SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DOMINIQUE BAKRY

Étude des transformations de Riesz dans les variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 21 (1987), p. 137-172
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1987__21__137_0>

Etude des transformations de Riesz dans les variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée.

Dominique Bakry

Institut de Recherche Mathématique Avancée,

7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex.

0. Introduction et notations.

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, le laplacien Δ est un opérateur autoadjoint négatif sur $\mathbb{L}^2(dx)$, et on peut donc définir sans ambiguité l'opérateur autoadjoint $(-\Delta)^{1/2}$. Un célèbre théorème d'analyse affirme la chose suivante: pour tout p, $1<p<\infty$, il existe deux constantes c_p et C_p telles que, pour toute fonction f de classe C^∞ et à support compact,

$$c_p \|df\|_p \leq \|(-\Delta)^{1/2}f\|_p \leq C_p \|df\|_p \qquad (0.1)$$

(ici, $\|\ \|_p$ désigne la norme dans $\mathbb{L}^p(dx)$).

Une manière équivalente d'énoncer ce résultat est de dire que les transformations de Riesz $R_i f = \frac{d}{dx_i}(-\Delta)^{-1/2}f$ sont des opérateurs bornés dans $\mathbb{L}^p(dx)$.

De nombreux auteurs ont étudié des extensions de ce résultat à des situations plus générales: on peut remplacer l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ par une variété riemannienne E et Δ par l'opérateur de Laplace-Beltrami sur E et se poser le problème de la validité de l'inégalité 0.1 . On peut également remplacer la variété E par un espace mesuré $(E,\mathcal{E},\mu)$ et Δ par le générateur L d'un semi-groupe markovien symétrique: dans ce cas, il convient de remplacer $|df|^2$ par l'opérateur carré du champ de L (s'il existe), défini par $\Gamma(f, f) = \frac{1}{2}(Lf^2-2fLf)$ (il s'agit de la même chose lorsque $L = \Delta$ sur une variété riemannienne).

Dans son livre [St], Stein démontre l'inégalité 0.1 lorsque Δ est l'opérateur de Casimir d'un groupe de Lie semisimple compact: on est alors dans une situation simplifiée où il existe des champs de vecteurs $(X_1,\dots, X_n)$ tels que

$|df|^2 = \Sigma_i(X_i f)^2$, et $[\Delta, X_i] = 0$ pour tout i. Comme dans le cas de $\mathbb{R}^n$, c'est l'annulation de ce commutateur qui fait marcher la démonstration.

Dans [S], Strichartz démontre une inégalité de type 0.1 sur les espaces non compacts symétriques de rang 1, tandis que dans [M1], Meyer établit l'inégalité 0.1 pour l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck, en dimension finie ou infinie: dans ce dernier cas, le laplacien Δ de $\mathbb{R}^n$ est remplacé par l'opérateur $L = \Delta - r\frac{\partial}{\partial r}$, qui est symétrique dans l'espace $\mathbb{L}^2$ de la mesure gaussienne $\exp(-\frac{1}{2}r^2)dx$. Les normes $\mathbb{L}^p$ sont alors relatives à cette mesure. La situation est alors beaucoup plus compliquée que dans le cas de Stein, car l'opérateur carré du champ $\Gamma(f,f)$ s'écrit $\Sigma_i(X_i f)^2$, avec $[L, X_i] = X_i$ pour tout i.

Dans [L], Lohoué s'intéresse à ce problème dans des variétés complètes simplement connexes, de courbure sectionnelle négative (variétés de Cartan-Hadamard), et dont la courbure, ainsi que ses deux premières dérivées covariantes, sont bornées. Dans ce cas, il obtient une inégalité du type $\|df\|_p \leq C_p(\|f\|_p + \|(-\Delta)^{1/2}f\|_p)$. Enfin, dans [Bl], nous démontrons l'inégalité 0.1 pour $p>2$ pour des variétés à courbure de Ricci positive ou nulle, qui s'étend à des générateurs de semigroupes markoviens généraux (sans hypothèse de localité sur L) sous une hypothèse de type $\Gamma_2 \geq 0$, qui est une généralisation de la not on de courbure de Ricci positive ou nulle.

Dans cet article, on se place dans une variété riemannienne complète E, et on considère une fonction $\rho(x)$ partout strictement positive sur E. L'opérateur $L = \Delta + \mathrm{grad}(\mathrm{Log}\rho)$ est autoadjoint sur $\mathbb{L}^2(\rho(x)dx)$. On désigne par Ric le tenseur de Ricci de E et par R le tenseur symétrique $\mathrm{Ric} - \nabla\nabla(\mathrm{Log}\rho)$; $\|\ \|_p$ désigne la norme dans $\mathbb{L}^p(\rho(x)dx)$. L'hypothèse fondamentale est qu'il existe une constan te α positive ou nulle telle que pour tout champ de vecteurs X $R(X,X) \geq -\alpha^2|X|^2$. Notre principal résultat est le suivant: il existe pour tout p, $1<p<\infty$, deux constantes c_p et C_p telles que, pour toute fonction de classe C^∞ et à support compact dans E,

$$c_p\|(-L)^{1/2}f\|_p \leq \alpha\|f\|_p + \|df\|_p \leq C_p[\alpha\|f\|_p + \|(-L)^{1/2}f\|_p].$$

Les constantes c_p et C_p sont des constantes universelles, qui ne dépendent que de p (en particulier, elles ne dépendent ni de la dimension de E, ni de α).

Le point essentiel de la démonstration est l'introduction, parallèlement à l'opérateur L défini sur les fonctions, d'un opérateur $\vec{L}$ **autoadjoint défini sur** les 1-formes (ce sera le laplacien de deRahm lorsque $L=\Delta$) qui satisfait à

$$\vec{L}\,df = dLf \tag{0.2}$$

et à
$$L|\omega|^2 = 2\omega.\vec{L}\omega + 2|\nabla\omega|^2 + 2R^*(\omega,\omega) \tag{0.3}$$

où R^* est la forme quadratique obtenue sur les 1-formes, par l'identification canonique des formes aux vecteurs, à partir de la forme quadratique R. L'inégalité $R^*(\omega,\omega) \geq r_0|\omega|^2$ se traduit alors dans les semigroupes $P_t = \exp(tL)$ et $\vec{P}_t = \exp(t\vec{L})$ par $|\vec{P}_t\omega| \leq e^{-r_0 t}P_t|\omega|$ et c'est cette inégalité que nous exploitons au maximum.

Après une première partie consacrée à des généralités, nous étudions dans une seconde partie différents types de prolongements harmoniques dans $E\times\mathbb{R}_+$ de fonctions et de champs de vecteurs définis sur E; dans la troisième partie, nous démontrons des inégalités de Littlewood-Paley adaptés à ce type de prolongements. Dans la quatrième partie, nous démontrons le résultat annoncé, et nous en tirons quelques conséquences; la cinquième partie est consacrée à une extension des résultats de la quatrième aux p-formes sur E, tandis que la dernière est consacrée à l'extension de ces résultats aux champs de tenseurs dans le cadre des variétés d'Einstein. Enfin, nous passons complètement sous silence les problèmes posés par les cas p=1 et $p=\infty$ (caractérisation des espaces H^1 en termes de martingales et dualité H^1-BMO) qui feront l'objet d'un article ultérieur.

Notations

E désigne une variété riemannienne de classe C^∞, connexe et complète; C_c^∞ désigne l'espace des fonctions de classe C^∞ et à support compact sur E; lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre, on utilisera la même notation pour l'espace des k-formes C^∞ à support compact, où pour l'espace des tenseurs C^∞ à support compact et d'ordre k. On note T_xE l'espace tangent à E au point x, et T_x^*E son dual. * désignera l'isomorphisme canonique de T_x^*E dans T_xE et $_*$ son inverse: ainsi, si ω est une 1-forme de composantes ω_i dans un système de coordonnées locales, ω^* désigne le vecteur de composantes ω^i. Si ε et ω sont deux formes sur E, leur produit scalaire dans T_x^*E est noté $\omega.\varepsilon$, et $|\omega|$ désigne la longueur $(\omega.\omega)^{1/2}$.

Dans tout ce qui suit, d désigne l'opérateur de différentiation extérieure sur les k-formes, et ∇ l'opérateur de dérivation covariante; Δ $(=\nabla^i\nabla_i)$ désigne l'opérateur de Laplace-Beltrami (agissant aussi bien sur les fonctions que sur les tenseurs, y compris les formes). Le tenseur de courbure $r_{ij\ l}^{\ \ k}$ est défini en coordonnées par $(\nabla_i\nabla_j-\nabla_j\nabla_i)X^k = r_{ij\ l}^{\ \ k}X^l$ et le tenseur de Ricci Ric est défini en coordonnées par $Ric_{ab} = r_{ia\ b}^{\ \ i}$. Enfin, dx désigne la mesure riemannienne.

On se donne sur E une fonction $\rho(x)$, de classe C^∞, strictement positive, fixée une fois pour toutes; $m(dx)$ désigne la mesure $\rho(x)dx$. Si la fonction ρ est dans $\mathbb{L}^1(dx)$, on supposera toujours que $m(E)=1$. L'espace $\mathbb{L}^p(m)$ est noté $\mathbb{L}^p$ $(1\leq p\leq \infty)$, et la norme dans $\mathbb{L}^p$ est notée $\| \ \|_p$. De même, si ω est une 1-forme de C_c^∞, on note $\|\omega\|_p$ la quantité $\| \, |\omega| \, \|_p$, et $\vec{\mathbb{L}}^p$ désigne le complété pour la norme $\| \ \|_p$ de l'espace des 1-formes de C_c^∞.

Pour alléger les notations, on posera $\langle f\rangle = \int f dm$ et $\langle f,g\rangle = \langle fg\rangle$ désignera le produit scalaire dans $\mathbb{L}^2$; de la même façon, on utilisera, pour des 1-formes, la notation $\langle\omega,\varepsilon\rangle = \langle\omega.\varepsilon\rangle$.

On désigne par L l'opérateur défini sur les fonctions C^∞ par $Lf = \Delta f + df.dLog\rho$. Si f et g sont dans C_c^∞ , on a $\langle Lf,g\rangle = \langle f,Lg\rangle$, si bien que L est un opérateur symétrique dans $\mathbb{L}^2$: on verra qu'en fait, il y est essentiellement autoadjoint. Notons immédiatement la formule du changement de variables pour L: si $f=(f^1,\dots,f^n)$ est un n-uplet de fonctions de classe C^∞ sur E, et si $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞, de dérivées premières et secondes $D_i\varphi$ et $D_{ij}\varphi$, on a $L\varphi(f) = D_i\varphi(f)Lf^i + D_{ij}\varphi(f)df^i.df^j$.

Enfin,nous désignerons par R le tenseur symétrique $Ric-\nabla\nabla Log\rho$; il détermine une forme quadratique sur TE , qui s'écrit en coordonnées locales $R(X,X)= R_{ab}X^aX^b$. L'hypothèse essentielle dans tout ce travail est qu'il existe une constante, qui sera toujours notée r_o par la suite, telle que $R(X,X) \geq r_o|X|^2$.

I-Généralités.

Dans cette section, nous suivrons de près l'article de Strichartz [S]. Après avoir démontré que l'opérateur L est essentiellement autoadjoint sur $\mathbb{L}^2$, nous construisons un opérateur $\vec{L}$, autoadjoint sur $\vec{\mathbb{L}}^2$, qui satisfait à $dL = \vec{L}d$. Les semigroupes associés $P_t = \exp(tL)$ et $\vec{P}_t = \exp(t\vec{L})$ satisfont également à $dP_t = \vec{P}_t d$. Enfin, on prouve la relation fondamentale $|\vec{P}_t\omega| \leq e^{-r_0 t} P_t|\omega|$.

L'opérateur L et le semigroupe P_t.

Nous commençons par un lemme, qui est une conséquence de la complétion de E, et en fait lui est équivalent:

Lemme 1.1. Il existe dans C_c^∞ une suite croissante de fonctions (h_n) comprises entre 0 et 1, convergent vers 1, et telle que $|dh_n| \leq \frac{1}{n}$.

Preuve: tout d'abord, le lemme est vrai lorsque $E = \mathbb{R}$; soit (h_n^0) une suite satisfaisant aux exigences du lemme dans ce cas. Si d'autre part E est complète, il existe sur E une fonction C^∞ h, tendant vers l'infini à l'infini, et telle que $|dh| \leq 1$ (cf par exemple Gaffney [G]). Alors, la suite $(h_n) = (h_n^0 o h)$ répond aux exigences du lemme.

Une des principales conséquences de ce lemme est la proposition suivante:

Proposition 1.2. L'opérateur L, défini sur C_c^∞, y est essentiellement autoadjoint; pour toute fonction f de classe C^∞ et pour tout g de C_c^∞, on a

$$\langle f,Lg\rangle = \langle g,Lf\rangle = -\langle df,dg\rangle . \qquad (1.1)$$

Preuve: prouvons d'abord la formule (1.1), qui démontre la symétrie de L. On ne perd rien à supposer que f et g sont dans C_c^∞; on a

$\langle Lf,g\rangle = \int \rho g \Delta f dx + \int g d\rho . df\, dx$. Or, $\int g\rho\Delta f\, dx = -\int d(g\rho).df\, dx$.

Il ne reste plus qu'à écrire $d(g\rho) = \rho dg + g d\rho$ pour obtenir (1.1).

Pour démontrer que L est autoadjoint, nous recopions ce qu'écrit Strichartz dans le cas où $L = \Delta$. Désignons par L' l'adjoint de L dans $\mathbb{L}^2$. La formule (1.1) montre que $\langle Lf,f\rangle \leq 0$, pour tout élément de C_c^∞; dans ces conditions, nous pouvons appliquer un critère de Reed et Simon [RS, p.137]: L est essentiellement autoadjoint si et seulement si il existe un réel positif qui n'est pas valeur propre de L'. Or, nous allons voir que, si $a>0$, toute solution de $L'f = af$ est nulle. En effet, L' est un prolongement de L et L est un opérateur elliptique: f est donc solution au sens des distributions d'une équation elliptique, et par suite est de classe C^∞. Soit alors g un élément de C^∞_c : on a $0 \leq a<f^2,g^2> = <L'f,g^2f> = <f,L(g^2f)> = -<df,d(g^2f)> =$

$$= -<g^2,|df|^2> -2<fg,df.dg> .$$

On en déduit $\quad <g^2,|df|^2> \leq -2<fg,df.dg> \leq 2<g^2,|df|^2>^{1/2} \|f\|_2 \|dg\|_\infty$.

Par conséquent $\quad <g^2,|df|^2>^{1/2} \leq 2 \|f\|_2 \|dg\|_\infty$.

Dans cette inégalité, remplaçons g par l'un des éléments de la suite (h_n) du lemme 1.1: on obtient $<h_n^2,|df|^2> \leq \frac{2}{n} \|f\|_2$.

En passant à la limite, on obtient $df = 0$; par suite, f est constante, et donc $0 = Lf = L'f = af$, d'où $f = 0$.

Appelons $\mathbb{D}(L)$ le domaine de l'opérateur L' dans $\mathbb{L}^2$. La proposition précédente montre que C^∞_c est dense dans $\mathbb{D}(L)$, avec la topologie du domaine. La proposition suivante étend la formule (1.1) aux éléments de classe C^∞ de $\mathbb{D}(L)$:

<u>Proposition 1.3</u>. Soient f et g deux éléments de classe C^∞ de $\mathbb{D}(L)$; alors $Lf = L'f$ est dans $\mathbb{L}^2$, df et dg sont dans $\vec{\mathbb{L}}^2$, et l'on a

$$<f,Lg> = -<df,dg> .$$

En vertu de la remarque précédente, la proposition 1.3 découle immédiatement du lemme suivant:

<u>Lemme 1.4</u>. Soit f un élément de classe C^∞ du domaine et soit (f_n) une suite d'éléments de C^∞_c qui converge vers f dans $\mathbb{D}(L)$:

1- Pour tout élément g de C^∞_c, (gf_n) converge vers gf dans $\mathbb{D}(L)$.

2- (df_n) converge dans $\vec{\mathbb{L}}^2$ vers df.

Preuve: 1- L étant un opérateur fermable, il suffit de démontrer que la suite $(L(gf_n))$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2$; or, en vertu de la formule du changement de variables, on a $L(gf_n) = gLf_n + 2dg.df_n + f_n Lg$.

Mais gLf_n converge dans $\mathbb{L}^2$ vers $gL'f$, et $f_n Lg$ converge dans $\mathbb{L}^2$ vers fLg. Il nous reste à étudier la suite $df_n.dg$; or

$$\|df_n.dg - df_m.dg\|_2 \leq \|dg\|_\infty \|d(f_n-f_m)\|_2 \quad \text{et}$$

$$\|d(f_n-f_m)\|_2^2 = -\langle f_n-f_m, L(f_n-f_m)\rangle \leq \|f_n-f_m\|_2 \|L(f_n-f_m)\|_2 .$$

Ceci montre que $df_n.dg$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2$.

2- La majoration précédente montre qu'en fait, pour des éléments de C_c^∞, on a $\|df\|_2 \leq \|f\|_{\mathbb{D}(L)}$. Ceci démontre 2- lorsque f est dans C_c^∞ . Dans le cas général, on sait que la suite (df_n) est de Cauchy dans $\vec{\mathbb{L}}^2$, et il ne reste qu'à identifier sa limite ω. Soit g un élément quelquonque de C_c^∞ : d'après 1-, (gf_n) converge vers gf dans $\mathbb{D}(L)$, et donc, d'après ce qui précède, $(d(gf_n))$ converge dans $\vec{\mathbb{L}}^2$ vers $d(gf)$. Or, $d(gf_n) = gdf_n + f_n dg$, qui converge vers $g\omega + fdg$; on en tire $g\omega = gdf$, et ceci pour tout g de C_c^∞, d'où $\omega = df$.

La décomposition spectrale de L s'écrit $L = -\int_0^\infty \lambda dE_\lambda$. L'espace propre E_0 associé à la valeur propre 0 est aisément caractérisable: tout vecteur propre de L étant de classe C^∞, les éléments de E_0 sont des fonctions constantes. Deux cas peuvent alors se produire:

1- $m(E) = \infty$; dans ce cas, aucune constante n'est dans $\mathbb{L}^2$, et $E_0 = \{0\}$;

2- $m(E) = 1$; dans ce cas, E_0 est l'espace des fonctions constantes.

Dans ces deux cas, nous noterons $\mathbb{L}_0^2$ l'orthogonal de E_0 dans $\mathbb{L}^2$.

Le semigroupe de la chaleur (P_t) est , par définition, le semigroupe d'opérateurs bornés sur $\mathbb{L}^2$ dont la décomposition spectrale est $P_t = \int_0^\infty e^{-t\lambda} dE_\lambda$. Lorsque t tend vers l'infini, $P_t f$ converge, dans $\mathbb{L}^2$, vers la projection de f sur E_0, que nous noterons donc $P_\infty f$. La forme quadratique $-\langle f,Lf\rangle = \langle df,df\rangle$ étant une forme de Dirichlet (au sens du livre de Fukushima [F], par exemple), le semigroupe (P_t) est en fait sousmarkovien: il transforme les fonctions positives en fonctions positives, et $P_t 1 \leq 1$. Ici, le tenseur R étant borné inférieurement, nous savons qu'alors $P_t 1 = 1$ (cf [B2], par exemple). D'autre part, l'opérateur L est elliptique, et, pour tout élément f de $\mathbb{L}^2$, la fonction $(t,x) \longrightarrow P_t f(x)$ est solution, au sens des distributions, de l'équation parabolique $(\frac{d}{dt} - L)P_t f(x) = 0$. C'est donc une fonction de classe C^∞ sur $E \times]0,\infty[$. En fait, nous ne nous servirons de ce résultat que pour des fonctions f de C_c^∞, et c'est alors un résultat beaucoup plus élémentaire.

Au semigroupe (P_t) est associé un processus de Markov (X_t), défini sur l'espace canonique Ξ des applications continues de $[0,\infty[$ dans E: (X_t) est le processus des applications coordonnées $X_t(\xi) = \xi(t)$, et on peut définir la loi de (X_t) de la manière suivante: si $\mathbb{F}_t$ désigne la filtration naturelle du processus (X_t), il existe, pour tout point x de E, une unique probabilité P^x sur Ξ qui soit telle que, sous P^x, $X_0 = x$ (p.s.) et telle que $f(X_t) - f(x) - \int_0^\infty (Lf)(X_s)ds$ soit une martingale locale pour toute fonction f de classe C^∞ sur E. En appelant E^x l'espérance sous P^x, on a alors, pour toute fonction f borélienne bornée $P_t f(x) = E^x(f(X_t))$.

L'opérateur $\vec{L}$ et le semigroupe $\vec{P}_t$.

Appelons div l'opérateur de divergence ordinaire, défini pour les 1-formes et les 2-formes, c'est à dire l'adjoint de d pour la mesure de Riemann sur E, et δ l'analogue de div dans notre cadre: $\langle \delta\omega.\varepsilon \rangle = \langle \omega.d\varepsilon \rangle$. Un calcul élémentaire montre que
- pour les 1-formes $\delta\omega = \mathrm{div}\omega - \omega.d(\mathrm{Log}\rho)$;
- pour les 2-formes $\delta\omega = \mathrm{div}\omega - \omega(d(\mathrm{Log}\rho)^*,.)$.

Définition. L'opérateur $\vec{L}$ est défini, pour les 1-formes, par $\vec{L}\omega = -(d\delta+\delta d)\omega$.

La proposition suivante montre comment il est relié au laplacien horizontal $\Delta = \mathrm{trace}(\nabla\nabla)$, ainsi qu'au laplacien de de Rahm $\vec{\Delta} = -(d.\mathrm{div}+\mathrm{div}.d)$, tous deux également définis sur les formes d'ordre 1. Posons, pour tout couple de 1-formes (ω,ε) , $\vec{\omega}(\varepsilon) = d(\omega.\varepsilon) + d\varepsilon(\omega^*,.)$ et $\omega^H(\varepsilon) = \nabla\varepsilon(\omega^*,.)$. De la même manière, pour toute forme bilinéaire T sur TE , posons $\vec{T}(\omega) = T(\omega^*,.)$. On a

<u>Proposition 1.5</u>. a) $\vec{L}^{>} = \vec{\Delta}^{>} + \vec{d}(\mathrm{Log}\rho) = \Delta + d(\mathrm{Log}\rho)^H - \vec{R}^{>}$.

b) Pour toute forme ω, $L|\omega|^2 = 2\omega.\vec{L}^{>}\omega + 2|\nabla\omega|^2 + 2R(\omega^*,\omega^*)$.

<u>Preuve</u>: a) la première égalité est une conséquence directe des formules reliant $\delta\omega$ à $\mathrm{div}\omega$. La seconde provient de la formule de Bochner-Lichnérowicz-Weitzenböck (voir par exemple le livre de Lichnérowicz [L,p.2]): $\vec{\Delta}^{>} = \Delta - \vec{Ric}^{>}$. Or, rappelons que $R = \mathrm{Ric} - \nabla\nabla(\mathrm{Log}\rho)$. La seule chose à remarquer est donc que, pour toute fonction h, $\vec{d}\vec{h}^{>} = dh^H + \nabla\vec{\nabla}\vec{h}^{>}$. Cela provient de la formule

$$d(dh.\omega) = \nabla\omega(.,dh^*) + \nabla\nabla h(.,\omega^*) = \nabla\vec{\nabla}\vec{h}^{>}(\omega) + \nabla\omega(dh^*,.) - d\omega(dh^*,.) .$$

b) Tout d'abord, il est classique et élémentaire que $\Delta|\omega|^2 = 2\omega.\Delta\omega + 2|\nabla\omega|^2$. Ensuite, nous avons, pour toute 1-forme ε, $\varepsilon^*(|\omega|^2) = 2\nabla\omega(\varepsilon^*,\omega^*) = 2\omega.\varepsilon^H(\omega)$.

Il nous reste $(\Delta+\varepsilon^*)(|\omega|^2) = 2\omega.(\Delta+\varepsilon^H)(\omega) + 2\nabla\omega.\nabla\omega$.

Compte tenu de la seconde expression de $\vec{L}^{>}$ dans a), la formule précédente, appliquée avec $\varepsilon = d(\mathrm{Log}\rho)$, n'est autre que l'expression cherchée.

L'opérateur $\vec{L}^{>}$, défini sur les 1-formes C_c^∞, est symétrique dans $\vec{\mathbb{L}}^{>2}$ et négatif. La formule suivante, valable pour tout couple (ε,ω) de 1-formes C_c^∞, est une conséquence directe de la définition:

$$\langle\omega,\vec{L}^{>}\varepsilon\rangle = -\langle d\omega,d\varepsilon\rangle - \langle\delta\omega,\delta\varepsilon\rangle \qquad (1.2)$$

En fait, la proposition suivante renforce cette remarque:

<u>Proposition 1.6</u>. $\vec{L}^{>}$ est un opérateur essentiellement autoadjoint sur $\vec{\mathbb{L}}^{>2}$.

<u>Preuve</u>: la démonstration de ce résultat est très proche de celle de la proposition 1.2. Comme de plus elle ne ferait que recopier la démonstration de Strichartz [S] dans le cas où $\vec{L}^{>} = \vec{\Delta}^{>}$, nous l'odmettrons.

L'opérateur autoadjoint $\vec{L}^{>}$ admet une décomposition spectrale $\vec{L}^{>} = -\int_0^\infty \lambda d\vec{E}_\lambda^{>}$, et ceci nous permet de définir un semigroupe symétrique $\vec{P}_t^{>}$ de contractions de $\vec{\mathbb{L}}^{>2}$ $\vec{P}_t^{>} = \int_0^\infty e^{-t\lambda} d\vec{E}_\lambda^{>}$. De même que le semigroupe (P_t),

$(\vec{P}_t^{>})$ admet une interprétation probabiliste que nous décrivons ci-dessous, en suivant Elworthy [E, p.567.08].

Considérons le fibré des repères orthonormés $\pi: O(E) \longrightarrow E$ et le relèvement horizontal $H_o: T_{\pi(o)}E \longrightarrow T_oO(E)$; on introduit des champs de vecteurs canoniques sur $O(E)$ en posant $X_i(o) = H_o(o_i)$ $(o = (o_1,\dots,o_n))$. Introduisons également le relèvement horizontal du champ $d\mathrm{Log}\rho^*$ $U(o) = H_o(d\mathrm{Log}\rho^*(\pi(o)))$. L'opérateur $L^{\#} = \Sigma_i X_i^2 + U$ est le générateur infinitésimal d'un processus de Markov (o_t) sur $O(E)$, qui est tel que, sous P^o, $(\pi(o_t))$ suit la loi $P^{\pi(o)}$. Pour tout o dans $O(E)$, on peut considérer o_t comme une isométrie de $T_{\pi(o_0)}E$ dans $T_{\pi(o_t)}E$.

D'autre part, appelons $\vec{R}_*^{>}$ l'application de TE dans lui même définie par $\vec{R}_*^{>}(X) = R(X,.)^*$. On définit un processus (v_t), à valeurs dans le fibré tangent, par l'équation $\frac{d}{dt}\, o_t^{-1}(v_t) = -o_t^{-1}(\vec{R}_*^{>}v_t)$; $v_0 \in T_{\pi(o_0)}E$.

Il est à peu près immédiat sur la définition de v_t qu'on a $|v_t|^2 = |v_0|^2 - 2\int_0^t R(v_s,v_s)ds$. Par conséquent, r_o étant une borne inférieure du tenseur R,

$$|v_t| \leq \exp(-r_o t)|v_0| . \tag{1.3}$$

Notons E^v la loi de (v_t) sous la condition initiale $v_0 = v$ (v étant un point fixé de TE); on peut poser, pour toute 1-forme ω de C_c^∞, $\bar{P}_t(\omega)(v) = E^v\omega(v_t)$. D'après la formule (1.3), on a

$$|\bar{P}_t(\omega)(v)| \leq E^v|\omega|(\pi(v_t))|v_t| \leq e^{-r_o t}|v|E^{\pi(v)}|\omega|(\pi(o_t)) = e^{-r_o t}|v|.P_t|\omega|.$$

On en tire $|\bar{P}_t\omega| \leq e^{-r_o t}P_t|\omega|$. $\quad$ (1.4)

D'autre part, pour toute 1-forme ω à support compact, on a

$$\bar{P}_t\omega = \omega + \int_0^t \bar{P}_s \vec{L}^{>}\omega ds$$

et, par conséquent, $\bar{P}_t$ définit un semigroupe d'opérateurs bornés sur $\vec{\mathbb{L}}^{>2}$ qui n'est autre que $\vec{P}_t^{>}$.

La proposition suivante résume les principales propriétés de $\vec{P}_t^{>}$ dont nous servirons par la suite:

<u>Proposition 1.7</u>. a) $|\vec{P}_t^{>}\omega| \leq \exp(-r_o t)P_t|\omega|$.

b) $\|\vec{P}_t^{>}\omega\|_p \leq \exp(-r_o|1-\frac{2}{p}|t)\,\|\omega\|_p$; $1 \leq p \leq \infty$.

c) $\vec{P}_t^{>}df = dP_t f$; $f \in C_c^\infty$.

d) Si ω est dans C_c^{∞}, $\vec{P}_t\omega$ est de classe C^{∞} sur $E\times[0,\infty[$, et l'on a $\frac{d}{dt}\vec{P}_t\omega = \vec{L}\vec{P}_t\omega = \vec{P}_t\vec{L}\omega$.

Preuve: a) n'est autre que l'inégalité (1.4).

b). Nous avons déjà vu que $\vec{P}_t$ est une contraction de $\vec{\mathbb{L}}^2$. Mais l'inégalité a) montre que la norme de $\vec{P}_t$ dans $\vec{\mathbb{L}}^1$ ainsi que dans $\vec{\mathbb{L}}^{\infty}$ est majorée par $\exp(-r_o t)$. b) s'ensuit par interpolation.

c) Cette égalité résulte immédiatement de l'égalité $\vec{L}df = dLf$ et du caractère autoadjoint du semigroupe $\vec{P}_t$.

d)C'est immédiat à partir de la construction probabiliste de $\vec{P}_t$; en fait, en vertu du caractère elliptique de $\vec{L}$, $\vec{P}_t\omega$ est de classe C^{∞} sur $E\times]0,\infty[$ dès que ω est dans $\vec{\mathbb{L}}^2$.

II Différents types de prolongements harmoniques.

Les démonstrations classiques des résultats sur les transformations de Riesz dans $\mathbb{R}^n$ font intervenir les prolongements harmoniques à $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$, c'est à dire des solutions de $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta)f(x,t) = 0$. (t désigne ici la variable de $\mathbb{R}_+$ et x la variable de $\mathbb{R}^n$. Pour prendre en compte les phénomènes de courbure, nous allons nous intéresser ici à des solutions, sur $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+$, d'équations de la forme $[(\frac{\partial}{\partial t} - (s-d)I)(\frac{\partial}{\partial t} - (s+d)I) + L]f(x,t) = 0$, ainsi qu'à des solutions d'équations analogues sur les 1-formes. Ces solutions sont définies à partir de leur restriction f_o au bord $\{t=0\}$ par $f(x,t) = Q_t^{s,d}f_o(x)$, où les semigroupes $Q_t^{s,d}$ sont des semigroupes subordonnés au semigroupe P_t. Dans cette partie, après les avoir définis, ainsi que leurs analogues $\vec{Q}_t^{s,d}$, nous en donnons les propriétés élémentaires.

Tout d'abord, nous commençons par introduire quelques nouvelles notations. Sur $\mathbb{R}_+$, D_o désignera l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$ et $L_o^{s,d}$ l'opérateur $(D_o - (s-d)I)(D_o -(s+d)I) = D_o^2 - 2sD_o + (s^2-d^2)I$ $(s\in\mathbb{R}$, $d\geq 0)$. On appelle M_b l'opérateur de multiplication par $\exp(bt)$, de sorte que

$$M_bL_o^{s,d}M_{-b} = L_o^{s+b,d}. \tag{2.1}$$

Sur $E\times\mathbb{R}_+$, $L^{s,d}$ désigne l'opérateur $L_o^{s,d} + L$, et $\vec{L}^{s,d}$ son homologue fléché $L_o^{s,d} + \vec{L}$. Lorsque $s = d$, nous écrirons simplement L_o^d , L^d , $\vec{L}^d$.

Enfin, la notation $|\bar{d}f|^2$ désigne $|df|^2 + (D_o f)^2$, et on définit de même, pour une famille de 1-formes $\omega(x,t)$ dépendant de t les notations $|\bar{d}\omega|^2$, $|\bar{\nabla}\omega|^2$.

Pour commencer, rappelons la formule du semigroupe stable d'ordre $\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$m_t(du) = \pi^{-(1/2)} t u^{-(3/2)} \exp(-t^2/(4u))\, du . \quad \text{Il satisfait à}$$

$$\int_o^{\infty} \exp(-c^2 t) m_t(du) = \exp(-|c|t) \qquad \text{et} \quad m_t(\mathbb{R}_+) = 1.$$

Définition. Pour tout réel s et pour tout $d \geq 0$, **nous posons**, pour toute fonction f de $\mathbb{L}^2$ $\quad Q_t^{s,d} f = \int_o^{\infty} P_u f \exp(st-d^2u) m_t(du)$ et, de même, pour toute 1-forme ω de $\vec{\mathbb{L}}^{>2}$ $\quad \vec{Q}_t^{>s,d}\omega = \int_o^{\infty} \vec{P}_u^{>}\omega \exp(st-d^2u) m_t(du)$.

Proposition 2.1. a) $Q_t^{s,d}$ est un semigroupe symétrique sur $\mathbb{L}^2$, positif, de générateur infinitésimal $C^{s,d} = sI - (d^2I-L)^{1/2}$.

b) $M_b Q_t^{s,d} = Q_t^{s+b,d}$.

c) Pour tout p, $1 \leq p \leq \infty$, $\|Q_t^{s,d} f\|_p \leq \exp[t(s-d)] \|f\|_p$

d) $Q_t^{s,d} 1 = \exp[t(s-d)]$; en particulier, $Q_t^{d,d} = Q_t^d$ est markovien.

e) Il existe des constantes universelles $c(s,d)$ telles que, pour tout p, $1 \leq p \leq \infty$, et pour toute fonction f de C_c^{∞},

$$\|C^{s,d} f\|_p \leq c(s,d)[\, \|f\|_p + \|Lf\|_p].$$

f) Pour toute fonction f dans C_c^{∞}, la fonction $\bar{f}(x,t)$: $(x,t) \longrightarrow Q_t^{s,d} f(x)$ est de classe C^{∞} sur $E\times]0,\infty[$, continue sur $E\times[0,\infty[$, et solution de l'équation $L^{s,d}\bar{f} = 0$.

Avant de donner la démonstration de cette proposition, énonçons tout de suite la proposition analogue relative à $\vec{Q}_t^{>s,d}$:

Proposition 2.2. a) Pour tout (s,d) de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, $(\vec{Q}_t^{>s,d})$ est un semigroupe symétrique sur $\vec{\mathbb{L}}^{>2}$, de générateur $\vec{C}^{>s,d} = sI - (d^2I-\vec{L}^{>})^{1/2}$.

b) $M_b \vec{Q}_t^{>s,d} = \vec{Q}_t^{>s+b,d}$

c) Si $d^2 \geq -r_o$, on a, pour toute 1-forme ω,

$$|\vec{Q}_t^{>s,d}\omega| \leq Q_t^{s,(d^2+r_o)^{1/2}} |\omega|.$$

d) Si $d^2 \geq -r_o|1-\frac{2}{p}|$, $(\bar{Q}_t^{>s,d})$ est un semigroupe d'opérateurs bornés sur $\bar{\mathbb{L}}^{>p}$, de norme majorée par $\exp\{t[s-(d^2+r_o|1-\frac{2}{p}|)^{1/2}]\}$.

e) Si $d^2 \geq -r_o|1-\frac{2}{p}|$, on a, pour tout $1\leq p\leq \infty$,

$$\|\bar{C}^{>s,d}\omega\|_p \leq c(s,d)[\|\omega\|_p + \|\bar{L}^{>}\omega\|_p].$$

f) Pour toute forme ω de C_c^∞, la forme $\bar{\omega}(x,t) = \bar{Q}_t^{>s,d}\omega(x)$ est de classe C^∞ sur $E\times]0,\infty[$, continue sur $E\times[o,\infty[$, et solution de l'équation $\bar{L}^{>s,d}\bar{\omega} = 0$.

Avant de donner les démonstrations de ces deux propositions, nous énonçons un lemme,dont une partie nous sera utile pour la démonstration de e), et dont le reste nous servira plus bas.

Lemme 2.3.Les fonctions suivantes, définies sur $[0,\infty[$, sont des transformées de Laplace de mesures bornées:

$$f_1(x) = \frac{(1+x)^{1/2}}{1+x^{1/2}} \;; \qquad f_2(x) = \frac{1+x^{1/2}}{(1+x)^{1/2}} \;; \; f_3(x) = \frac{1}{(1+x)^{1/2}} \qquad ; \; f_4(x) = \frac{x^{1/2}}{(1+x)} .$$

Preuve: rappelons que la transformée de Laplace de la probabilité $m_t(du)$ est $e^{-tx^{1/2}}$. La probabilité $n_t(du) = \exp(t-u)m_t(du)$ a donc comme transformée de Laplace $\exp(-t[(1+x)^{1/2}-1])$; par conséquent, la probabilité $n\,(du) = \int_o^\infty e^{-t}n_t(du)dt$ admet f_3 comme transformée de Laplace.

D'autre part, $f_2-f_3 = (1-f_3^2)^{1/2} = 1 - \Sigma_1^\infty c_k f_3^{2k}$, avec $c_k \geq 0$ et $\Sigma c_k=1$. Par conséquent, f_2-f_3 est la transformée de Laplace de la mesure bornée $n'(du) = \varepsilon_0 - \Sigma_k c_k n^{*2k}$ (puissances de convolution de n). Ceci règle le cas de f_2, et également celui de f_4 , puisque $f_4 = f_3(f_2-f_3)$, transformée de Laplace de $n*n'$.

Il nous reste à traiter le cas de f_1. Tout d'abord, on remarque que $\int_o^\infty t^{-3/2}(1-e^{-tx})dt = 2(\pi x)^{1/2}$. Par conséquent, la mesure bornée $2^{-1}\pi^{-1/2}t^{-3/2}(1-e^{-t})dt$ admet comme transformée de Laplace la fonction $(1+x)^{1/2}-x^{1/2}$. D'autre part, la fonction $(1+x^{1/2})^{-1}$ est la transformée de Laplace de la probabilité $\int_o^\infty m_t e^{-t}dt$, et donc $\frac{x^{1/2}}{1+x^{1/2}}$ est la transformée de Laplace d'une mesure bornée. Il ne nous reste plus qu'à écrire f_1 sous la forme

$f_1(x) = [(1+x)^{1/2}-x^{1/2}]\frac{1}{1+x^{1/2}} + \frac{x^{1/2}}{1+x^{1/2}}$ pour l'obtenir comme transformée de Laplace d'une mesure bornée.

Passons à la démonstration de (2.1). On écrit en premier lieu que $\int_0^\infty \exp(-\lambda^2 u)\exp(st-d^2u)m_t(du) = \exp[s-(d^2+\lambda)^{1/2}]t$ (pour $\lambda \geq 0$). Sur la décomposition spectrale du semigroupe P_t, il est alors clair que $Q_t^{s,d} = e^{tC^{s,d}}$. Il est tout aussi clair, sur la définition, que $Q_t^{s,d}$ est un opérateur positif, d'où a).

b) est immédiat sur la définition de $Q_t^{s,d}$. c) n'est pas plus compliqué: on écrit: $\|Q_t^{s,d}f\|_p \leq \int_0^\infty \|P_u f\|_p \exp(st-d^2u)m_t(du) \leq \|f\|_p \exp(s-d)t$.

d) provient de $P_u 1 = 1$, pout tout u.

e) est une conséquence du lemme (2.3): la fonction $\frac{x^{1/2}}{1+x}$ étant la transformée de Laplace d'une mesure bornée α , La fonction $\frac{(d^2+x)^{1/2}}{1+d^2+x}$ est la transformée de Laplace de la mesure bornée $\alpha_d(du) = \exp(-d^2u)\alpha(du)$. Par conséquent, l'opérateur $(d^2-L)^{1/2}(1+d^2-L)^{-1} = \int_0^\infty P_u\alpha_d(du)$ est un opérateur borné sur $\mathbb{L}^p$, de norme majorée par $|\alpha|$. On en déduit que $\|C^{0,d}f\|_p \leq |\alpha|[(1+d^2)\|f\|_p + \|Lf\|_p]$. Il ne nous reste plus qu'à remarquer que $C^{s,d} = sI + C^{0,d}$.

f) La fonction $\bar{f}(x,t) = Q_t^{s,d}f(x)$ satisfait, dans $\mathbb{L}^2$, à $D_0\bar{f} = C^{s,d}\bar{f}$, et même, pour tout entier k, à $D_0^k\bar{f} = (C^{s,d})^k\bar{f}$. Mais $C^{s,d}$ satisfait à l'équation $(C^{s,d})^2 - 2sC^{s,d} + (s^2-d^2)I = -L$, et par conséquent $\bar{f}(s,t)$ est solution de l'équation $L^{s,d}\bar{f} = 0$, au sens $\mathbb{L}^2$, donc au sens des distributions sur $E\times]0,\infty[$. Mais l'opérateur $L^{s,d}$ est elliptique, et par conséquent $\bar{f}$ est de classe C^∞, et solution de l'équation $L^{s,d}\bar{f} = 0$ au sens ordinaire. D'autre part, la continuité en 0 provient de l'estimation
$\|Q_t^{s,d}f - f\|_\infty \leq \int_0^\infty \|Q_u^{s,d}C^{s,d}f\|_\infty du \leq \|C^{s,d}f\|_\infty \int_0^\infty \exp(s-d)u\, du.$

La majoration e) nous permet alors de conclure. Remarquons au passage que la même démonstration prouve la continuité en 0 de toutes les dérivées $D_0^k\bar{f}$.

La démonstration de la proposition 2.2 est identique à la précédente, à condition de mettre des flèches partout où c'est nécessaire. Les seules différences se situent dans c) et d). Pour c) nous utilisons l'inégalité a) de la proposition 1.7 : $|\vec{P}_u^{>}\omega| \leq \exp(-r_o u)P_u|\omega|$. En l'intégrant par rapport à la mesure $\exp(st-d^2u)m_t(du)$, on obtient c). Idem pour e) , en utilisant $\|\vec{P}_u^{>}\omega\|_p \leq \exp(-r_o|1-\frac{2}{p}|u)\,\|\omega\|_p$.

Remarque. Dans certaines situations, les semigroupes $Q_t^{s,d}$ sont tout aussi naturels que le semigroupe de Cauchy usuel $Q_t^{o,o}$ associé à l'opérateur L. Ainsi, lorsque E est la sphère usuelle de $\mathbb{R}^n$ et que L est le Laplacien sphérique usuel Δ_n, le prolongement harmonique à l'intérieur de la boule d'une fonction f définie sur E est solution, en coordonnées polaires, de l'équation $(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\Delta_n)\,\bar{f}(x,t) = 0$. En posant $r = e^{-t}$, on obtient l'équation $(D_o^2 - (n-2)D_o + \Delta_n)\,\bar{f}(x,t) = 0$, ce qui correspond au semigroupe $Q_t^{(n-2)/2}$.

On sait que, dans $\mathbb{R}^n$, le module d'une fonction harmonique, ainsi que son carré, sont des fonctions sous-harmoniques; il en va de même d'une forme harmonique. La proposition suivante étend ce résultat aux prolongements harmoniques qui nous intéressent ici.

Proposition 2.4. 1) Soit f(x,t) une fonction de classe C^∞ sur $E\times]0,\infty[$, satisfaisant à $L^{s_1,d_1}f = 0$. On a:

a) $$L^{s_2,d_2}f^2 = 2|df|^2 + 2[D_of + (s_1-s_2)f]^2 + [2d_1^2-d_2^2-(s_2-2s_1)^2]f^2.$$

b) Si $d_1^2 \geq d_2^2 \geq s_1^2$, on a, pour tout $\varepsilon>0$,

$$L^{s_1,d_2}\,[(f^2+\varepsilon^2)^{1/2}-\varepsilon] \geq 0 .$$

2) Soit $\omega(x,t)$ une famille de formes sur E , C^∞ en (x,t), satisfaisant à $\vec{L}^{>s_1,d_1}\,\omega = 0$. On a:

a) $$L^{s_2,d_2}\,|\omega|^2 \geq 2|\nabla\omega|^2 + 2|D_o\omega + (s_1-s_2)\omega|^2 + [2d_1^2 - d_2^2 - (s_2-2s_1)^2 + 2r_o]|\omega|^2$$

b) Si $r_o+d_1^2 \geq d_2^2 \geq s_1^2$, on a, pour tout $\varepsilon>0$,
$L^{s_1,d_2}[(|\omega|^2+\varepsilon^2)^{1/2}-\varepsilon] \geq 0$.

Preuve: nous commençons par 1). Sur l'écriture explicite de $L^{s,d}$, on voit que

$$L^{s_2,d_2} - L^{s_1,d_1} = 2(s_1-s_2)D_o + (s_1^2-s_2^2+d_1^2-d_2^2)I .$$

D'autre part, la formule du changement de variables donne

$$L^{s,d}\varphi(f) = \varphi'(f)L^{s,d}f + \varphi''(f)|\bar{\nabla}f|^2 +(s^2-d^2)[\varphi(f)-f\varphi'(f)].$$

Pour a), nous appliquons cette formule avec $(s,d) = (s_1,d_1)$, en utilisant l'hypothèse $L^{s_1,d_1} = 0$. On prend $\varphi(x) = x^2$, de sorte que $\varphi-x\varphi' = -x^2$. Il vient

$$L^{s_2,d_2}f^2 = 2[|\nabla f|^2+(D_of)^2] + (d_1^2-s_1^2)f^2 + 4(s_1-s_2)fD_of + (s_2^2-s_1^2+d_1^2-d_2^2)f^2 ,$$

ce qui est la formule annoncée.

Pour b) on utilise les mêmes formules que précédemment, mais avec $s_2=s_1$, et $\varphi(x) = (x^2+\varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon$. On a alors $\varphi''(x) = \varepsilon^2(x^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \geq 0$ et $\varphi(x)-x\varphi'(x) = \varepsilon[\varepsilon(x^2+\varepsilon^2)^{-1/2} - 1] \leq 0 \leq \varphi(x)$. L'inégalité cherchée est alors immédiate.

Pour 2) , commençons par rappeler la formule de la proposition 1.5 , b):

$$L|\omega|^2 = 2\omega.\vec{L}\omega + 2|\nabla\omega|^2 + 2R(\omega^*,\omega^*) .$$ On obtient alors

$$L^{s,d}|\omega|^2 = 2\omega.\vec{L}^{s,d}\omega + 2|\bar{\nabla}\omega|^2 + 2R(\omega^*,\omega^*) + (d^2-s^2)|\omega|^2.$$

L'inégalité a) provient alors du même calcul que plus haut, et de l'inégalité

$$R(\omega^*,\omega^*) \geq r_o|\omega|^2 .$$

Pour b), posons $|\omega|_\varepsilon = (|\omega|^2+\varepsilon^2)^{1/2}$ et $\varphi(x) = (x+\varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon$ $(x\geq 0)$. On remarque que $\Psi(x) = \varphi(x)-x\varphi'(x) \leq \varphi(x)/2$. Il vient:

$$L^{s_1,d_2}\varphi(|\omega|^2) = \frac{1}{2|\omega|_\varepsilon}L^{s_1,d_2}|\omega|^2 - \frac{1}{4|\omega|_\varepsilon^3}|\bar{\nabla}|\omega|^2|^2 + (s_1^2-d_2^2)\Psi(|\omega|^2) .$$

Puisque $d_2^2 \geq s_1^2$ et que $\Psi \leq \varphi/2$, on peut écrire

$$L^{s_1,d_2}\varphi(|\omega|^2) \geq \frac{1}{|\omega|_\varepsilon^3}\left[\frac{|\omega|_\varepsilon^2}{2} L^{s_1,d_2}|\omega|^2 - \frac{1}{4}|\bar{\nabla}|\omega|^2|^2\right] + \frac{(s_1^2-d_2^2)}{2}(|\omega|_\varepsilon-\varepsilon).$$

Mais d'après a), $L^{s_1,d_2}|\omega|^2 \geq 2|\bar\nabla\omega|^2 + |\omega|^2[2d_1^2-d_2^2-s_1^2+2r_o]$.

Or, $|\bar\nabla|\omega|^2|^2 = |\nabla|\omega|^2|^2 + |D_o|\omega|^2|^2 = 4|\nabla\omega(\omega^*,.)|^2 + 4|\omega.D_o\omega|^2$
$\leq 4|\omega|^2|\bar\nabla\omega|^2 \leq 4|\omega|_\varepsilon^2|\bar\nabla\omega|^2$.

Finalement, il nous reste

$$L^{s_1,d_2}\varphi(|\omega|^2) \geq |\omega|_\varepsilon(d_1^2+r_o-d_2^2) + \frac{\varepsilon}{2}(d_2^2-s_1^2) - \frac{\varepsilon^2}{|\omega|_\varepsilon}[d_1^2+r_o-\frac{d_2^2+s_1^2}{2}] .$$

Or, $|\omega|_\varepsilon \geq \varepsilon$ et $d_1^2+r_o \geq (1/2)(d_2^2+s_1^2)$, et il reste

$$L^{s_1,d_2}\varphi(|\omega|^2) \geq (|\omega|_\varepsilon - \varepsilon)(d_1^2+r_o-d_2^2) \geq 0 .$$

III Quelques inégalités du type Littlewood-Paley-Stein.

Donnons nous un semigroupe markovien symétrique T_t sur E. La théorie de Littlewood-Paley-Stein (telle qu'elle est exposée dans le livre de Stein [St], par exemple), a pour but de comparer, pour toute fonction f définie sur E, la norme de f dans $\mathbb{L}^p$ à la norme de $G(f)$ dans $\mathbb{L}^p$, où $G(f)^2 = \int_0^\infty(\frac{d}{dt}T_tf)^2 tdt$. Dans ce cas, la fonction $\bar f(x,t) = T_tf(x)$ soit est solution de l'équation de la chaleur (lorsque $T_t = P_t$) , soit est harmonique dans $E\times\mathbb{R}_+$, au sens du chapitre précédent (lorsque T_t est l'un des semigroupes $Q_t^{d,d} = Q_t^d$).

Dans ce chapitre, nous établirons des inégalités de la même forme, mais pour des fonctions f sur $E\times\mathbb{R}_+$ sous-harmoniques ($L^df \geq 0$). Nous comparons alors la norme dans $\mathbb{L}^p$ d'une quantité du type $G(f)$ à la norme dans $\mathbb{L}^p$ de la restriction f_o de f au bord de $E\times\mathbb{R}_+$. Dans la section suivante, nous ne nous servirons en fait que du cas $d = 0$, mais comme ces inégalités ne sont pas plus compliquées à établir dans le cas général, nous les établirons pour d quelquonque.

Rappelons que, si x est un point de E, P^x désigne la loi, sur l'espace canonique, du processus de diffusion de générateur L , issu de x, que nous noterons X_t^x . Considérons d'autre part un mouvement brownien auxiliaire B_t^a, à valeurs réelles, issu de a>0, et indépendant de X_t^x. On appellera $P^{x,a}$ la loi du couple (X_t^x,B_t^a) , et on notera $E^{x,a}$ l'espérance sous $P^{x,a}$.

La mesure $\int P^{x,a}m(dx)$ sera notée P_a, et on utilisera la notation $E_a(Z) = \int ZdP_a$, bien que P_a ne soit une probabilité que si m en est une.

Puisque nous voulons établir des inégalités relatives à l'opérateur L^d, où $d \geq 0$ est un paramètre fixé, introduisons le temps d'arrêt

$$T^{a,d} = \inf\{s/\ B_s^a - 2ds = 0\}.$$

Appelons $Z_t^{x,a,d}$ le processus $(X^x_{t\wedge T^{a,d}}, B^a_{t\wedge T^{a,d}} - 2d(t\wedge T^{a,d}))$, qui est défini sur $E\times\mathbb{R}_+$ (x et a ne sont là que pour mémoire: quand x et a changent, c'est la loi de $Z_t^{x,a,d}$ qui change, et non le processus lui même), et soit $\mathbb{F}_t$ sa filtration naturelle. C'est un processus de diffusion sur $E\times\mathbb{R}_+$, de générateur $L^d = (D_o^2 - 2dD_o + L)$, ce qui se traduit par la proposition suivante:

Proposition 3.1. Soit $f(x,t)$ une fonction de classe C^∞ sur $E\times]0,\infty[$. Le processus $f(Z_t^{x,a,d}) - f(x,a) - \int_0^t (L^d f)(Z_s^{x,a,d})ds$ est une martingale locale sur $[0,T^{a,d}[$.

Preuve: on se ramène par arrêt au cas où f est à support compact dans $E\times]0,\infty[$, puis par convergence uniforme sur f et $L^d f$ au cas où f est combinaison linéaire de fonctions de la forme $g(x)h(t)$. Dans ce cas, la proposition est une conséquence immédiate de l'indépendance des processus X_t^x et B_t^a .

Dans la suite, lorsque f est une fonction sur E, de classe C_c^∞, on posera, pour simplifier les notations, $\bar{f}^d(x,t) = Q_t^d f(x)$: c'est une solution de l'équation $L^d(\bar{f}^d)=0$. D'après la proposition précédente, $\bar{f}^d(Z_t^{x,a,d})$ est une martingale locale sur $[0,T^{a,d}[$. En fait, puisque $\bar{f}^d$ est bornée et que tout est continu en $t=0$, c'est une vraie martingale, et on a donc

$$E^{x,a}[f(X_{T^{a,d}})/\ \mathbb{F}_s] = \bar{f}^d(Z_s^{x,a,d}). \tag{3.1}$$

Cette formule s'étend aussitôt par classes monotones au cas où f est borélienne bornée. De même, lorsque $f(x,t)$ est une fonction bornée, de classe C^∞ sur $E\times]0,\infty[$, continue en $t=0$, et satisfaisant à $L^d f \geq 0$, on a

$$E^{x,a}[f(X_{T^{a,d}},0)/\ \mathbb{F}_s] \geq f(Z_s^{x,a,d}) . \tag{3.2}$$

De ces deux remarques, on peut déduire la proposition suivante:

Proposition 3.2. Soit $f(x,t)$ une fonction de classe C^∞ sur $E\times]0,\infty[$, continue en $t=0$, et telle que $L^d f \geq 0$. On a, pour tous t et u de $\mathbb{R}_+$,

$$Q_t^d f(.,u) \geq f(.,t+u). \tag{3.3}$$

<u>Preuve</u>: un changement de t en $t+u$ nous ramène au cas $u = 0$. Ensuite, dans les formules (3.1) et (3.2) qui précèdent, on fait $s = 0$ et $a = t$. Cela donne (3.3).

<u>Remarque</u>. En changeant f en $M_{d-s}f$, on obtient une propriété analogue avec $Q_t^{s,d}$, $L^{s,d}$. L'hypothèse à faire alors est que la fonction $M_{d-s}f$ est bornée. De façon générale, ce changement de f en $M_{d-s}f$ permet d'étendre les résultats de ce chapitre aux semigroupes $Q_t^{s,d}$ et aux opérateurs $L^{s,d}$: nous n'en aurons pas besoin.

Introduisons une nouvelle notation, correspondant au potentiel de l'opérateur $D_o^2 - 2dD_o$ dans $\mathbb{R}_+$: on pose, pour (s,t) dans $\mathbb{R}_+^2$

-pour $d>0$ $\quad V_d(t,s) = \frac{1}{d}\exp\{-d[s\vee(2s-t)]\}\mathrm{sh}\{d(t\vee s)\}$

$$= \frac{1-\exp(-2ds)}{2d}1_{\{s<t\}} + \exp(-2ds)\left[\frac{\exp(2dt)-1}{2d}\right]1_{\{s\geq t\}}$$

-pour $d=0$ $\quad V_0(t,s) = s\wedge t$.

Le calcul suivant est la généralisation d'un calcul de Meyer [M2]:

<u>Proposition 3.3</u>. Soit $f(x,t)$ une fonction borélienne positive sur $E\times\mathbb{R}_+$. On a

$$E_a\left[\int_0^{T^{a,d}} f(Z_s^{a,d})ds\right] = \int_0^\infty f(.,u)V_d(a,u)du .$$

(Ici, $Z_s^{a,d}$ désigne clairement le processus $(X_{s\wedge T^{a,d}},B^a_{s\wedge T^{a,d}} - 2d(s\wedge T^{a,d}))$ sous la loi P_a).

<u>Preuve</u>:tout d'abord, considérons une fonction $h(t)$, positive, de classe C^∞, à support compact dans $]0,\infty[$. On a alors

$$E\left[\int_0^{T^{a,d}} h(B_s^a - 2ds)ds\right] = \int_0^\infty h(u)V_d(a,u)du.$$

En effet, la fonction $G(a) = \int_0^\infty h(u)V_d(a,u)du$ est une fonction bornée, nulle en 0,solution de l'équation $L_0^dG = -h$. Le processus

$$G(B_s^a - 2ds) + \int_0^s h(B_u^a - 2du)du$$

est donc une martingale, bornée sur $[0,s\wedge T^{a,d}]$. On prend alors l'espérance et on passe à la limite lorsque s tend vers l'infini.

Cette formule s'étend au cas où f est borélienne positive par un argument de classes monotones. Ensuite, pour démontrer la proposition, on se ramène au cas où la fonction $f(x,t)$ est de la forme $g(x)h(t)$, auquel cas on a:

$$E_a\left(\int_0^{T^{a,d}} f(Z_s^{a,d})ds\right) = \int_0^\infty E(h(B_s^a - 2ds)1_{s<T^{a,d}})E_a(g(X_s))ds.$$

Mais $E_x(g(X_s)) = (P_sg)(x)$, et donc $E_a(g(X_s)) = \langle P_sg\rangle = \langle g\rangle$.

On a donc
$$E_a\left(\int_0^{T^{a,d}} h(Z_s^{a,d})ds\right) = \langle g\rangle E\left(\int_0^{T^{a,d}} h(B_s^a - 2ds)ds\right)$$
$$= \left\langle\int_0^\infty g(x)h(u)V_d(a,u)du\right\rangle.$$

Cette égalité se renforce d'elle même:

<u>Corollaire 3.4</u>. Sous les mêmes hypothèses,

$$E_a\left[\int_0^{T^{a,d}} h(Z_s^{a,d})ds/X_{T^{a,d}} = .\right] = \int_0^\infty Q_s^d h(.,s)V_d(a,s)ds.$$

<u>Preuve</u>:il s'agit de démontrer que, pour toute fonction $g(x)$ dans C_c^∞, on a

$$E_a\left[\int_0^{T^{a,d}} h(Z_s^{a,d})ds\, g(X_{T^{a,d}})\right] = \int_0^\infty \langle Q_s^d h(.,s),g\rangle V_d(a,s)ds .$$

(Ici, on utilise le fait que la loi de $X_{T^{a,d}}$ est $m(dx)$). Le second membre est égal à $\left\langle\int_0^\infty h(.,s)\bar{g}^d(.,s)V_d(a,s)ds\right\rangle$ (rappelons que $\bar{g}^d(.,t)=Q_t^d g(.)$).

Quant au premier membre, il vaut

$$E_a\left[\int_0^{T^{a,d}} h(Z_s^{a,d})E_a(g(X_{T^{a,d}})/\mathbb{F}_s)ds\right].$$

Mais $E_a(g(X_{T^{a,d}})/\mathbb{F}_s) = \bar{g}^d(Z_s^{a,d})$, et il ne reste plus qu'à appliquer la proposition 3.3.

Nous arrivons maintenant aux deux principaux résultats de ce chapitre. Tout d'abord, nous introduisons une nouvelle notation:

pour $d>0$, $\quad V_d(u) = V_d(\infty,u) = \dfrac{1-\exp(-2du)}{2d}$;

pour $d=0$, $\quad V_0(u) = V_0(\infty,u) = u.$

Les constantes $C(p)$, $1<p<\infty$, qui apparaissent dans les deux théorèmes qui suivent ne dépendent que de p: en particulier ni de f, ni de d, ni de l'espace E.

Théorème 3.5. Soit $f(x,t)$ une fonction positive, bornée, continue sur $E\times\mathbb{R}_+$, de classe C^∞ sur $E\times]0,\infty[$, et satisfaisant à $L^d f \geq 0$. Pour tout p, $1<p<\infty$, on a

$$\|\int_0^\infty Q_u^d(L^d f)V_d(u)du\|_p \leq C(p)\,\|f(.,0)\|_p.$$

Théorème 3.6. Soit $f(x,t)$ une fonction positive, bornée, de classe C^∞ sur $E\times]0,\infty[$, telles que f et $D_o f$ soient continues en $t=0$, et satisfaisant à $L^d f \geq 0$. Supposons qu'en outre

$$<\int_0^\infty [|L_o^d f^2| + |Lf^2| + |D_o f|^2 + |\nabla f|^2]V_d(u)du> < \infty.$$

Pout tout p, $1<p\leq 2$, on a

$$\|[\int_0^\infty L^d(f^2)V_d(u)du]^{1/2}\|_p \leq C(p)\,\|f(.,0)\|_p.$$

Preuve du théorème 3.5: d'après la proposition 3.1, pour tout (x,a) de $E\times]0,\infty[$, le processus $Y_t = f(Z_t^{x,a,d}) - f(x,a)$ est une sous martingale bornée, nulle en $t=0$. Son processus croissant associé s'écrit $A_t = \int_0^{t\wedge T^{a,d}} L^d f(Z_s^{x,a,d})ds$.

Les inégalités classiques de la théorie des martingales montrent qu'alors

$$E^{x,a}(A_{T^{a,d}})^p \leq C(p)E^{x,a}|Y_{T^{a,d}}|^p \text{ , pour tout } p,\ 1<p<\infty.$$

(Voir par exemple l'article de Lenglart-Lépingle-Pratelli [LLP], théorème 3.2.) En intégrant par rapport à $m(dx)$, on obtient $E_a(A_{T^{a,d}})^p \leq C(p)E_a|Y_{T^{a,d}}|^p$.

Or, l'opérateur d'espérance conditionnelle diminue la norme dans $\mathbb{L}^p$ (le fait que la mesure soit éventuellement infinie n'y change rien). En conditionnant par rapport à $X_{T^{a,d}} = x$, on obtient

$$E_a[E_a(A_{T^{a,d}}/X_{T^{a,d}} = .)]^p \leq C(p)E_a|Y_{T^{a,d}}|^p.$$

Mais $Y_{T^{a,d}} = f(X_{T^{a,d}},0) - f(X_0,a)$: sa norme dans $\mathbb{L}^p$ est donc majorée par $\|f(.,0)\|_p + \|f(.,a)\|_p$. Or, puisque $L^d f \geq 0$, nous savons que $f(.,a)$ est majorée par $Q_a^d f(.,0)$. Puisque Q_a^d est une contraction de $\mathbb{L}^p$, le second membre est majoré par $C(p)\,\|f(.,0)\|_p^p$. (Comme d'habitude, la constante $C(p)$ varie de place en place.)

Quant au premier membre, le corollaire 3.4 montre qu'il vaut $E_a\{[\int_0^\infty Q_u^d(L^d f(.,u))V_d(a,u)du](X_T a,d)\}^p$, qui n'est autre que $\|\int_0^\infty Q_u^d(L^d f)V_d(a,u)du\|_p^p$. Il ne nous reste plus qu'à faire tendre a vers l'infini pour obtenir le théorème 3.5.

Remarque: cette démonstration recopie mot à mot celle de Meyer [M2] dans le cas d=0.

<u>Preuve du théorème 3.6</u>: elle est un peu plus compliquée, et n'utilise pas de probabilités. Nous commençons par un lemme:

<u>Lemme 3.7</u>. Soit $f(x,s)$ (notée parfois $f_s(x)$) une fonction positive de classe C^∞ sur $E\times]0,\infty[$, telle que f et $D_0 f$ convergent en $t=0$. Supposons qu'en outre f satisfasse à

1) $<\int_0^\infty(|L_0^d f_s| + |Lf_s|)V_d(s)ds> < \infty$.
2) Pour presque tout x de E , $\int_0^\infty |D_0 f|V_d(s)ds < \infty$.
3) Pour presque tout s de $\mathbb{R}_+$, $<|\nabla f_s|> < \infty$.

Alors $<f(.,0)> \geq <\int_0^\infty L^d f_s V_d(s)ds>$.

<u>Preuve</u>: Tout d'abord, fixons s et approchons f_s par $h_n f_s$, où h_n est l'un des éléments de la suite du lemme 1.1. On a $<L(h_n f_s)> = 0$. Or, $<h_n,Lf_s> = -<dh_n,df_s>$: on en déduit que, pour presque tout s, $<Lf_s> = 0$. Par conséquent, $<\int_0^\infty Lf_s\ V_d(s)ds> = 0$.

Il ne reste plus qu'à montrer que $<f_0> \geq <\int_0^\infty L_0^d f_s V_d(s)ds>$. On va voir qu'en fait, il s'agit d'une inégalité ponctuelle. En effet

$$\int_0^t L_0^d(f_s)ds = f_0 - f_t + V_d(t)D_0 f_t \ .$$

Or, dans les conditions dans lesquelles nous nous sommes placés, pour presque tout x, $D_0 f(t)V_d(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Etant donnée la positivité de f, il nous reste à la limite $f_0 \geq \int_0^\infty L_0^d(f_s)V_d(s)ds$.

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration du théorème 3.6, en recopiant une démonstration de Stein, [St, p.50-51]. Posons $q = \frac{p}{2}$, et appliquons le lemme précédent à la fonction $f_{\varepsilon,q} = (f^2+\varepsilon)^q - \varepsilon^q$, où ε est réel strictement positif fixé. On a

$$\frac{1}{q}L(f_{\varepsilon,q}) = (f^2+\varepsilon)^{q-1}L(f^2) + (q-1)(f^2+\varepsilon)^{q-2}|\nabla f^2|^2 .$$

De même
$$\frac{1}{q}L_o^d(f_{\varepsilon,q}) = (f^2+\varepsilon)^{q-1}L_o^d(f^2) + (q-1)(f^2+\varepsilon)^{q-2}(D_of^2)^2.$$

Le lemme précédent s'applique à $f_{\varepsilon,q}$, et on obtient

$$\frac{1}{q}\langle f_{\varepsilon,q}(.,0)\rangle \geq \langle\int_o^\infty (f^2+\varepsilon)^{q-1}[L^df^2 + (q-1)(f^2+\varepsilon)^{-1}|\overline{\nabla}f^2|^2]V_d(s)ds\rangle.$$

Or,
$$L^d(f^2) = 2fL^df + 2|\overline{\nabla}f|^2 \geq 2|\overline{\nabla}f|^2 = \frac{1}{2}f^{-2}|\overline{\nabla}f^2|^2.$$

Donc,
$$L^d(f^2) \geq \frac{1}{2}(f^2+\varepsilon)^{-1}|\overline{\nabla}f^2|^2 ,$$ d'où l'on tire

$$\frac{1}{q}\langle f_{\varepsilon,q}(.,0)\rangle \geq (2q-1)\langle \int_o^\infty(f^2+\varepsilon)^{q-1}L^d(f^2)V_d(s)ds\rangle$$. On peut alors passer à la limite lorsque ε tend vers 0, et l'on obtient

$$\frac{1}{q(2q-1)}\langle f(.,0)^p\rangle \geq \langle \int_o^\infty f^{p-2}L^d(f^2)V_d(s)ds\rangle. \tag{3.4}$$

Posons maintenant $f^* = \sup_s|f_s|$; on a

$$[\int_o^\infty L^df_s^2\ V_d(s)ds]^{p/2} \leq f^{*\frac{p}{2}(p-2)}[\int_o^\infty f^{p-2}L^d(f^2)V_d(s)ds]^{p/2}.$$

En utilisant l'inégalité de Holder avec exposants $\frac{2}{2-p}$ et $\frac{2}{p}$, on obtient

$$\langle[\int_o^\infty L^d(f_s^2)V_d(s)ds]^{p/2}\rangle \leq \|f^*\|_p^{\frac{p}{2}(2-p)}\langle \int_o^\infty f^{p-2}L^d(f^2)V_d(s)ds\rangle^{p/2}.$$

Dans le membre de droite de cette inégalité, on majore le second terme par l'inégalité (3.4) précédente, tandis que, pour le premier, on remarque que $f(x,s) \leq Q_s^df(x,0)$, et donc que $f^* \leq \sup_s Q_s^df(x,0)$. Il nous reste alors à utiliser l'inégalité classique sur les semigroupes markoviens symétriques, $\|\sup_s|Q_s^df|\ \|_p \leq C(p)\ \|f\|_p$ $(1<p<\infty)$, pour obtenir notre résultat.

Remarque. Il est clair, d'après la démonstration du théorème 3.6, qu'on n'a pas besoin de supposer que f soit C^∞ et satisfasse $L^df \geq 0$, pour obtenir ce résultat: il suffit que f^2 soit C^∞ (en fait C^2) et satisfasse, pour tout $\varepsilon>0$, à $L^d(f^2+\varepsilon)^{1/2} \geq 0$. Comme on l'appliquera avec $f = |\omega|$, où ω est une famille de 1-formes C^∞, cette nuance a son importance.

IV Application aux transformations de Riesz.

Rappelons que r_o désigne une borne inférieure du tenseur R. On ne perd rien à supposer que r_o est négatif où nul, et on posera $r_o = -a^2$ ($a \geq o$). Le principal résultat de ce chapitre est le théorème suivant:

Théorème 4.1. Pour tout p, $1<p<\infty$, il existe une constante $C(p)$ telle que, pour toute fonction f de C_c^∞, on ait

$$\|df\|_p \leq C(p)[\,\|(-L)^{1/2}f\|_p + a\,\|f\|_p] \;.$$

Insistons sur le fait que C(p) est une constante universelle, ne dépendant ni de la constante a, ni de la dimension de E, ...

Le lemme suivant va nous permettre de nous ramener à une situation plus simple:

Lemme 4.2. Il existe deux constantes universelles c_1 et c_2, telles que, pour tout p, $1 \leq p \leq \infty$, pour tout générateur L d'un semigroupe markovien symétrique, et pour pout $a \geq 0$, on ait

$$c_1[a\,\|f\|_p + \|(-L)^{1/2}f\|_p] \leq \|(a^2I-L)^{1/2}f\|_p \leq c_2[a\,\|f\|_p + \|(-L)^{1/2}f\|_p].$$

Preuve: quitte à changer L en L/a^2, on peut toujours supposer que $a = 1$. Or, le lemme 2.3 montre que la fonction $(1+x)^{1/2}(1+x^{1/2})^{-1}$, ainsi que son inverse, sont transformées de Laplace de mesures bornées, soient n_1 et n_2. En prenant $P_t = \exp(tL)$, on a alors $(I-L)^{1/2}(I+(-L)^{1/2})^{-1} = \int_0^\infty P_s n_1(ds)$ est un opérateur borné sur $\mathbb{L}^p$, ne norme majorée par $|n_1|$. On en déduit la seconde inégalité. Pour la première, on a de même $\|f+(-L)^{1/2}f\|_p \leq |n_2|\;\|(I-L)^{1/2}f\|_p$. Comme d'autre part $(1+x)^{-1/2}$ est également tranformée de Laplace d'une mesure bornée (toujours le lemme 2.3), on a également une inégalité $\|f\|_p \leq c\,\|(I-L)^{1/2}f\|_p$. On a alors l'inégalité cherchée par différence.

Preuve du théorème 4.1: d'après le lemme, il est clair qu'il suffit de démontrer que, pour tout $d>a$, $\|df\|_p \leq C(p)\,\|C^{0,d}f\|_p$, pour f dans C_c^∞. Désignons alors par q l'exposant conjugué de p: il suffit de démontrer que, pour toute

1-forme ω de C_c^∞, on a $\langle df,\omega\rangle \leq C(p)\,\|C^{0,d}f\|_p\,\|\omega\|_q$.

Pour simplifier les notations, nous noterons $Q_t^{0,d} = Q_t$, $\vec{\bar{Q}}_t^{>0,d} = \vec{\bar{Q}}_t^{>}$, $C^{0,d} = C$, etc. D'autre part, posons $b^2 = d^2-a^2$, $\bar{f}(x,t) = \bar{f}_t(x) = Q_t f(x)$, et $\bar{\omega}(x,t) = \vec{\bar{Q}}_t^{>}\omega(x) = \bar{\omega}_t(x)$.

Pour tout r, $1\leq r\leq\infty$, on a, d'après les majorations des propositions 2.1 et 2.2, $\|\bar{f}_t\|_r \leq e^{-dt}\|f\|_r$, $\|\bar{\omega}_t\|_r \leq e^{-bt}\|\omega\|_r$, $\|d\bar{f}_t\|_r \leq e^{-bt}\|f\|_r$. De même, on a des majorations de la forme

$\|D_o^k\bar{f}_t\|_r \leq e^{-dt}\|C^k f\|_r \leq Ke^{-dt}\Sigma_{i=0}^{k}\|L^i f\|_r$, pour tous les entiers k,

et des majorations analogues avec $D_o^k d\bar{f}_t$ et $D_o^k\bar{\omega}_t$ en remplaçant d par b. Ces considérations nous permettent de justifier les calculs qui suivent: on a

$$f = \bar{f}_0 = \int_o^\infty D_o^2(\bar{f}_s)sds = 4\int_o^\infty(D_o^2\bar{f}\,)_{2s}sds\ .\quad \text{On en tire}$$

$$df = 4\int_o^\infty (D_o^2 d\bar{f})_{2s}sds\ ,\quad \text{et donc}\quad \langle df,\omega\rangle = 4\int_o^\infty\langle(D_o^2 d\bar{f})_{2s},\omega\rangle sds.$$

Mais $\qquad (D_o^2 d\bar{f})_{2s} = dC^2Q_{2s}f = \vec{\bar{C}}^{>}\vec{\bar{Q}}_s^{>}dCQ_sf$, et par suite

$$\langle(D_o^2 d\bar{f})_{2s},\omega\rangle = \langle dCQ_sf,\ \vec{\bar{C}}^{>}\vec{\bar{Q}}_s^{>}\omega\rangle = \langle dC\bar{f}_s, D_o\bar{\omega}_s\rangle\ .$$

Posons $\bar{g}_s = CQ_sf = Q_sCf$; $\bar{g}_0 = g = Cf$. On peut alors écrire

$$\langle df,\omega\rangle = 4\langle\int_o^\infty (d\bar{g}_s.D_o\bar{\omega}_s)sds\rangle \leq 4\langle[\int|d\bar{g}_s|^2sds]^{1/2},[\int|D_o\bar{\omega}_s|^2sds]^{1/2}\rangle$$

$$\leq 4\,\|[\int|d\bar{g}_s|^2sds]^{1/2}\|_p\,\|[\int|D_o\bar{\omega}_s|^2sds]^{1/2}\|_q.$$

Or, la fonction $\bar{g}_t(x) = \bar{g}(x,t)$ est solution de $L^{0,d}\bar{g} = 0$. Et de même, $\bar{\omega}(x,t)$ est solution de $\vec{\bar{L}}^{>0,d}\bar{\omega}(x,t) = 0$. On peut donc appliquer la proposition 2.4, et l'on obtient, en rappelant que L^0 n'est autre que $L^{0,0}$,

$$L^0(\bar{g}^2) \geq 2|d\bar{g}|^2; \tag{4.1}$$

$$L^0|\bar{\omega}|^2 \geq 2|D_o\bar{\omega}|^2. \tag{4.2}$$

Pour tout $\varepsilon>0$, $\quad L^0[|\bar{g}|^2+\varepsilon]^{1/2} \geq 0$; $\qquad$ (4.3)

$$L^0[|\bar{\omega}|^2+\varepsilon]^{1/2} \geq 0\ . \tag{4.4}$$

Nous allons maintenant distinguer deux cas.

a) Si p>2: on majore $2\int|D_o\bar{\omega}|^2sds$ par $\int L^0|\bar{\omega}|^2sds$ grâce à (4.2) , puis on applique le théorème 3.6, valable puisque $1<q\leq 2$.On obtient

$$\|[\int|D_o\bar{\omega}_s|^2sds]^{1/2}\|_q \leq C(q)\ \|\omega\|_q\ .$$

D'autre part, la forme $d\bar{g}_s$ est également solution de $\bar{L}^{>0,d}d\bar{g} = 0$. On peut donc lui appliquer la proposition (2.4), et on obtient $L^0|d\bar{g}|^2 \geq 0$. Par conséquent, d'après la proposition (3.2), on a $|d\bar{g}_{2s}|^2 \leq Q^0_s|d\bar{g}_s|^2$. On a alors

$$\int|d\bar{g}_s|^2 s ds = 4\int|d\bar{g}|^2_{2s} s ds \leq 4\int Q^0_s|d\bar{g}_s|^2 s ds \leq 2\int Q^0_s[L^0(\bar{g}_s)^2] s ds .$$

Il ne nous reste plus qu'à appliquer 3.5 à la fonction $\bar{g}^2(x,t)$, avec l'exposant p/2, qui est strictement plus grand que 1. (Remarquons que dans ce cas précis, le théorème 3.5 peut s'appliquer avec exposant 1, si fait que notre démonstration reste valable avec p=2.)

On obtient ainsi

$$\|[\int|d\bar{g}|^2 s ds]^{1/2}\|_p \leq C(p)\,\|g\|_p \text{ , et on a notre résultat.}$$

b) Si 1<p<2: on fait un raisonnement analogue, mais en inversant les rôles de $d\bar{g}$ et $\bar{\omega}$.

Tout d'abord, on remarque d'après (4.2) que $L^0|D_0\bar{\omega}|^2 \geq 0$, et donc que $|D_0\bar{\omega}_{2u}|^2 \leq Q^0_u|D_0\bar{\omega}_u|^2 \leq Q^0_u(L^0|\bar{\omega}_u|^2)$, ce qui nous permet d'appliquer le théorème 3.5 à la fonction $|\bar{\omega}|^2$, avec l'exposant q/2, pour obtenir la majoration

$$\|[\int|D_0\bar{\omega}|^2 s ds]^{1/2}\|_q \leq C(q)\,\|\omega\|_q .$$

Ensuite, on majore $\|[\int|d\bar{g}_s|^2 s ds]^{1/2}\|_p$ par $C(p)\,\|g\|_p$, grâce aux formules (4.1) et (4.3), en utilisant le théorème 3.6 .

Comme d'habitude, des inégalités inverses de celles du théorème 4.1 s'obtiennent comme corollaire:

<u>Corollaire 4.3</u>. Sous les mêmes hypothèses, il existe des constantes C(p) telles que $\|C^{0,a}f\|_p \leq C(p)[a\,\|f\|_p + \|df\|_p]$, pour toute fonction f de C^∞_c. (Rappelons que $-C^{0,a} = (a^2I-L)^{1/2}$)

<u>Preuve</u>: tout d'abord, le lemme 4.2 permet de se ramener au cas où a>0. Ensuite, on remarque que l'image par l'opérateur $C^{0,a}$ de C^∞_c est dense dans $\mathbb{L}^p$, pour

tout p, $1\leq p<\infty$. En effet, si q désigne l'exposant conjugué de p et f un élément de $\mathbb{L}^q$ orthogonal à $C^{0,a}(C_c^\infty)$, on a, pour tout élément g de C_c^∞, $\langle f,g\rangle = \langle f,Q_t^{0,a}g\rangle$, et, par conséquent, $f = Q_t^{0,a}f$. Mais, puisque $a>0$, $Q_t^{0,a}f$ converge vers 0 dans $\mathbb{L}^q$ lorsque t tend vers l'infini. Donc f = 0, et l'orthogonal de $C^{0,a}(C_c^\infty)$ dans $\mathbb{L}^q$ est nul: c'est ce qu'on voulait démontrer.

On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\|C^{0,a}f\|_p &\leq \sup_{\{g\in C_c^\infty;\ \|C^{0,a}g\|_q\leq 1\}}\langle C^{0,a}f,C^{0,a}g\rangle \\ &\leq \sup_{\{\dots\}}[a^2\langle f,g\rangle + \langle df,dg\rangle] \\ &\leq \sup_{\{\dots\}}[a^2\|f\|_p^2+\|df\|_p^2]^{1/2}[a^2\|g\|_q^2+\|dg\|_q^2]^{1/2}.\end{aligned}$$

D'après le théorème 4.1 et le lemme 4.2 , on a

$$\begin{aligned}[a^2\|g\|_q^2+\|dg\|_q^2]^{1/2} &\leq a\|g\|_q+\|dg\|_q \\ &\leq C(q)[a\|g\|_q + \|(-L)^{1/2}g\|_q] \\ &\leq C(q)\ \|C^{0,a}g\|_q .\end{aligned}$$

Lorsque a =0, on déduit de ces inégalités un résultat intéressant: appelons $\mathbb{D}_p$ l'espace engendré dans $\bar{\mathbb{L}}^{>p}$ par les 1-formes du type df, où f est dans C_c^∞. On a

<u>Corollaire 4.4</u>. Lorsque $r_0\geq 0$, pour tout p, $1<p<\infty$, le dual de $\mathbb{D}_p$ est $\mathbb{D}_q$, où q désigne l'exposant conjugué de p.

<u>Preuve</u>: tout d'abord, $\mathbb{D}_q$ s'injecte de manière évidente dans le dual de $\mathbb{D}_p$. Il nous suffit donc de démontrer que, pour toute fonction f de C_c^∞ , on a

$$\|df\|_p \leq C(p)\sup_{\{g\in C_c^\infty;\ \|dg\|_q\leq 1\}}\langle df,dg\rangle.$$

Mais un argument semblable à celui utilisé dans le corollaire précédent montre que $\|C^0f\|_p \leq \sup_{\{g\in C_c^\infty;\ \|C^0g\|_q\leq 1\}}\langle C^0f,C^0g\rangle$. Puisque $\|df\|_p$ est équivalent à $\|C^0f\|_p$ et que $\|dg\|_q$ est équivalent à $\|C^0g\|_q$, le résultat s'ensuit.

V Transformations de Riesz sur les champs de k-formes.

Le théorème 4.1 repose essentiellement sur la formule de Bochner-Lichnérowicz-Weitzenböck (proposition 1.5 b). Or, on a une formule analogue pour les formes d'ordre quelconque, ce qui va nous permettre d'étendre nos résultats.

Pour simplifier les calculs, nous supposerons dans ce qui suit que $\rho=1$, c'est à dire qu'on travaille avec la mesure riemannienne et que $L = \Delta$. Si ω est une k-forme $|\omega|^2$ désigne sa norme en tant que k-forme (c'est $\frac{1}{k!}$ sa norme en tant que tenseur). On définit alors les espaces $\mathbb{L}^{p,k}$ des champs de k-formes de $\mathbb{L}^p$. (Ainsi, $\bar{\mathbb{L}}^{>p}$ s'appelle maintenant $\mathbb{L}^{p,1}$.)

Si ∂ désigne l'opérateur de divergence, le laplacien opérant sur les k-formes sera l'opérateur $\Delta_k = -(d\partial+\partial d)$: au signe près, c'est le laplacien de de Rahm (tel qu'il est défini dans le livre de de Rahm [dR], par exemple). Notre variété E étant complète, c'est un opérateur autoadjoint sur $\mathbb{L}^{2,k}$: la démonstration de ce résultat, identique à celle du cas $k=1$, se trouve dans Strichartz [S]). On voit immédiatement que c'est en fait un opérateur négatif dans $\mathbb{L}^{2,k}$, et qu'on a $\langle\Delta_k\omega,\omega\rangle = -\langle d\omega,d\omega\rangle - \langle\partial\omega,\partial\omega\rangle$ pour les k-formes ω de C_c^∞.(On a utilisé la même notation $\langle .,.\rangle$ pour désigner le produit scalaire dans tous les $\mathbb{L}^{2,k}$.)

Du fait que $d^2 = \partial^2 = 0$, on a immédiatement $\Delta_k d = d\Delta_{k-1}$; $\Delta_k\partial = \partial\Delta_{k+1}$. En outre, Δ_k satisfait à une formule de Bochner-Lichnérowicz-Weitzenbock :

$$\frac{1}{2}\Delta|\omega|^2 = \omega.\Delta_k\omega + \frac{1}{k!}|\nabla\omega|^2 + Q_k(\omega,\omega) \tag{5.1}$$

où Q_k est une forme quadratique sur les k-formes faisant intervenir tout le tenseur de courbure. En coordonnées locales, si on se souvient que $r_{ij\ l}^{\ \ k}$ désigne le tenseur de courbure, et R_{ab} le tenseur de Ricci $r_{ia\ b}^{\ \ i}$, on a

$$\begin{aligned} Q_k(\omega,\omega) &= \frac{1}{(k-1)!} R_{ab}\,\omega^{ai_2\cdots i_k}\,\omega^{b}{}_{i_2\cdots i_k} \\ &\quad + \frac{1}{2(k-2)!} r_{pqrs}\,\omega^{pqi_3\cdots i_k}\,\omega^{rs}{}_{i_3\cdots i_k} . \end{aligned}$$

(Voir par exemple le livre de Lichnérowicz [Li], p.3)

Dans cette section, nous supposerons que toutes les formes quadratiques Q_k sont minorées: $Q_k(\omega,\omega) \geq -a_k^2|\omega|^2$,où les a_k sont des constantes positives.

(A priori, cette hypothèse ne semble pas être une conséquence de la minoration de la courbure sectionnelle.)

On peut alors répéter les constructions des paragraphes précédents:

1) Les semigroupes $P_t^k = \exp(t\Delta_k)$: ce sont des semigroupes symétriques de contractions de $\mathbb{L}^{2,k}$, qui satisfont en outre à

$$P_t^k d\omega = dP_t^{k-1}\omega \quad ; \quad P_t^k \partial\omega = \partial P_t^{k+1}\omega. \tag{5.2}$$

De plus, grâce à la formule (5.1), on a la majoration

$$|P_t^k\omega| \leq \exp(a_k^2 t)P_t|\omega|. \tag{5.3}$$

Cette dernière inégalité, qui est l'analogue de l'inégalité a) de la proposition 1.7, se démontre de manière analogue. Néanmoins, si l'on veut éviter de faire appel à une construction du type de celle d'Elworthy de P_t^k, on peut recopier la démonstration du théorème 6 de [B2]: nous lai serons ce soin au lecteur.

2) Les semigroupes $Q_t^{k,s,d} = \exp t[sI-(d^2I-\Delta_k)^{1/2}]$: ce sont des semigroupes bornés sur $\mathbb{L}^{2,k}$, ainsi que sur $\mathbb{L}^{p,k}$, à condition que $d^2 \geq a_k^2|1-\frac{2}{p}|$.

De l'inégalité (5.3), on tire les inégalités:

$$|Q_t^{k,s,d}\omega| \leq Q_t^{s,d'}|\omega| \;, \quad \text{avec } d' = (d^2 - a_k^2)^{1/2} \quad (\text{ici, } d^2 \geq a_k^2);$$

et

$$\|Q_t^{k,s,d}\omega\|_p \leq \exp t(s-d_p') \|\omega\|_p \;, \text{ avec } d_p' = (d^2 - a_k^2|1-\tfrac{2}{p}|)^{1/2}.$$

Désignons par $C^{k,d}$ le générateur du semigroupe $Q_t^{k,0,d}$ et par b_k le plus grand des nombres a_k et a_{k+1}. On a

Théorème 5.1. Il existe des constantes universelles $c(p,k)$ telles que, pour toute k-forme ω de C_c^∞, on ait $\|d\omega\|_p \leq c(p,k)\|C^{k,b_k}\omega\|_p$

et $\|\partial\omega\|_p \leq c(p,k)\|C^{k,b_{k-1}}\omega\|_p$.

En fait, le lemme suivant permet de comparer dans $\mathbb{L}^{k,p}$ les différents opérateurs $C^{k,b}$:

Lemme 5.2.Pout tout p, $1\leq p\leq \infty$, posons $a^2_{k,p} = a^2_k|1-\frac{2}{p}|$ et, pour tout $d\geq a_{k,p}$, $d^2= e^2+a^2_{k,p}$ ($e\geq 0$) . Il existe deux constantes universelles C_1 et C_2 telles que, pour tout (k,p) , pour toute k-forme ω, et pour tout $d\geq a_{k,p}$, on ait

$$C_1[e\,\|\omega\|_p+\|C^{k,a_{k,p}}\omega\|_p] \leq \|C^{k,d}\omega\|_p \leq C_2[e\,\|\omega\|_p+\|C^{k,a_{k,p}}\omega\|_p].$$

Preuve du lemme:elle ~~est~~ identique à celle du lemme 4.2. Les fonctions f_1, f_2 et f_3 du lemme 2.3 étant transformées de Laplace de mesures bornées, on intègre par rapport à ces mesures les opérateurs $P^k_{cs}\exp(-a^2_{k,p}\ cs)$, qui sont des contractions de $\mathbb{L}^{k,p}$. On ajuste ensuite le paramètre c pour obtenir le résultat.

Remarque: on ne sait pas donner d'équivalent analogue de $\|C^{k,d}\omega\|_p$, pour $d<a_{k,d}$.

Démonstration du théorème 5.1: on écrit la démonstration **pour la première** inégalité (majoration de $\|d\omega\|_p$) le cas de $\|\partial\omega\|_p$ se traitant de la même manière.

Tout d'abord, le lemme précédent montre qu'il suffit d'obtenir une majoration de la forme $\|d\omega\|_p \leq c(p,k)\,\|C^{k,d}\omega\|_p$, pour tout $d>b_k$. Où encore, pour toute k-forme ω et toute (k+1)-forme η, toutes deux de classe C^∞_c, que

$$\langle d\omega,\eta\rangle \leq c(p,k)\,\|C_{k,d}\omega\|_p\,\|\eta\|_q$$, où q désigne l'exposant conjugué de p.

Or, un résultat analogue à celui de la proposition 2.4 2) peut s'énoncer pour les k-formes.(C'est un résultat purement calculatoire qui ne repose que sur la formule de Bochner-Lichnérowicz-Weitzenböck.) Si nous posons $L^{k,s,d} = L^{s,d}_o + \Delta_k$, on a, pour toute famille de k-formes $\omega(x,t)$ satisfaisant à $L^{k,s_1,d_1}\omega = 0$,

$$L^{s_2,d_2}|\omega|^2 \geq \frac{2}{k!}|\nabla\omega|^2 + 2|D_o\omega+(s_1-s_2)\omega|^2 + [2d_1^2-d_2^2-(s_2-2s_1)^2-2a_k^2]|\omega|^2 \quad (5.4)$$

et, si $d_1^2-a_k^2 \geq d_2^2 \geq s_1^2$, pour tout $\varepsilon>0$,

$$L^{s_1,d_2}[(|\omega|^2+\varepsilon^2)^{1/2}-\varepsilon] \geq 0 \quad (5.5)$$

Ayant alors fixé $d>b_k$, notre k-forme ω et notre (k+1)-forme η, nous posons $\bar{\omega}(x,t) = Q_t^{k,0,d}\omega(x)$; $\hat{\omega}(x,t) = Q_t^{k,0,d}(C^{k,d}\omega)(x)$

et $\bar{\eta}(x,t) = Q_t^{k+1,0,d}\eta(x)$.

Puisque $d>a_k$, la formule (5.4) montre que

$$L^0|\bar{\omega}|^2 \geq \frac{2}{k!}|\nabla\bar{\omega}|^2 \geq 2|d\bar{\omega}|^2 .$$

Une inégalité semblable est vérifiée par $\hat{\omega}$ et $\bar{\eta}$ (puisque $d>a_{k+1}$) ; on a aussi $L^0|\bar{\eta}|^2 \geq 2|D_0\bar{\eta}|^2$, ainsi que, pour tout $\varepsilon>0$,

$$L^0[|\bar{\omega}|^2+\varepsilon]^{1/2} \geq 0 \ ; \quad L^0[|\hat{\omega}|^2+\varepsilon]^{1/2} \geq 0 \ ; \quad L^0[|\bar{\eta}|^2+\varepsilon]^{1/2} \geq 0 .$$

On peut alors répéter la démonstration du théorème 4.1 :

$$<d\omega,\eta> = \int_0^\infty D_0^2<d\bar{\omega},\eta>\, sds = 4\int_0^\infty <d\hat{\omega},D_0\bar{\eta}>\, sds \leq 4\, \|[\int_0^\infty|d\hat{\omega}|^2 sds]^{1/2}\|_p \times$$
$$\|[\int_0^\infty|D_0\bar{\eta}|^2 sds]^{1/2}\|_q$$

Dans le dernier membre de cette inégalité, le premier terme se majore par $C(p)\|\hat{\omega}_0\|_p = C(p)\|C^{k,d}\omega\|_p$ et le second par $C(q)\|\bar{\eta}_0\|_q = C(q)\|\eta\|_q$, exactement comme dans la démonstration du théorème 4.1 .

De la même façon que dans le cas des fonctions, le théorème précédent admet comme corollaire des inégalités inversées:

<u>Corollaire 5.3</u>. Posons $d_{k,p} = (b_k^2-a_{k,p}^2)^{1/2} + (b_{k-1}^2-a_{k,p}^2)^{1/2} + 2a_{k,p}$. Il existe des constantes universelles $C(k,p)$ telles que, pour tout p, $1<p<\infty$, pour toute k-forme ω et pour tout $e \geq d_{k,p}$, on ait

$$\|C^{k,e}\omega\|_p \leq C(k,p)[e\,\|\omega\|_p + \|d\omega\|_p + \|\partial\omega\|_p].$$

<u>Preuve</u>: l'argument utilisé dans la démonstration du corollaire 4.3 montre que l'image par $C^{k,e}$ de C_c^∞ est dense dans $\mathbb{L}^{k,p}$, pourvu que $e>a_{k,p}$. On peut alors écrire

$$\|C_{k,e}\omega\|_p \leq \sup_{\{\eta/\ \|C^{k,e}\eta\|_q\leq 1\}}<C^{k,e}\omega,C^{k,e}\eta> = \sup_{\{\dots\}}<(e^2I-\Delta_k)\omega,\eta> =$$
$$= \sup_{\{\dots\}}[e^2<\omega,\eta> + <d\omega,d\eta> + <\partial\omega,\partial\eta>] \leq$$

$$\leq [e\,\|\omega\|_p + \|d\omega\|_p + \|\partial\omega\|_p] \sup_{\{\dots\}} [e\,\|\eta\|_q + \|d\eta\|_q + \|\partial\eta\|_q]$$

Mais, d'après le théorème précédent,

$$\|d\eta\|_q + \|\partial\eta\|_q \leq c(q,k)[\,\|C^{k,b_k}\eta\|_q + \|C^{k,b_{k-1}}\eta\|_q].$$

D'après le lemme, cette dernière quantité est majorée par

$$C\{[(b_k^2-a_{k,p})^{1/2} + (b_{k-1}^2-a_{k,p}^2)^{1/2}]\,\|\eta\|_q + \|C^{k,a_{k,p}}\eta\|_q\}\ .$$

Il nous reste à majorer une quantité de la forme

$$(e+d_{k,p}-2a_{k,p})\,\|\eta\|_q + \|C^{k,a_{k,p}}\eta\|_q \quad \text{par} \quad C(k,p)\,\|C^{k,e}\eta\|_q.$$

Or, $e+d_{k,p} \leq 2e \leq 2[(e^2-a_{k,p}^2)^{1/2}-a_{k,p}]$; on obtient donc une majoration de la forme $C(p,k)\ [(e^2-a_{k,p}^2)^{1/2}\,\|\eta\|_q + \|C^{k,a_{k,p}}\eta\|_q]$ qui se majore d'après le lemme 5.2 sous la forme désirée.

VI Transformations de Riesz pour les tenseurs dans le cas des variétés d'Einstein.

Rappelons qu'une variété d'Einstein est une variété Riemannienne sur laquelle le tenseur de Ricci est proportionnel à la métrique : $R = cg$. Dans ce cas, on a bien évidemment $\nabla R = 0$, et c'est de cette seule propriété dont nous servirons. Comme dans le paragraphe précédent, nous supposerons que $\rho = 1$, c'est à dire qu'on travaille avec la mesure riemannienne. Δ désigne le laplacien horizontal sur les tenseurs: il vérifie $\Delta|T|^2 = 2T.\Delta T + 2|\nabla T|^2$. C'est un opérateur autoadjoint négatif, et donc $\exp(t\Delta)$ est un semigroupe de contractions de $\mathbb{L}^2$, que nous noterons P_t.

Introduisons un nouvel opérateur $\bar{\Delta}$ sur les tenseurs, **défini** de la manière suivante: $\bar{\Delta}T = \Delta T - RT$, où R est un opérateur tensoriel dont l'expression en coordonnées locales s'écrit, pour un tenseur T d'ordre k, $k \geq 2$,

$$(RT)_{i_1\dots i_k} = cT_{i_1\dots i_k} - 2\Sigma_{q=2}^{k}\, r_{i_1 i i_q}{}^{l}\, T^{i}{}_{.i_2\dots i_{q-1}}{}^{l}{}_{.i_{q+1}\dots i_k}\ .$$

(On rappelle que r_{ijkl} désigne le tenseur de courbure et c est le rapport de proportionnalité entre R et g).

On a $\qquad \nabla\Delta T = \bar{\Delta}\nabla T$, pout tout tenseur T d'ordre ≥ 1. $\qquad$ (6.1)

Pour démontrer la formule (6.1), il suffit de faire le calcul dans un système de coordonnées locales: pour simplifier les notations, si α est un multiindice $(i_1,\dots,i_k)$, $r_{ij\alpha}{}^{\beta}T_{\beta}$ désigne $\Sigma_{q=1}^{k} r_{iji_q}{}^{l}T_{i_1\dots i_{q-1}li_{q+1}\dots i_k}$.

On a alors, pour tout tenseur T d'ordre k,

$$\nabla_a(\Delta T)_\alpha = \nabla_a\nabla^i\nabla_i T_\alpha = \nabla^i\nabla_a\nabla_i T_\alpha + r_a{}^i{}_{il}\nabla^l T_\alpha + r_{ai\alpha}{}^{\beta}\nabla^i T_\beta =$$

$$= \nabla^i\nabla_i\nabla_a T_\alpha + \nabla^i(r_{ai\alpha}{}^{\beta}T_\beta) + r_a{}^i{}_{il}\nabla^l T_\alpha + r_{ai\alpha}{}^{\beta}\nabla^i T_\beta =$$

$$= \Delta\nabla_a T_\alpha + 2r_{ai\alpha}{}^{\beta}\nabla^i T_\beta + r_{ai}{}^{i}{}_{l}\nabla^l T_\alpha + \nabla^i r_{ai\alpha}{}^{\beta}T_\beta .$$

Or, si nous contractons la deuxième identité de Bianchi, nous obtenons, en notant comme toujours R_{ij} le tenseur de Ricci,

$$\nabla^i r_{ijal} = \nabla_a R_{jl} - \nabla_l R_{ja} . \tag{6.2}$$

Cette dernière quantité est nulle, puisque $\nabla R = 0$. On obtient ainsi la formule (6.1).

<u>Remarque 1</u>: l'hypothèse $\nabla R = 0$ n'est en fait utilisée ici que pour annuler le terme (6.2): on pourrait étendre les résultats de ce chapitre à toutes les variétés telles que ∇R soit un tenseur symétrique en ses 3 indices.

<u>Remarque 2</u>: notre opérateur $\bar\Delta$ n'est pas le Laplacien de Lichnérowicz sur les tenseurs, [Li2;p.27].

Les symétries élémentaires du tenseur de courbure montrent que l'opérateur $\bar\Delta$ est symétrique. De plus, $\bar\Delta$ vérifie une formule de Bochner-Lichnérowicz-Weitzenböck:

(BLW) $\qquad \Delta|T|^2 = 2T.\bar\Delta T + 2|\nabla T|^2 + 2Q(T,T)$, où la forme quadratique Q n'est rien d'autre que $T.RT$.

Pour obtenir des résultats sur les transformations de Riesz sur les tenseurs, on est ammenés à supposer que cette forme est minorée, et on désigne par $-a_k^2$ un minorant de cette forme sur les tenseurs d'ordre k: $Q(T,T) \geq -a_k^2|T|^2$.

Sous cette hypothèse, une conséquence immédiate de la formule (BLW) est que l'opérateur $\bar\Delta$ est semiborné: $\langle T,\bar\Delta T\rangle = -\langle\nabla T,\nabla T\rangle - \langle Q(T,T)\rangle \leq -a_k^2\langle T,T\rangle$.

On peut alors répéter l'argument de Strichartz [S] pour démontrer que $\bar\Delta$ est en fait un opérateur autoadjoint, générateur d'un semigroupe symétrique borné, $\bar{P}_t = \exp(t\bar{\Delta})$. On a les propriétés élémentaires suivantes:

$|P_tT| \leq P_t|T|$; $|\bar{P}_tT| \leq \exp(a_k^2 t)P_t|T|$ (T tenseur d'ordre k);

$\nabla P_tT = \bar{P}_t\nabla T$, etc.

Les semigroupes P_t et $\bar{P}_t$ sont donc des semigroupes bornés sur les espaces $\mathbb{L}^p$ de tenseurs, et on peut dérouler toute la mécanique des deux paragraphes précédents, et l'on obtient les théorèmes:

Théorème 6.1. **Pour tout** p, $1<p<\infty$, il existe des constantes universelles c(p) telles que, pour tout tenseur T d'ordre k, on ait

$$\|\nabla T\|_p \leq c(p)\,\|(a_{k+1}^2 - \Delta)^{1/2}T\|_p.$$

La quantité $\|(a_k^2 - \Delta)^{1/2}T\|_p$ est équivalente, avec des constantes universelles ne dépendant ni de E, ni de p, à $a_k\|T\|_p + \|(-\Delta)^{1/2}T\|_p$, et on obtient également des inégalités inverses:

Théorème 6.2. Pour tout p, $1<p<\infty$, il existe des constantes universelles c(p) telles que , pour tout tenseur t d'ordre k,

$$\|(-\Delta)^{1/2}T\|_p \leq c(p)[a_{k+1}\|T\|_p + \|\nabla T\|_p] .$$

On obtient également un analogue du corollaire 4.4. En désignant par $\mathbb{D}_{k,p}$ le sous espace de l'espace des tenseurs d'ordre k dans $\mathbb{L}^p$ engendré par les tenseurs de la forme ∇T, où T est un tenseur d'ordre k-1 , on a:

Corollaire 6.3. Si la forme quadratique $Q(T,T)$ est positive sur les tenseurs d'ordre k, le dual de $\mathbb{D}_{k,p}$ est $\mathbb{D}_{k,q}$, où q est l'exposant conjugué de p.

Démonstrations: identiques à celles des paragraphes 4 et 5 .

Références.

[B1] D.Bakry, Transformations de Riesz pour les semigroupes symétriques, Sém.Prob. XIX,p.179-206 ; Lect. Notes in Math. n°1123, Springer 1985.

[B2]D.Bakry, Un critère de non explosion pour certaines diffusions sur une variété riemannienne complète, C.R.Acad.Sc.Paris, t.303, série I, n°1, p.23-26, 1986.

[E] D.Elworthy, Stochastic methods and differential geometry, Sém.Bourbaki, 80/81, n° 567.

[F] M.Fukushima, Dirichlet forms and Markov processes, North Holland, Kodansha, 1980.

[G] M.Gaffney, A special Stokes'theorem for complete Riemannian manifolds, Ann. of Math. 60, p.458-466, 1954.

[L] N.Lohoué, Comparaison des champs de vecteurs et des puissances du laplacien sur une variété riemannienne à courbure non positive, J.Funct.Anal. 61, p.164-201, 1985.

[Li] A.Lichnerowicz, Géométrie des groupes de transformation,Dunod, Paris, 1958.

[Li2] A.Lichnerowicz, Propagateurs et commutateurs en relativité générale, Inst. Hautes Etudes Sci., Publ. Math. n°10, p.293-344, 1961.

[LLP]E.Lenglart, D.Lépingle, M.Pratelli, Présentation unifiée de certaines inégalités de théorie des martingales, Sém.Prob. XIV, p.26-48, Lect. Notes in Math. n°784, Springer 1980.

[M1] P.A.Meyer, Transformations de Riesz pour les lois gaussiennes, Sém. Prob. XVIII, p. 179-193, Lect.Notes in Math. n°1059, Springer 1983.

[M2] P.A.Meyer, Démonstration probabiliste de certaines inégalités de Littlewood-Paley, Sém. Prob. X , p.125-183, Lect.Notes in Math. n°511, Springer 1976.

[RS] M.Reed, B.Simon, Methods of modern mathematical physics II, Academic Press, New York, 1975.

[dR] G. de Rahm, Variétés différentiables, Hermann, Paris, 1960.

[S] R.Strichartz, Analysis of the Laplacian on the complete Riemannian manifold, J.funct. Anal.52, p.48-79, 1983.

[St] E.Stein, Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory, Ann.Math.Study63, Princeton 1970.