $H \in L^2(W_d)$ dans les chaos de Wiener, on peut construire la mesure gaussienne $(\beta_t(H))$ à partir de mesures gaussiennes indépendantes définies sur $L^2(\mathbb{R}_+^{n+1}, dt_1\, dt_2 \ldots dt_{n+1})$ $(n \in \mathbb{N})$.□

Nous aurons encore besoin des notations suivantes : à tout $\omega \in \Omega_d$, on associe :

- pour tout $u > 0$, la trajectoire $\hat{\omega}_u$, retournée au temps u de la trajectoire ω, c'est-à-dire : $\hat{\omega}_u(t) = \omega(u) - \omega(u-t)$ $\quad (t \leq u)$

- pour tout $c > 0$, la trajectoire $\omega^{(c)}$, transformée de la trajectoire ω par scaling d'ordre c, c'est-à-dire : $\omega^{(c)}(t) = c\, \omega(t/_{c^2})$ $\quad (t \geq 0)$. On a maintenant la :

Proposition (2.1) : Soit $(\hat{\Phi}(t,\omega), t \geq 0)$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, prévisible par rapport à la filtration Brownienne, tel que :

(i) pour tout $p \in [1,\infty[$, $\quad \sup\limits_{t \geq 0} E[|\hat{\Phi}(t)|^p] < \infty$

(ii) $\hat{\Phi}(t,\omega) \xrightarrow[t\to\infty]{(P)} \psi(\omega)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\hat{\Phi}_n(u,\omega) = \hat{\Phi}(n^2 u, \omega^{(n)})$, et on définit :

$$\Phi_n(u,\omega) = \hat{\Phi}_n(u, \hat{\omega}_u).$$

On a alors :

$$\{B_t \; ; \int_0^t (dB_u \; ; \Phi_n(u,\omega))\}_{t \geq 0} \xrightarrow[(n\to\infty)]{(d)} \{\beta_t(1) \; ; \sum_{i=1}^d \beta_t^{(i)}(\psi^{(i)})\}_{t \geq 0}.$$

Démonstration : a) Remarquons tout d'abord que la famille des lois des intégrales stochastiques $(M^{(n)}(t) \equiv \int_0^t (dB_u \; ; \Phi_n(u,\omega)) \; ; t \geq 0)$ est tendue, lorsque n varie.

On a, en effet :

$$E[|M^{(n)}(t) - M^{(n)}(s)|^p] \leq C_p\, E[(\int_s^t du |\Phi_n(u,\omega)|^2)^{p/2}]$$

$$\leq C_p (t-s)^{p/2} \sup_{u \geq 0} E[|\Phi_n(u,\omega)|^p]$$

Or, on a :

$$E[|\Phi_n(u,\omega)|^p] = E[|\hat{\Phi}_n(u,\omega)|^p] = E[|\hat{\Phi}(n^2u,\omega)|^p],$$

et finalement, d'après (i), $\sup\limits_{n,u\geq 0} E[|\Phi_n(u,\omega)|^p] < \infty$, ce qui implique le résultat cherché.

b) La proposition sera alors démontrée dès que l'on aura prouvé les résultats suivants :

$$(2.d) \qquad \langle B^{(i)}, \int_0^\cdot dB_u^{(i)}\, \Phi_n^{(i)}(u)\rangle_t \equiv \int_0^t du\, \Phi_n^{(i)}(u,\omega) \xrightarrow[(n\to\infty)]{L^p} t\, E[\psi^{(i)}]$$

$$(2.e) \qquad \langle \int_0^\cdot dB_u^{(i)}\, \Phi_n^{(i)}(u)\rangle_t \equiv \int_0^t du(\Phi_n^{(i)}(u,\omega))^2 \xrightarrow[(n\to\infty)]{L^p} t\, E[(\psi^{(i)})^2].$$

Les membres de gauche étant bornés dans L^p (pour t fixé, et n variant), il suffira de montrer que la convergence a lieu dans L^2. Alors, le résultat (2.d) - par exemple - découle de :

$$(2.f) \qquad E[\Phi_n^{(i)}(u)] \xrightarrow[n\to\infty]{} E[\psi^{(i)}] \ (u \text{ fixé}) \ ; \ E[\Phi_n^{(i)}(u)\, \Phi_n^{(i)}(v)] \xrightarrow[n\to\infty]{} E[\psi^i]^2 (u<v)$$

ce qui provient de l'hypothèse (i) de bornitude dans L^p d'une part, et d'autre part, de ce que :

$$(2.g) \qquad (\Phi_n^{(i)}(u), \Phi_n^{(i)}(v)) \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} (\psi^{(i)}, \tilde{\psi}^{(i)}),$$

où $\tilde{\psi}^{(i)}$ est une copie indépendante de $\psi^{(i)}$.

En effet, on a :

$$(2.h) \qquad \begin{aligned} &(\Phi_n^{(i)}(u,\omega)\ ;\ \Phi_n^{(i)}(v,\omega)) \\ &\equiv (\hat{\Phi}_n^{(i)}(u,\hat{\omega}_u)\ ;\ \hat{\Phi}_n^{(i)}(v-u,\hat{\omega}_v) + [\hat{\Phi}_n^{(i)}(v,\hat{\omega}_v) - \hat{\Phi}_n^{(i)}(v-u,\hat{\omega}_v)]) \end{aligned}$$

Or, la v.a. $\hat{\Phi}_n^{(i)}(v-u,\hat{\omega}_v)$ ne dépend que des accroissements de ω entre u et v, et est donc indépendante de $\hat{\Phi}_n^{(i)}(u,\hat{\omega}_u)$.

D'autre part, on a, pour $h \leq v$ (h fixé) :

$$\hat{\Phi}_n^{(i)}(h,\hat{\omega}_v) \overset{(d)}{=} \hat{\Phi}_n^{(i)}(h,\omega) \overset{(d)}{=} \hat{\Phi}^{(i)}(hn^2,\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \psi^{(i)}.$$

On a ainsi montré que :

$$\hat{\Phi}_n^{(i)}(v,\hat{\omega}_v) - \hat{\Phi}_n^{(i)}(v-u,\hat{\omega}_v) \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} 0,$$

et, d'autre part :

$$\hat{\Phi}_n^{(i)}(v-u,\hat{\omega}_v) \xrightarrow{(d)} \psi^{(i)}.$$

Le résultat (2.g) découle maintenant de l'identité (2.h).

(2.4) En s'appuyant essentiellement sur la Proposition (2.1), on peut maintenant énoncer et démontrer le

Théorème (2.2) : *Soit $f \equiv f_k : (\mathbb{R}^d)^{k-1} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact, et $(\phi_j)_{2\leq j\leq k}$ les fonctions gradient définies à partir de f au moyen du diagramme présenté en (2.1).*

Posons :

$$F_j = \int_0^\infty du_{j-1}\int_{u_{j-1}}^\infty du_{j-2}\cdots\int_{u_2}^\infty du_1\ \phi_j(B_{u_2}-B_{u_1},B_{u_3}-B_{u_2},\dots,B_{u_{j-1}}-B_{u_{j-2}},B_{u_{j-1}})$$

et $\quad F = \sum_{j=2}^{k} F_j.$

On a alors :

$$\begin{array}{ll} \{B_t\ ;\ n^{2k-1} I_k^{(n)}(f_k\ ;\ t) - nt f_1 & (t \geq 0)\} \\ \quad \Big\downarrow (d) & \\ \{\beta_t(1)\ ;\ \sum_{i=1}^{d} \beta_t^{(i)}\ (F^{(i)}) & (t \geq 0)\}. \end{array}$$

Démonstration : D'après (2.c), on est ramené à l'étude de la convergence en loi de $\{B_t\ ;\ \sum_{j=2}^{k} \int_0^t (dB_u\ ;\ D_{j-1}^{(n)}(\phi_j,u))\quad (t \geq 0)\}$, et on va appliquer la Proposition (2.1) aux processus $\Phi_n(u) = D_{j-1}^{(n)}(\phi_j,u)$.

Le processus $(\hat{\Phi}(u), u \geq 0)$ associé à la suite (Φ_n) est alors :

$$\hat{\Phi}(u) = \int_0^u du_{j-1} \int_{u_{j-1}}^u du_{j-2} \cdots \int_{u_2}^u du_1\ \phi_j(B_{u_2}-B_{u_1}, B_{u_3}-B_{u_2}, \ldots, B_{u_{j-1}})$$

et, pour pouvoir appliquer la Proposition (2.1), il reste à montrer que la variable

$$\tilde{\psi}_j \equiv \int_0^\infty du_{j-1} \int_{u_{j-1}}^\infty du_{j-2} \cdots \int_{u_2}^\infty du_1\ |\phi_j|(B_{u_2}-B_{u_1}, \ldots, B_{u_{j-1}})$$

possède des moments de tous ordres, ce qui découlera du Lemme (2.3) ci-dessous. □

Majorons d'abord la variable $\tilde{\psi}_j$ par :

$$\mathbb{F}_j = \int_0^\infty du_{j-1} \int \frac{dy}{|B_{u_{j-1}}-y|^{d-1}} \int_{u_{j-1}}^\infty du_{j-2} \cdots \int_{u_2}^\infty du_1\ |f_j|(B_{u_2}-B_{u_1}\ ;\ B_{u_3}-B_{u_2}\ ;\ \ldots\ ;\ B_{u_{j-1}}-B_{u_{j-2}}\ ;\ y).$$

On remarque ensuite que :

$$\mathbb{F}_j \leq \int_0^\infty du \int_{|y|\leq\rho} \frac{dy}{|B_u-y|^{d-1}} \left\{\int_u^\infty dv\ 1_{|B_v-B_u|\leq R}\right\}^{j-2}$$

pour ρ et R suffisamment grands.

La fonction : $z \longrightarrow \int_{|y|\leq\rho} \frac{dy}{|y-z|^{d-1}}$ étant uniformément bornée, et de l'ordre de $1/|z|^{d-1}$, lorsque $|z| \to \infty$, on peut encore majorer $\mathbb{F}_j$ comme suit :

$$\mathbb{F}_j \leq C \left(\left(\int_0^\infty du\, 1_{(|B_u|\leq R)}\right)^{j-1} + \int_0^\infty du \frac{1_{|B_u|\geq R}}{|B_u|^{d-1}} \left(\int_u^\infty dv\, 1_{(|B_v-B_u|\leq R)}\right)^{j-2}\right).$$

On a déjà remarqué que $\int_0^\infty du\, 1_{(|B_u|\leq R)}$ possède des moments de tous ordres.

Pour étudier l'intégrabilité du second terme qui figure dans la majoration précédente, posons :

$$A_t = \int_0^t du \frac{1_{|B_u|\geq R}}{|B_u|^{d-1}} \quad \text{et} \quad R_u = \left(\int_u^\infty dv\, 1_{(|B_v-B_u|\leq R)}\right)^{j-2}.$$

Le lemme suivant, qui donne - dans un cadre général - des conditions suffisantes pour que $\int_0^\infty dA_u\, R_u$ admette des moments de tous ordres nous permettra de terminer la démonstration du Théorème (2.2).

<u>Lemme (2.3)</u> : *Soit* (A_t) *un processus croissant continu, adapté, dont le potentiel est borné. Soit, d'autre part,* (R_t) *un processus mesurable positif tel qu'il existe une probabilité* μ *sur* $\mathbb{R}_+$ *admettant des moments de tous ordres, et vérifiant l'hypothèse "d'indépendance" :*

pour tout t.a. prévisible T, *et toute fonction* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, *borélienne,*

$$E[f(R_T)/\mathcal{F}_{T-}] = \int f(u)d\mu(u)$$

(en d'autres termes, la projection prévisible de $(f(R_t), t \geq 0)$ *est le processus constant* $\int f(u)d\mu(u)$*).*

Sous ces deux hypothèses, $\int_0^\infty dA_u \cdot R_u$ *admet des moments de tous ordres.*

<u>Démonstration</u> : 1) Commençons par quelques majorations élémentaires :

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_0^\infty R_s dA_s\right)^k\right] &= E\left[A_\infty^k\left(\frac{1}{A_\infty}\int_0^\infty R_s dA_s\right)^k\right] \\ &\leq E\left[A_\infty^{k-1}\int_0^\infty R_s^k dA_s\right] \\ &\leq E[A_\infty^{2(k-1)}]^{1/2}\, E\left[\left(\int_0^\infty R_s^k\, dA_s\right)^2\right]^{1/2} \end{aligned}$$

Or, on sait que, sous l'hypothèse faite sur A, A_∞ admet des moments de tous ordres (cf : Meyer [6], par exemple).
On est donc ramené à montrer, quitte à remplacer (R_s) par (R_s^k), qui vérifie d'ailleurs la même hypothèse que (R_s), que l'on a :

$$E\left[\left(\int_0^\infty R_s dA_s\right)^2\right] < \infty$$

2) De même qu'en 1), on a :

$$E\left[\left(\int_0^\infty R_s dA_s\right)^2\right] \leq E\left[A_\infty \int_0^\infty R_s^2 \, dA_s\right].$$

Puis, on a :

$$E\left[A_\infty \int_0^\infty R_s^2 \, dA_s\right] = E\left[\int_0^\infty E[A_\infty R_s^2/\mathcal{F}_s]dA_s\right]$$

$$= E\left[\int_0^\infty E[(A_\infty - A_s)R_s^2/\mathcal{F}_s]dA_s\right] + E\left[\int_0^\infty A_s \, E[R_s^2]dA_s\right].$$

Or, par hypothèse, $E[R_s^2]$ ne dépend pas de s, et est fini, et, d'autre part :

$$E\left[\int_0^\infty A_s \, dA_s\right] = \frac{1}{2} E[A_\infty^2] < \infty.$$

Il reste à majorer : $E\left[\int_0^\infty E[(A_\infty - A_s)R_s^2/\mathcal{F}_s]dA_s\right]$

$$\leq E\left[\int_0^\infty E[(A_\infty - A_s)^2/\mathcal{F}_s]^{1/2} \, E[R_s^4]^{1/2} \, dA_s\right] = C \, E\left[\int_0^\infty E[(A_\infty - A_s)^2/\mathcal{F}_s]^{1/2} \, dA_s\right]$$

où C désigne la constante $E[R_s^4]^{1/2}$.

Remarquons maintenant que l'on a :

$$E[(A_\infty - A_s)^2/\mathcal{F}_s] = 2 \, E\left[\int_s^\infty dA_u \, E[A_\infty - A_u/\mathcal{F}_u]/\mathcal{F}_s\right],$$

et si $a \equiv \text{ess sup } E[A_\infty - A_u/\mathcal{F}_u]$, on a donc :

$$E[(A_\infty - A_s)^2/\mathcal{F}_s] \leq 2a^2,$$

et finalement :

$$E\Big[\int_0^\infty E[(A_\infty - A_s)^2/\mathcal{F}_s]^{1/2}\, dA_s\Big] \leq \sqrt{2}\cdot a^2,$$

ce qui termine la démonstration du lemme. □

Remarques : 1) Sous la seule hypothèse "d'indépendance" sur R, la projection duale prévisible de $\int_0^\cdot R_u\, dA_u$ est $C.A$, où C est la constante $E[R_s]$ (indépendante de s). En conséquence, une condition nécessaire pour que $\int_0^\infty R_u\, dA_u$ admette des moments de tous ordres est que A admette également des moments de tous ordres.

Le lemme montre que, sous l'hypothèse un peu plus restrictive que (A_t) admette un potentiel borné, alors $(\int_0^\infty R_u\, dA_u)$ admet des moments de tous ordres.

2) En [3], T. Jeulin a montré, sous l'hypothèse "d'indépendance" sur R, en supposant en outre : $\mu\{0\} = 0$, et $\int d\mu(x) x < \infty$, que les ensembles :

$$\{\int_0^\infty R_s\, dA_s < \infty\} \quad \text{et} \quad \{A_\infty < \infty\} \quad \text{sont p.s. égaux.} \quad □$$

Nous terminons maintenant, à l'aide du Lemme(2.3), la démonstration du Théorème (2.2) :

a) Le processus $R_u \equiv (\int_u^\infty dv\, 1_{(|B_v - B_u| \leq R)})^{j-2}$ vérifie bien la propriété "d'indépendance", et admet des moments de tous ordres.

b) Il reste à montrer que le processus (A_t) admet un potentiel borné, ce qui revient à montrer que la fonction :

$$y \xrightarrow{\phi_d} \int \frac{dx}{|x-y|^{d-2}} 1_{|x|\geq R} \frac{1}{|x|^{d-1}} \quad \text{est uniformément bornée sur } \mathbb{R}^d.$$

Or, on a :

$$\phi_d(y) = \frac{|y|^d}{|y|^{d-2}} \int \frac{dx'}{|x'-1|^{d-2}} 1_{(|x'| \geq \frac{R}{y})} \frac{1}{(|y||x'|)^{d-1}}$$

$$= \frac{1}{|y|^{d-3}} \int \frac{dx}{|x-1|^{d-2}} 1_{(|x| \geq \frac{R}{|y|})} \frac{1}{|x|^{d-1}}.$$

Lorsque $|y| \to \infty$, on a : $\phi_d(y) = O(\frac{1}{|y|^{d-3}})$.

Lorsque $|y| \to 0$, on a :

$$\phi_d(y) \simeq \frac{1}{|y|^{d-3}} \int_{(R/_{|y|})} \frac{r^{d-1}\,dr}{r^{2d-3}} \simeq \frac{1}{|y|^{d-3}} \int_{R/_{|y|}} r^{2-d}\,dr$$

$$= O(\frac{1}{|y|^{d-3}} (\frac{R}{|y|})^{1-d})$$

$$= O(\frac{y^{d-1}}{|y|^{d-3}}) = O(|y|^2) \xrightarrow[|y|\to 0]{} 0, \text{ d'où le résultat.}$$

(2.5) Considérons, pour simplifier, le cas $k = 2$ seulement.
Contrairement à ce qui se passe en dimension 3 (cf : (1.d)), pour les dimensions $d \geq 4$, le mouvement brownien d'origine $(B_t \equiv \beta_t(1)\ ;\ t \geq 0)$ n'est pas, en général, indépendant du mouvement brownien $(\beta_t(F) \equiv \sum_{i=1} \beta_t^{(i)} (F^{(i)})\ ;\ t \geq 0)$, limite en loi du processus $(n^3 I_2^{(n)}(f_2;t) - nt\, f_1\ ;\ t \geq 0)$ [voir l'énoncé du théorème (2.2)].
Nous explicitons maintenant la corrélation de ces deux mouvements browniens.

On a : $$\langle \beta_{\cdot}(1), \beta_{\cdot}(F)\rangle_t = t\, E\Big[\int_0^\infty ds\ \nabla(Uf)(B_s)\Big],$$

d'où l'on déduit facilement :

$$\langle \beta_{\cdot}(1), \beta_{\cdot}(F)\rangle_t = t\, \gamma_d \int dy\ f(y) \frac{y}{|y|^{d-2}},$$

avec γ_d constante strictement positive, ne dépendant que de d.

L'intégrale $\int dy\ f(y) \frac{y}{|y|^{d-2}}$ est, bien sûr, nulle si f est une fonction radiale, mais elle ne l'est pas dans le cas général.

3. ETUDE POUR LA DIMENSION $d = 3$.

(3.1) Conformément au paragraphe (1.1), commençons par étudier le cas $k = 2$, et $f \equiv f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, fonction-charge.

Le théorème (2.2) est encore valable dans ce cadre, où il prend la forme plus simple suivante :

Théorème (3.1) : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, *fonction-charge, et* $\phi = \nabla(\check{f})$. *Posons :*

$$F = \int_0^\infty du\ \phi(B_u).$$

On a alors :

$$\{B_t\ ;\ n^3 \int_0^t du \int_u^t ds\ f(n(B_u - B_s)) - \frac{nt}{2\pi} \int \frac{dy\ f(y)}{|y|}\ ,\ (t \geq 0)\}$$

$$\Big\downarrow (d)$$

$$\{\beta_t(1)\ ;\ \sum_{i=1}^{3} \beta_t^{(i)}(F^{(i)}) \qquad (t \geq 0)\}.$$

Démonstration : D'après la démonstration du théorème (2.2), tout se ramène à montrer que la variable $\int_0^\infty du\ |\phi|(B_u)$ admet des moments de tous ordres, et, pour cela, il suffit que le potentiel newtonien de $|\phi|$, c'est-à-dire la fonction de u :

$$\Phi(u) \equiv \int \frac{dy}{|y-u|} \left|\int dz\ f(z) \frac{y-z}{|y-z|^3}\right| = \int \frac{dy}{|y|} \left|\int dz\ f(u+z) \frac{y-z}{|y-z|^3}\right|$$

soit uniformément bornée, ce que l'on démontre dans le lemme suivant.

Lemme (3.2) : La fonction Φ *définie par :*

$$(3.a) \qquad \Phi(u) \equiv \int \frac{dy}{|y|} \left|\int dz\ f(u+z) \frac{y-z}{|y-z|^3}\right| \qquad (u \in \mathbb{R}^3)$$

à partir d'une fonction-charge f, *est continue, et uniformément bornée.*

Démonstration : Soit $R > 0$ tel que le support de f soit contenu dans $\{z : |z| < R\}$. On ne perd pas de généralité en supposant $|f| \leq 1$.

(i) Vérifions tout d'abord que Φ est finie. Pour cela, on peut supposer, quitte à remplacer $f(u+\cdot)$ par f, que $u = 0$.

Remarquons alors que l'on a, pour tout $\rho > 0$:

$$\int_{|y|\leq\rho} \frac{dy}{|y|}\int_{|z|\leq R} dz \frac{1}{|y-z|^2} \leq \int_{|y|\leq\rho} \frac{dy}{|y|}\int_{|z-y|\leq R+\rho} \frac{dy}{|y-z|^2} \leq C(R+\rho)\int_{|y|\leq\rho} \frac{dy}{|y|} < \infty.$$

D'autre part, on peut majorer l'intégrale restante dans $\Phi(0)$ par :

$$\int_{|y|\geq\rho} \frac{dy}{|y|}\int_{|z|\leq R} dz \left| \frac{y-z}{|y-z|^3} - \frac{y-1}{|y-1|^3} \right|.$$

Or, on prouve aisément l'inégalité élémentaire suivante, valable pour $y,z,\alpha \in \mathbb{R}^3$:

$$\left| \frac{y-z}{|y-z|^3} - \frac{y-\alpha}{|y-\alpha|^3} \right| \leq 3\,|z-\alpha|\,\left\{ \frac{1}{|y-z|^3} + \frac{1}{|y-z|\,|y-\alpha|^2} \right\}. \tag{3.b}$$

En prenant $\alpha = 1$, l'intégrale double ci-dessus est donc majorée, en supposant $\rho \geq R+1$, par :

$$C(1+R)R^3 \int_{|y|\geq\rho} \frac{dy}{|y|}\left\{ \frac{1}{(|y|-R)^3} + \frac{1}{|y-1|^2}\,\frac{1}{(|y|-R)} \right\} < \infty, \quad \text{car} \int^{\infty} \frac{dr}{r^2} < \infty.$$

(ii) Une légère modification des arguments ci-dessus permet de montrer, à l'aide du théorème de convergence dominée, que Φ est continue.

En effet, soit $u_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} u$. Dans l'intégrale en (dz) qui figure dans la définition de $\Phi(u_n)$ en (3.a), on peut remplacer (dz) par $(dz)1_{|u_n+z|\leq R}$; ensuite, la suite (u_n) étant bornée, on peut remplacer $|u_n+z| \leq R$ par $|z| \leq R'$, avec R' suffisamment grand. Les majorations faites en (i) s'appliquent alors, en remplaçant partout R par R'.

(iii) Il suffit maintenant de montrer que, lorsque u est suffisamment grand, $\Phi(u)$ est uniformément borné. On reprend à nouveau les majorations faites en (i) et (ii), mais cette fois en supposant $\rho \equiv \rho(u) = 2|u|$, et en détaillant la dépendance en u. Majorons tout d'abord :

$$\int_{|y|\leq\rho} \frac{dy}{|y|} \int_{|u+z|\leq R} dz \frac{1}{|y-z|^2}$$

$$= \int_{|u+z|\leq R} dz \int_{|y|\leq\rho} dy \frac{1}{|y|\,|y-z|^2} = \int_{|u+z|\leq R} dz \int_{|y|\leq \frac{\rho}{|z|}} dy \frac{1}{|y|\,|y-1|^2}$$

$$= \int \frac{dy}{|y|\,|y-1|^2} \int dz\, 1_{(|z|\leq\rho/|y|)}\, 1_{(|u+z|\leq R)}$$

$$= \int \frac{dy}{|y|\,|y-1|^2} |u|^3 \int dz\, 1_{(|z|\leq\rho/|y|\cdot|u|)}\, 1_{(|z+1|\leq R/|u|)} \tag{3.c}$$

Remarquons maintenant que :

- d'une part, pour que les boules $\{z : |z| \leq \rho/|y|\cdot|u|\}$ et $\{z : |z+1| \leq R/|u|\}$ soient d'intersection non vide, il est nécessaire que l'on ait :

$$1 \leq \frac{\rho}{|y|\cdot|u|} + \frac{R}{|u|}$$

soit : *(3.d)* $\qquad |y| \leq 2/(1 - \frac{R}{|u|})^+$:

- d'autre part, on a la majoration évidente :

$$\text{(3.e)} \qquad |u|^3 \int dz\, 1_{(|z| \leq \frac{\rho}{|y|\cdot|u|})}\, 1_{(|z+1| \leq \frac{R}{|u|})} \leq C\,\{\frac{\rho^3}{|y|^3} \wedge R^3\}$$

A l'aide de (3.d) et (3.e), l'intégrale double qui figure en (3.c) est donc majorée par un multiple de :

$$\int \frac{dy}{|y|\;|y-1|^2} \{\frac{\rho^3}{|y|^2} \wedge R^3\}\, 1_{(|y|\leq 2/(1-\frac{R}{|u|})^+)},$$

et pour $|u| \geqq 3R$, cette intégrale est majorée par :

$$\int_{|y|\leqq 3} \frac{dy}{|y|\ |y-1|^2} R^3 < \infty.$$

Il nous reste à majorer uniformément l'expression :

$$\int_{|y|\geqq\rho} \frac{dy}{|y|} \left|\int_{|z+u|\leqq R} dz\ f(u+z) \frac{y-z}{|y-z|^3}\right|$$

$$\leqq \int_{|y|\geqq\rho} \frac{dy}{|y|} \int_{|z+u|\leqq R} dz \left|\frac{y-z}{|y-z|^3} - \frac{y+u}{|y+u|^3}\right|.$$

A l'aide de l'inégalité (3.b) prise avec $\alpha = -u$, on est ramené à majorer :

$$(3.f) \qquad \int_{|y|\geqq\rho} \frac{dy}{|y|} \int_{|z+u|\leqq R} dz \left\{\frac{1}{|y-z|^3} + \frac{1}{|y-z|\ |y+u|^2}\right\}.$$

Or, on a, pour (u,y,z) qui vérifient : $|u| \geqq 2R$, $|y| \geqq 2|u|$, $|z+u| \geqq R$:

$$|y-z| \geqq |y+u| - R \geqq |u| - R \geqq R.$$

L'intégrale (3.f) peut donc être majorée par :

$$C\cdot R^3 \int_{|y|\geqq\rho} \frac{dy}{|y|} \left[\frac{1}{(|y+u|-R)^3} + \frac{1}{(|y+u|-R)\ |y+u|^2}\right]$$

$$= C\cdot R^3 \int_{|y|\geqq 2} \frac{|u|^2\ dy}{|y|} \left[\frac{1}{(|u|\,|y+1|-R)^3} + \frac{1}{(|u|\,|y+1|-R)\,|u|^2\ |y+1|^2}\right]$$

$$\leqq \frac{C\cdot R^3}{|u|} \int_{|y|\geqq 2} \frac{dy}{|y|} \left[\frac{1}{(|y+1| - \frac{1}{2})^3} + \frac{1}{(|y+1| - \frac{1}{2})\,|y+1|^2}\right]$$

L'intégrale figurant en (3.f) est donc $O(\frac{1}{|u|})$, lorsque $|u| \to \infty$, et le lemme est démontré.

(3.2) Considérons maintenant le cas $k \geq 3$.
Notre objectif est d'étendre convenablement, dans ce cas, le résultat de convergence en loi (1.d). Des difficultés techniques beaucoup plus grandes que pour les dimensions $d \geq 4$ nous empêchent cependant de conclure rigoureusement. En conséquence, ce paragraphe (3.2) ne contient que des <u>conjectures</u> qui nous semblent toutefois très raisonnables.

(i) Compte tenu des difficultés dont nous venons de faire état, nous pouvons supposer, pour simplifier, que la fonction $f : (\mathbb{R}^3)^{k-1} \to \mathbb{R}$ est de la forme :

$$f_k(x_1,\ldots,x_{k-1}) = \prod_{i=1}^{k-1} g^i(x_i),$$

chaque fonction $g^i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ étant continue, et à support compact.
La formule :

$$(2.a) \quad n^{2k-1}\, I_k^{(n)}(f_k;t) = n^{2(k-1)-1}\, I_{k-1}^{(n)}(f_{k-1};t) + \int_0^t (dB_u;D_{k-1}^{(n)}(\phi_k,u)) - \frac{1}{n} D_{k-1}^{(n)}(f^{(k)};t)$$

est toujours valable.
Or, à l'aide de la majoration faite à la fin du paragraphe (2.2) pour démontrer (2.b'), on obtient :

$$(3.g) \qquad \frac{1}{n\sqrt{\log n}}\, D_{k-1}^{(n)}(|f^{(k)}|;t) \xrightarrow[(n\to\infty)]{(P)} 0.$$

En effet, la fonction $h_R(x) \equiv \int_{|y|\leq R} \frac{dy}{|y-x|}$ est majorée par $\frac{C}{|x|}$ et on est donc ramené à montrer :

$$\frac{1}{n\sqrt{\log n}} \int_0^{n^2 t} \frac{dv}{|B_v|}\left(\int_0^\infty ds\, 1_{|B_{s+v}-B_v| \leq R'}\right)^{k-2} \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} 0.$$

Or, l'espérance de cette variable est majorée par :

$$\frac{C}{n\sqrt{\log n}} \int_0^{n^2 t} E\left(\frac{1}{|B_v|}\right) = \frac{C}{n\sqrt{\log n}} \int_0^{n^2 t} \frac{dv}{\sqrt{v}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

L'assertion (3.g) est démontrée.

(ii) On a donc, d'après (2.a) et (3.g), par récurrence :

$$(3.h) \quad \frac{1}{\sqrt{\log n}} \sup_{s\leq t} \left|(n^{2k-1}\, I_k^{(n)}(f_k;s) - nsf_1) - \sum_{j=2}^{k} \int_0^s (dB_v;D_{j-1}^{(n)}(\phi_j,v))\right| \xrightarrow[(n\to\infty)]{(P)} 0$$

Pour étudier la convergence des intégrales stochastiques qui figurent en (3.h), considérons tout d'abord :

$$\frac{1}{\sqrt{\log n}} \int_0^t (dB_v \; ; \; D_{k-1}^{(n)}(\phi_k, v)).$$

Rappelons que (voir le paragraphe (2.1)), si l'on pose $\theta_y(\xi) = \dfrac{y-\xi}{2\pi|y-\xi|^3}$, on a :

$$\phi_k(x_1,\dots,x_{k-1}) = \int dy \; \theta_y(x_{k-1}) g^1(x_1)\dots g^{k-2}(x_{k-2}) g^{k-1}(y).$$

On en déduit :

$$\frac{1}{\sqrt{\log n}} \int_0^t (dB_v \; ; \; D_{k-1}^{(n)}(\phi_k, v))$$

$$(3.i) \qquad = \int dy \; g^{k-1}(y) \int_0^t (dB_v \; ; \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} \int_0^v du \; \theta_y(n(B_v - B_u)) D_{k-2}^{(n)}[g^1 \otimes g^2 \otimes \dots \otimes g^{k-2}; u].$$

Nous sommes donc amenés à étudier, pour y et v fixés, le comportement asymptotique de :

$$(3.j) \qquad \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} \int_0^v du \; \theta_y(n(B_v - B_u)) D_{k-2}^{(n)} [g^1 \otimes \dots \otimes g^{k-2}; u].$$

Or, on a, par définition :

$$D_{k-2}^{(n)} [g^1 \otimes \dots \otimes g^{k-2}; u]$$

$$= n^{2(k-2)} \int_0^u du_{k-2} \int_0^{u_{k-2}} \dots \int_0^{u_2} du_1 \; g^1(n(B_{u_2} - B_{u_1})) \dots g^{k-2}(n(B_u - B_{u_{k-2}})).$$

En faisant le changement de variables : $u_i = v - u_i'$, et en retournant le mouvement brownien au temps v, on obtient l'égalité en loi de l'expression (3.j) avec :

$$(3.j') \quad \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} \int_0^v du_{k-1} \; \theta_y(nB_{u_{k-1}}) \int_{u_{k-1}}^v du_{k-2} \; g_{(n)}^{k-2}(B_{u_{k-2}} - B_{u_{k-1}}) \dots \int_{u_2}^v du_1 g_{(n)}^1 (B_{u_1} - B_{u_2})$$

où l'on a noté : $g_{(n)}^i(x) = n^2 \, g^i(nx)$.

Exprimons la dernière intégrale qui figure en (3.j'), soit : $\displaystyle\int_{u_2}^v du_1 \; g_{(n)}^1 (B_{u_1} - B_{u_2})$,

à l'aide de la formule d'Itô ; il vient :

$$\int_{u_2}^v du_1 \; g_{(n)}^1 (B_{u_1} - B_{u_2})$$

$$(3.k) \qquad = -Ug^1(n(B_v - B_{u_2})) + Ug^1(0) + n \int_{u_2}^v (dB_{u_1} \; ; \; \nabla(Ug^1)[n(B_{u_1} - B_{u_2})])$$

où $Ug(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int \frac{dy}{|x-y|} \, g(y)$.

A l'aide de l'identité (3.k), on peut écrire l'expression (3.j') sous la forme :

$$(3.h)\quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{n^2}{\sqrt{\log n}} \displaystyle\int_0^v du\ \theta_y(nB_u)\ \Big[\int_u^v du_{k-2}\ g_{(n)}^{k-2}\ (B_{u_{k-2}}-B_u)\Big] \times \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad \Big[\displaystyle\int_{u_3}^v du_2\ g_{(n)}^2 (B_{u_2}-B_{u_3})\Big] \times \end{array}\right\} (k\text{-}3) \text{ termes}$$

$$\Big[\underbrace{-Ug^1(n(B_v-B_{u_2}))}_{(1)} + \underbrace{Ug^1(0)}_{(2)} + \underbrace{n \int_{u_2}^v (dB_{u_1}\ ;\ \nabla(Ug^1)(n(B_{u_1}-B_{u_2})))}_{(3)}\Big]$$

Ceci nous permet d'écrire l'expression (3.h) sous forme de la somme de 3 termes, I, II, III, correspondant respectivement aux expressions (1), (2), (3).
Nous conjecturons que les termes I et III convergent en probabilité vers 0.

Ainsi, si l'on admet cette conjecture, l'étude du comportement asymptotique de l'expression (3.h) se ramène, par itération, à celle de :

$$(3.k)\qquad \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} \int_0^v du\ \theta_y(nB_u)\ \Big(\prod_{i=1}^{k-2} Ug^i(0)\Big)$$

étude qui a été menée en détail en [11].
A l'aide de (3.i), l'intégrale stochastique :

$$\frac{1}{\sqrt{\log n}} \int_0^{\cdot} \Big(dB_v\ ;\ \sum_{j=2}^{k} D_{j-1}^{(n)}\ (\phi_j,v)\Big)$$

qui figure en (3.h) peut donc être remplacée par :

$$(3.\ell)\qquad \sum_{j=1}^{k-1} \int dy\ g^j(y) \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k-1} Ug^i(0) \int_0^s \Big(dB_v\ ;\ \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} \int_0^v du\ \theta_y(n(B_v-B_u))\Big).$$

Il nous reste maintenant à utiliser le résultat obtenu pour $d = 3$, $k = 2$ (cf. [11]), résultat que nous avons, par ailleurs, présenté en (1.d).
Finalement, sous réserve de la validité de notre conjecture, et des opérations de réduction faites à sa suite, le processus à valeurs dans $\mathbb{R}^4$:

$$\Big(B_t\ ;\ \frac{1}{\sqrt{\log n}} [n^{2k-1}\ I_k^{(n)}(f_k,t) - nt\ f_1]\ ;\ t \geq 0\Big)$$

converge en loi vers :

$$(B_t\ ;\ c(f_k)2\beta_t\ ;\ t \geq 0)$$

où $(\beta_t\ ;\ t \geq 0)$ désigne un mouvement brownien réel indépendant de $(B_t\ ;\ t \geq 0)$ et

$$c(f_k) = \int_{(\mathbb{R}^3)^{k-1}} dy_1 \ldots dy_{k-1}\, m(y_1,\ldots,y_{k-1}) f_k(y_1,\ldots,y_{k-1})$$

avec :

$$m(y_1,\ldots,y_{k-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{k-1}} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\prod_{i\neq j} |y_i|} .$$

(iii) Pour étayer notre conjecture, nous montrons qu'elle est effectivement vérifiée pour $k = 3$.
Le terme de type (I), resp : (III), qui figure dans le développement de (3.i) est :

$$\text{(3.m)} \qquad \int_0^t (dB_v \;;\; X_v^n), \quad \text{resp :} \quad \int_0^t (dB_v \;;\; Y_v^n),$$

où :

$$X_v^n = \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} \int_0^v du\, \nabla(Ug^2)(nB_u)\; Ug^1(n(B_v - B_u))$$

$$Y_v^n = \frac{n^3}{\sqrt{\log n}} \int_0^v du\; \nabla(Ug^2)(nB_u) \int_u^v (dB_s, \nabla(Ug^1)(n(B_s - B_u))).$$

Nous allons étudier les quantités $\|X_v^n\|_2$ et $\|Y_v^n\|_2$.

On a :

$$\|X_v^n\|_2 \leq \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} \int_0^v du\; \|\nabla(Ug^2)(nB_u)\|_2\; \|(Ug^1)(n(B_{v-u}))\|_2$$

$$\|Y_v^n\|_2 \leq \frac{n^3}{\sqrt{\log n}} \int_0^v du\; \|\nabla(Ug^2)(nB_u)\|_2\; \|M_{v-u}^n\|_2,$$

où $\quad M_t^n = \int_0^t (dB_s \;;\; \nabla(Ug^1)(nB_s)).$

Nous prouverons plus loin les estimations suivantes, valables pour tout s :

$$\text{(3.n)} \qquad \|\nabla(Ug^2)(nB_s)\|_2 \leq \frac{C}{1+(n^2 s)^{2/3}}$$

$$\text{(3.o)} \qquad \|(Ug^1)(nB_s)\|_2 \leq \frac{C}{1+ns^{1/2}}$$

$$\text{(3.p)} \qquad \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} \|M_t^n\|_2 \leq C\sqrt{t}$$

la constante C dépendant seulement de g^1 et g^2.

A l'aide de (3.n) et (3.o), on obtient :

$$\|X_v^n\|_2 \leq C^2 \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} \int_0^v du \frac{1}{[1+(n^2u)^{2/3}]} \frac{1}{[1+n(v-u)^{1/2}]}$$

$$\leq C^2 \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} \int_0^v \frac{du}{1+(n^2u)^{2/3}\, n(v-u)^{1/2}}$$

$$\leq C^2 \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} \frac{1}{n^{7/3}\, v^{1/6}} \int_0^1 \frac{du}{u^{2/3}(1-u)^{1/2}}.$$

L'intégrale stochastique, en (3.m), dans laquelle figure (X_v^n) converge donc dans L^2 vers 0.

A l'aide de (3.n) et (3.p), on obtient :

$$\|Y_v^n\|_2 \leq C^2 \sqrt{t}\cdot n \int_0^v du \frac{1}{1+(n^2u)^{2/3}} \leq \frac{C^2 \sqrt{t}}{n^{1/3}} \int_0^v du/u^{2/3} ;$$

l'intégrale stochastique, en (3.m), dans laquelle figure Y_v^n converge donc dans L^2 vers 0.

Démontrons maintenant les estimations (3.n), (3.o) et (3.p).

Notons N une variable gaussienne, centrée, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, de covariance la matrice identité.

(3.n) découle de :

$$|\nabla(Ug^2)(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^2} \quad \text{et} \quad E\Big[\frac{1}{(1+a|N|^2)^2}\Big] \leq c\Big(\frac{1}{1+a^{4/3}}\Big)$$

(3.o) découle de :

$$|Ug^1(x)| \leq \frac{C}{1+|x|} \quad \text{et} \quad E\Big[\frac{1}{(1+a|N|)^2}\Big] \leq c\Big(\frac{1}{1+a}\Big).$$

Enfin, (3.p) découle de ce que, d'après [11], $\langle \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} M^n \rangle_t$ converge dans L^2 vers un multiple de t.

4. ETUDE POUR $d = 1$.

(4.1) Pour cette dimension, il est plus intéressant de considérer $f : \mathbb{R}_+^{k-1} \to \mathbb{R}$, borélienne, bornée, à support compact, et de modifier la définition de $I_k^{(n)}(f;t)$ en :

$$\tilde{I}_k^{(n)}(f;t) = \int_{[0,t]^k} du_1 \dots du_k \; f(n(B_{u_2}-B_{u_1}),\dots,n(B_{u_k}-B_{u_{k-1}})).$$

Introduisons, de plus, la famille bicontinue des temps locaux $(\ell_t^x \; ; \; x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ associés à B. On peut maintenant énoncer le

Théorème (4.1) : Pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+^{k-1} \to \mathbb{R}$, *borélienne, bornée, à support compact, on a :*

$$(4.a) \qquad n\{n^{k-1}\tilde{I}_k^{(n)}(f;t) - (\int dy\; f(y))\int dx(\ell_t^x)^k\} \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} \left(-2\int dx(\ell_t^x)^{k-1}\right)\int dy_1\dots dy_{k-1}\; f(y)\left(\sum_{p=1}^{k-1} y_p(k-p)p\right).$$

Remarquons tout d'abord, pour amorcer la démonstration du théorème, que l'expression qui figure en (4.a) peut être réécrite - après un changement de variables élémentaires - sous la forme :

$$\int_{\mathbb{R}^{k-1}} dy\; f(y)\; \Delta_n(y), \qquad \text{où :}$$

$$(4.b) \qquad \Delta_n(y) = n\int_{-\infty}^{\infty} dx\{\ell_t^x\, \ell_t^{x+\frac{y_1}{n}} \dots \ell_t^{x+\frac{y_1+\dots+y_{k-1}}{n}} - (\ell_t^x)^k\}$$

(4.2) Pour étudier la convergence de Δ_n, nous utiliserons le

Lemme (4.2) : 1) Pour tout $t > 0$, le processus : $x \to \ell_t^x$ est une semi-martingale (par rapport à sa propre filtration), dont le crochet satisfait :

$$(4.c) \qquad \langle \ell_t^{\cdot} \rangle_b - \langle \ell_t^{\cdot} \rangle_a = 4\int_a^b du\; \ell_t^u \qquad (a < b)$$

2) Pour tout $m \geq 1$, et $n \geq 0$, on a :

$$(4.d) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} (\ell_t^u)^n\, d_u(\ell_t^u)^m = -2mn\int_{-\infty}^{\infty} (\ell_t^u)^{n+m-1}\, du.$$

Démonstration : a) La partie 1) du lemme est dûe à Perkins [15] (voir aussi Jeulin [16] pour l'étude de $\ell_t^{\bullet}$ dans la filtration des excursions browniennes). La formule (4.c) est également un cas particulier des résultats généraux de Bouleau-Yor [17].

b) Remarquons maintenant que, pour toute fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^2, on a, pour $a < b$:

$$\phi(\ell_t^b) - \phi(\ell_t^a) = \int_a^b \phi'(\ell_t^u) d_u(\ell_t^u) + 2 \int_a^b \phi''(\ell_t^u)\ell_t^u \, du,$$

soit, en faisant tendre a vers $-\infty$, resp : b vers $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi'(\ell_t^u) d_u(\ell_t^u) = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi''(\ell_t^u)\ell_t^u \, du.$$

On en déduit, par classe monotone, que, pour toute fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, borélienne, bornée, on a :

$$(4.e) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\ell_t} d\ell \; g(\ell)\right) d_u(\ell_t^u) = -2 \int_{-\infty}^{\infty} g(\ell_t^u)\ell_t^u \, du.$$

Cette formule est encore valable, par localisation, pour toute fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue. La formule (4.d) découle alors de (4.e), lorsque l'on prend $g(x) = n(\varepsilon+x)^{n-1}$, que l'on fait tendre ε vers 0, et que l'on développe $d_u(\ell_t^u)^m$ à l'aide de la formule d'Itô.

(4.3) Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du théorème (4.1). Développons l'intégrand :

$$\Lambda(x,y) \equiv \ell_t^x \, \ell_t^{x+\frac{y_1}{n}} \cdots \ell_t^{x+\frac{y_1+\dots+y_{k-1}}{n}} - (\ell_t^x)^k$$

qui figure dans la représentation de $\Delta_n(y)$ en (4.b), de la manière suivante : si l'on note $S_p(y) = \dfrac{y_1+\dots y_p}{n}$, on peut écrire :

$$\Lambda(x,y) = \sum_{p=0}^{k-2} \ell_t^x \cdots \ell_t^{x+S_p(y)} \int_{x+S_p(y)}^{x+S_{p+1}(y)} d_u(\ell_t^u)^{k-(p+1)},$$

où $d_u(\ell_t^u)^{k-(p+1)}$ est la différentielle stochastique de la semimartingale $u \to (\ell_t^u)^{k-(p+1)}$.

On en déduit, par un argument de type Fubini, qui ne présente pas de difficulté :

$$\Delta_n(y) \equiv n \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \Lambda(x,y) = \sum_{p=0}^{k-2} \int_{-\infty}^{\infty} d_u(\ell_t^u)^{k-(p+1)})\ n \int_{u-S_{p+1}(y)}^{u-S_p(y)} dx\ \ell_t^x \ldots \ell_t^{x+S_p(y)},$$

et donc :

$$\Delta_n(y) \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} \sum_{p=0}^{k-2} y_{p+1} \int_{-\infty}^{\infty} d_u((\ell_t^u)^{k-(p+1)})(\ell_t^u)^{p+1}$$

$$= -2 \sum_{p=0}^{k-2} y_{p+1}\ (k-(p+1))(p+1) \int_{-\infty}^{\infty} du(\ell_t^u)^{k-1},$$

cette dernière égalité résultant de la formule (4.d).

Le théorème (4.1) découle finalement de ce résultat, à l'aide d'un argument de convergence dominée. □

REFERENCES :

[1] *E.B. DYNKIN* : Polynomials of the occupation field and random fields. J. Funct. Anal. 58, 1, 1984, 20-52.

[2] *E.B. DYNKIN* : Functionals associated with self-intersections of the planar Brownian motion. Sém. Probas XX. Lect. Notes in Maths. 1204, Springer (1986).

[3] *Th. JEULIN* : Semi-martingales et grossissement de filtrations. Lect. Notes in Maths. 833. Springer (1980).

[4] *Y. KASAHARA, S. KOTANI* : On limit processes for a class of additive functionals of recurrent diffusion processes. Zeitschrift für Wahr., 49, 133-153, 1979.

[5] *J.F. LE GALL* : Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan, et la méthode de renormalisation de Varadhan. Sém. Probas XIX, Lect. Notes in Math. 1123, Springer (1985).

[6] *P.A. MEYER* : Probabilités et potentiels. Hermann (1966).

[7] *J. ROSEN* : Tanaka's formula and renormalization for intersections of planar Brownian motion. Preprint (1984).

[8] *J. ROSEN* : A renormalized local time for multiple intersections of planar Brownian motion. Sém. Probas XX. Lect. Notes in Maths. 1204, Springer (1986).

[9] *S. VARADHAN* : Appendix to : "Euclidean Quantum field theory" by K. Symanzik, in : Loacal Quantum theory, R. Jost (ed.), Academic Press (1969).

[10] *M. YOR* : Compléments aux formules de Tanaka-Rosen. Sém. Probas XIX, L.N. in Maths. 1123, Springer (1985).

[11] *M. YOR* : Renormalisation et convergence en loi pour les temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$. Sém. Probas XIX, L.N. in Maths 1123, Springer (1985).

[12] *M. YOR* : Renormalisation et convergence en loi pour les temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^2$. A paraître (1987).

[13] *J. ROSEN and M. YOR* : Renormalization results for some triple integrals of two-dimensional Brownian motion. To appear (1987).

[14] *H. TANAKA* : Certain limit theorems concerning one-dimensional diffusion processes. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 12, 1-11 (1958).

[15] *E. PERKINS* : Local time is a semi-martingale. Z.f.W., 60, 79-118 (1982).

[16] *Th. JEULIN* : Application de la théorie du grossissement à l'étude des temps locaux browniens. Lect. Notes in Maths. 1118. Springer (1985).

[17] *N. BOULEAU, M. YOR* : Sur la variation quadratique des temps locaux de certaines semi-martingales. C.R.A.S. t. 292, Série I, 491-494 (1981).