SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

LI-MING WU

Inégalité de Sobolev sur l'espace de Poisson

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 21 (1987), p. 114-136
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1987__21__114_0>

INEGALITE DE SOBOLEV SUR L'ESPACE DE POISSON

Liming WU(*)

0. INTRODUCTION.

Sur l'espace de Wiener, l'inégalité de Meyer pour le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck est bien connue [7]. Elle constitue la base de la théorie des espaces de Sobolev sur l'espace de Wiener.

Cet article a pour but d'établir cette inégalité pour le semi-groupe de Wiener-Poisson $(P_t)_{t \geq 0}$ sur l'espace de Poisson, introduit dans l'article précédent.

Nous continuons à employer les notations du premier article, et ajoutons un symbole "I" pour référer à ses résultats, par exemple : § I.2.1, Lemme I.1.2.1, Théorème I.2.2.1, (I.2.2.5) etc.

Précisément, nous allons établir l'inégalité suivante pour le semi-groupe de Wiener-Poisson (P_t) :

$$(0.1) \qquad C'_p \, \|C\phi\|_p \leq \|\sqrt{\Gamma(\phi,\phi)}\|_p \leq C_p \, \|C\phi\|_p \qquad (1 < p < +\infty)$$

où C est l'opérateur de Cauchy associé à L ; c'est-à-dire le générateur du semi-groupe de Cauchy (Q_t) associé à (P_t) ; Q_t est défini par :

$$(0.2) \qquad Q_t = \int_{\mathbb{R}_+} \mu_t(ds) P_s$$

et la famille $(\mu_t)_{t \geq 0}$ est caractérisée par :

$$(0.3) \qquad \mu_s * \mu_t = \mu_{s+t} \quad ; \quad \int_0^\infty \mu_t(ds) e^{-ps} = e^{-\sqrt{p}t}$$

Il est clair que (Q_t) est aussi un semi-groupe symétrique markovien dans $L^2(X,\mu)$.

Cet article est divisé en deux parties :

Dans la première partie (§ 1 et § 2), on établit l'inégalité de Sobolev *(0.1)* pour le semi-groupe de Wiener-Poisson associé au semi-groupe (T_t) du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$. Pour ceci, on établit d'abord *(0.1)* pour le semi-groupe de W-P associé au mouvement brownien sur le tore (voir § 1), puis on approche $\mathbb{R}^d$ avec les tores $\mathbb{R}^d / 2N\mathbb{Z}^d \simeq [N\text{-}N]^d$. Cette idée a été proposée par P.A. Meyer.

(*) UNIVERSITE PARIS VI - *Laboratoire de Probabilités* - 4, *place Jussieu* - *Tour* 56 3ème *Etage* - 75252 PARIS CEDEX 05

Dans la deuxième partie (§ 3 et § 4), on travaille dans un cadre général. L'hypothèse essentielle faite pour $(T_t, A, \mathcal{D})$ est la suivante :

$$(0.4) \qquad \Gamma_2^A(f,f) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\,[A\Gamma^A(f,f) - 2\Gamma^2(f,Af)] \geq 0, \quad \forall f \in \mathcal{D}.$$

Sous cette hypothèse, on établit dans la Proposition 3.1.1 :

$$(0.5) \qquad \Gamma_2(\phi,\phi) = \frac{1}{2}\,[L\Gamma(\phi,\phi) - 2\Gamma(\phi,L\phi)] \geq 0.$$

Dans son travail concernant la transformation de Riesz pour les semi-groupes symétriques, Bakry [1] a établi l'inégalité *(0.1)* en supposant *(0.5)* et plusieurs hypothèses techniques (pour appliquer les résultats de Meyer [6]) qui ne sont malheureusement pas vérifiées par notre système $(P_t, L, \mathcal{R})$.

Le paragraphe 3 est consacré à des préliminaires nécessaires à l'application de la méthode de Bakry [1], puis dans le paragraphe 4, nous établissons l'inégalité de Sobolev *(0.1)*.

Indiquons grossièrement l'histoire de l'inégalité *(0.1)* :

1. pour le semi-groupe du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$, ou dans un groupe de Lie localement compact, *(0.1)* est établie par Stein ([8], 1967-1970) ;

2. pour le semi-groupe de convolution dans $\mathbb{R}^d$, elle est établie par P.A. Meyer ([6], 1973) ;

3. pour le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener, elle est établie par P.A. Meyer ([7], 1982) ;

4. pour le semi-groupe symétrique de diffusion vérifiant $\Gamma_2(\phi,\phi) \geq 0$, elle est établie par Bakry [1] ; et dans un travail à paraître, il a relaxé la condition précédente pour le semi-groupe du mouvement brownien sur une variété.

1. L'INEGALITE DE SOBOLEV SUR L'ESPACE DE POISSON ASSOCIE AU TORE.

1.1. Nous commençons par l'espace de Poisson sur le tore. Dans ce cas particulier, les idées sont claires, et il est facile d'établir l'inégalité *(0.1)* à partir des résultats connus pour le mouvement brownien sur le tore ([1], [8]).

Soient $E = \mathbb{R}^d/_{2N\,\mathbb{Z}^d}$ le d-tore (N un entier > 0, on peut considérer E comme $[-N,N]^d$), $\lambda(dz) = dz$ la mesure de Lebesgue sur le tore E. Soit (T_t) le semi-groupe markovien de générateur Δ, où Δ est l'opérateur laplacien sur le tore.

Comme $\lambda(E) = (2N)^d < +\infty$, si (X,μ) est l'espace de Poisson sur $(\mathbb{R}^d/_{2N\,\mathbb{Z}^d}, dz)$, alors :

$$\mu(\{x \in X / x(E) = +\infty\}) = 0$$

et par conséquent, nous pouvons nous placer sur $\{x \in X / x(E) < +\infty\}$, qui sera noté encore par X simplement.

Nous introduisons maintenant, un espace intermédiaire $(\hat{X}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mu})$ défini comme suit :

- $\hat{X} \triangleq \bigcup_{n=0}^{\infty} E^n$ où $E^0 \triangleq \{\partial\}$ où $\partial \notin E$

- $\hat{\mathcal{A}}^0 = \sigma(\mathcal{B}(E^n)$ la tribu borélienne$/n=0,1,2,\dots)$

et $\hat{\mu}$ est la mesure de probabilité sur $(\hat{X}, \hat{\mathcal{A}}^0)$ définie par :

$$(1.1.1) \qquad \begin{cases} \hat{\mu}(E^0) = e^{-\lambda(E)} \\ \hat{\mu}(A_1 \times \dots \times A_n) = \dfrac{e^{-\lambda(E)}}{n!} \lambda(A_1)\dots\lambda(A_n) \end{cases}$$

où $A_k \in \mathcal{B}(E)$.

Considérons l'application suivante $\sigma : \hat{X} \to X$:

$$\sigma(\hat{x}) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{z_k}, \quad \text{si } \hat{x} = (z_1, \dots, z_n)$$

qui est $\hat{\mathcal{A}}^0 / \mathcal{A}^0$-mesurable et satisfait $\sigma(\hat{X}) = X$ (à cause de la convention ci-dessus). Il est facile de vérifier :

$$(1.1.2) \qquad \mu = \sigma(\hat{\mu}).$$

1.2. Nous nous restreignons dans ce paragraphe à l'espace intermédiaire $(\hat{X}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mu})$.

Soit $(\hat{P}_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe de noyaux markoviens de $\hat{X}$ dans $\hat{X}$, tel que

i) E^n est une classe invariante pour $\hat{P}_t$

ii) $\hat{P}_t\big|_{E^n} = T_t^{\otimes n}$.

Evidemment, $\hat{P}_t$ est symétrique dans $L^2(\hat{X}, \hat{\mu})$.

$$\text{Posons :} \quad \hat{\mathcal{R}} = \left\{ \phi : \hat{X} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \phi\big|_{E^n} \in C^\infty(E^n) \\ \phi, \hat{L}\phi, \hat{L}(\hat{L}\phi), \dots \in \bigcap_{1<p<+\infty} L^p(\hat{X}, \hat{\mu}) \end{array} \right\}$$

où $\hat{L}$ est le générateur de $(\hat{P}_t)_{t \geq 0}$, $\hat{L}\phi$ est défini par :

$$(\hat{L}\phi)\big|_{E^n} = \Delta_n(\phi\big|_{E^n})$$

où Δ_n est l'opérateur laplacien sur E^n (c'est aussi le générateur de $(T_n^{\otimes n})_{t \geq 0}$)

Nous adoptons les notations suivantes : $\hat{\Gamma}(\cdot,\cdot),\hat{C},D_p(\hat{L})$ qui ont le même sens que $\Gamma(\cdot,\cdot),C,D_p(L)$, mais sont relatives à $(\hat{P}_t)_{t\geq 0}$.

Nous allons établir la

<u>*Proposition 1.2.1*</u> : *(i)* $\hat{\mathcal{R}} \subseteq \bigcap_{1\leq p<+\infty} D_p(\hat{L})$, *$\hat{\mathcal{R}}$ est stable par $\hat{L}$, et pour $1 < p < +\infty$, nous avons l'inégalité de Sobolev suivante :*

$$C'_p \,\|\hat{C}\phi\|_p \leq \|\sqrt{\hat{\Gamma}(\phi,\phi)}\|_p \leq C_p \,\|\hat{C}\phi\|_p, \ \forall \phi \in \hat{\mathcal{R}} \tag{1.2.2}$$

où C_p, C'_p sont des constantes positives dépendant seulement de p.

(ii) de plus, si nous définissons $\hat{\Gamma}_m(\cdot,\cdot)$ sur $\hat{\mathcal{R}}\times\hat{\mathcal{R}}$ par :

$$\begin{cases} \hat{\Gamma}_1(\phi,\psi) = \hat{\Gamma}(\phi,\psi) \\ \hat{\Gamma}_{m+1}(\phi,\psi) = \frac{1}{2}(L\hat{\Gamma}_m(\phi,\psi) - \hat{\Gamma}_m(\phi,\hat{L}\psi) - \hat{\Gamma}_m(\hat{L}\phi,\psi)) \end{cases} \tag{1.2.3}$$

alors $\hat{\Gamma}_m(\phi,\phi) \geq 0$, $\forall m = 1,2,\ldots$, $\phi \in \hat{\mathcal{R}}$ et pour tout $1 < p < +\infty$, l'inégalité suivante a lieu :

$$C'_{m,p}\,\|\hat{C}^m\phi\|_p \leq \|\sqrt{\hat{\Gamma}_m(\phi,\phi)}\|_p \leq C_{m,p}\,\|\hat{C}^m\phi\|_p \tag{1.2.4}$$

où $C_{m,p}$ et $C'_{m,p}$ sont des constantes positives dépendant seulement de m et p.

Pour établir ces résultats, il nous faut rappeler l'inégalité du même type pour le semi-groupe du mouvement brownien sur le tore $E = \mathbb{R}^d/_{2N\,\mathbb{Z}^d}$:

<u>*Lemme 1.2.1*</u> : *Soit B l'opérateur de Cauchy associé à Δ ; on a pour $1 < p < +\infty$, $m = 1,2,\ldots$:*

$$\forall f \in C^\infty(E),\quad C'_{m,p}\|B^m f\|_{L^p(E,dz)} \leq \|\sqrt{\Gamma^\Delta_m(f,f)}\|_{L^p(E,dz)} \leq C_{m,p}\|B^m f\|_{L^p(E,dz)}$$

où $C_{m,p}, C'_{m,p}$ sont des constantes positives dépendant seulement de "p et m".

$\Gamma^\Delta_m(\cdot,\cdot)$ se définit de la même manière que $\hat{\Gamma}_m(\cdot,\cdot)$ (voir (1.2.3)).

<u>Remarque</u> : Nous désignons par $\nabla = (\partial_1,\ldots,\partial_d)$ le gradient sur le tore, il n'est pas difficile de vérifier que

$$\Gamma^\Delta_m(f,g) = \sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{d} \partial_{(k_1,\ldots,k_m)}f \cdot \partial_{(k_1,\ldots,k_m)}g \tag{1.2.5}$$

où $f,g \in C^\infty(E)$, $\partial_{(k_1,\ldots,k_m)}f = \partial_{k_1}(\ldots(\partial_{k_m}f)\ldots)$.

Le résultat du Lemme 1.2.1 est bien connu : lié à la transformation de Riesz il a été établi par Stein [8] (voir aussi [1]).

Démonstration de la proposition 1.2.1 :

(i) pour chaque $\phi \in \hat{\mathcal{R}}$, $\phi|_{E^n} \in C^\infty(E^n)$, si on regarde localement :

$(\hat{L}\phi)|_{E^n} = \Delta_n(\phi|_{E^n})$ où Δ_n est le laplacien sur $E^n = \mathbb{R}^{nd}/_{2N\,\mathbb{Z}^d}$.

Puisque $\hat{L}\phi \in \bigcap_{1\leq p<+\infty} L^p(\hat{X},\hat{\mu})$, on en déduit immédiatement :

$$\phi \in \bigcap_{1\leq p<+\infty} D_p(\hat{L}).$$

La stabilité de $\hat{\mathcal{R}}$ par $\hat{L}$ est évidente.

Ensuite, nous calculons, d'après la construction de notre espace intermédiaire $(\hat{X},\hat{\mu})$:

$$\int_{\hat{X}} \hat{\Gamma}^p(\phi,\phi)d\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E^n} (\hat{\Gamma}(\phi,\phi)|_{E_n}\, dz_1\ldots dz_n \cdot \frac{e^{-\lambda(E)}}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E^n} [\Gamma^{\Delta_n}(\phi|_{E^n},\phi|_{E^n}]^p\, dz_1\ldots dz_n \cdot \frac{e^{-\lambda(E)}}{n!}$$

d'autre part, puisque E^n est une classe invariante pour P_t, on a aussi :

$(\hat{C}\phi)|_{E^n} = B_n(\phi|_{E^n})$, où B_n est l'opérateur de Cauchy associé à $\Delta_n(B_n = -\sqrt{-\Delta_n})$. Le même calcul que le précédent donne :

$$\int_{\hat{X}} |\hat{C}\phi|^p\, d\hat{\mu} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(E)}}{n!} \int_{E^n} |B_n(\phi|_{E^n})|^p\, dz_1\ldots dz_n.$$

Finalement, nous appliquons le lemme 1.2.1 à ces deux formules et obtenons l'inégalité *(1.2.2)*.

(ii) L'inégalité *(1.2.4)* résulte du même raisonnement.

Remarque : Dans la démonstration ci-dessus, le fait que les constantes dans l'inégalité du Lemme 1.2.1 dépendent seulement de p et m indépendant de $E^n(n = 1,2,\ldots))$ joue un rôle tout-à-fait essentiel. C'est pourquoi nous soulignons toujours que les constantes sont universelles.

1.3. Dans ce paragraphe, nous allons traduire les inégalités de Sobolev pour $(\hat{P}_t)_{t\geq 0}$ en inégalités de Sobolev pour le semi-groupe de W-P $(P_t)_{t\geq 0}$.

Nous énonçons d'abord le :

<u>*Théorème 1.3.1*</u> : *Soit* (X,μ) *l'espace de Poisson sur le tore* $(E,\lambda) = (\mathbb{R}^d/_{2N}\mathbb{Z}^d, dz)$ $(P_t)_{t\geq 0}$ *le semi-groupe de W-P associé au semi-groupe* $(T_t)_{t\geq 0}$ *du mouvement brownien sur le tore.*

Alors, sur l'algèbre de fonctions-test :

$$\mathcal{R} = \left\{ F(x(f_1),\ldots,x(f_n)) \;\middle|\; \begin{array}{l} f_i \in C^\infty(E),\ i = 1,\ldots,n \\ F \text{ un polynôme} \end{array} \right\}$$

nous avons les inégalités de Sobolev suivantes $(1 < p < +\infty)$

(i) $\quad C'_p \, \|C\phi\|_p \leq \|\sqrt{\Gamma(\phi,\phi)}\|_p \leq C_p \, \|C\phi\|_p \qquad \forall \phi \in \mathcal{R}$

(ii) *si on choisit* $\Gamma_m(\cdot,\cdot)$ *sur* $\mathcal{R}\times\mathcal{R}$ *de la même manière que* $\hat{\Gamma}_m(\cdot,\cdot)$ $((1.2.3))$, *alors :*

$$\Gamma_m(\phi,\phi) \geq 0 \quad \textit{et pour tout} \quad \phi \in \mathcal{R} \ :$$

$$C'_{m,p} \, \|C^m\phi\|_p \leq \|\sqrt{\Gamma_m(\phi,\phi)}\|_p \leq C_{m,p} \, \|C^m\phi\|_p, \qquad m = 1,2,\ldots$$

où $C_p, C'_p, C_{m,p}, C'_{m,p}$ *sont des constantes positives universelles.*

<u>Démonstration</u> : Rappelons la définition $\sigma : \hat{X} \to X \quad (\hat{x} = (z_1,\ldots,z_n) \to \sum_{k=1}^{n} \delta_{z_k})$; si nous désignons par $(\hat{x}_t)$ le processus de Markov, de semi-groupe $(\hat{P}_t)$, alors $(\sigma(\hat{x}_t))_{t\geq 0}$ est, d'après (I.2.1.5), le processus de Wiener-Poisson.

A chaque fonction $\phi : X \to \mathbb{R}$, nous associons une fonction $\hat{\phi} : \hat{X} \to \mathbb{R}$ définie par : $\hat{\phi}(\hat{x}) = \phi(\sigma\hat{x})$. En tenant compte du fait ci-dessus, nous pouvons obtenir :

$$\forall \phi \in \mathcal{R} : \widehat{P_t\phi} = \hat{P}_t\hat{\phi} \quad \text{et} \quad \hat{\phi} \in \hat{\mathcal{R}} \text{ (d'après la définition de } \mathcal{R} \text{ et } \hat{\mathcal{R}})$$

d'où il résulte :

$$\widehat{L\phi} = \hat{L}\hat{\phi} \qquad \widehat{\Gamma(\phi,\phi)} = \hat{\Gamma}(\hat{\phi},\hat{\phi}), \quad \widehat{C\phi} = \hat{C}\hat{\phi}, \qquad \widehat{\Gamma_m(\phi,\phi)} = \hat{\Gamma}_m(\hat{\phi},\hat{\phi})$$

Finalement, le fait que $\mu = \sigma\cdot\hat{\mu}$ et la proposition 1.2.1 entraînent

$$\begin{aligned}
\|\sqrt{\Gamma_m(\phi,\phi)}\|_{L^p(X,\mu)} &= \|\sqrt{\widehat{\Gamma_m(\phi,\phi)}}\|_{L^p(\hat{X},\hat{\mu})} \\
&= \|\sqrt{\hat{\Gamma}_m(\hat{\phi},\hat{\phi})}\|_{L^p(\hat{X},\hat{\mu})} \\
&\sim \|\hat{C}^m \hat{\phi}\|_{L^p(\hat{X},\hat{\mu})} = \|C^m\phi\|_{L^p(X,\mu)}
\end{aligned}$$

Le théorème est démontré.

Remarque : Comme $C^\infty(E)$ est dense dans $D_p(\Delta)$ pour tout p : $1 \leq p < +\infty$, d'après le théorème I.2.2.1, $\mathcal{R}$ est dense dans $D_p(L)$ pour tout p : $1 \leq p < +\infty$. Par conséquent, les inégalités de Sobolev dans le théorème 1.3.1 sont vraies pour tout $\phi \in D_p(L)$.

2. *INEGALITE DE SOBOLEV POUR LE SEMI-GROUPE DE WIENER-POISSON ASSOCIE AU MOUVEMENT BROWNIEN DANS $\mathbb{R}^d$.*

2.1. Dans toute cette section, nous nous plaçons dans le cas où $(E,\lambda) = (\mathbb{R}^d, dz)$ (T_t) est le semi-groupe du mouvement brownien $\mathbb{R}^d$ (de générateur Δ)

$\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Soit $\{(X,\mu),(P_t)_{t\geq 0}, L, \mathcal{R}\}$ le système associé à $\{(\mathbb{R}^d,dz),(T_t)_{t\geq 0},\Delta,\mathcal{D}\}$; nous recopions la formule (I.2.2.1) :

$$\forall\phi = F(p(f_1),\ldots,p(f_n)) \in \mathcal{R}$$

$$(2.1.1)\quad L\phi = \sum_{i=1}^{n} F_i(p(f_1),\ldots,x(f_n))p(\Delta f_i) + \sum_{i,j=1}^{n} F_{ij}(p(f_1),\ldots,p(f_n))p(\nabla f_i\cdot\nabla f_j).$$

Nous commençons la discussion en présentant le :

Théorème 2.1.1 : *Définissons $\Gamma_m(\cdot,\cdot)$ sur $\mathcal{R}\times\mathcal{R}$ par :*

$$\begin{cases} \Gamma_1(\phi,\psi) = \Gamma(\phi,\psi) \\ \Gamma_{m+1}(\phi,\psi) = \frac{1}{2}\,[L\Gamma_m(\phi,\psi) - \Gamma_m(\phi,L\psi) - \Gamma_m(L\phi\ \psi)], \quad m \geq 1 \end{cases}$$

Alors, $\Gamma_m(\phi,\phi) \geq 0$ et l'inégalité de Sobolev suivante a lieu :

$$(2.1.2)\qquad C'_{m,p}\,\|C^m\phi\|_p \leq \|\sqrt{\Gamma_m(\phi,\phi)}\|_p \leq C_{m,p}\,\|C^m\phi\|_p, \quad m = 1,2,\ldots\ ;\quad 1 < p < +\infty.$$

où $C_{m,p}, C'_{m,p}$ sont des constantes positives universelles.

Démonstration : L'idée essentielle consiste à approcher $\mathbb{R}^d$ par le tore $\mathbb{R}^d/_{2N}\,\mathbb{Z}^d \simeq [-N,N]^d$ $(N = 1,2,\ldots)$.

Fixons $\phi = F(x(f_1),\ldots,x(f_n)) \in \mathcal{R}$, choisissons un entier $N_0 > 0$, tel que pour tout $N \geq N_0$: $\bigcup_{k=1}^{n} \operatorname{supp}(f_k) \subseteq\ ]-N,N[^d$ (puisque $f_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$).

Soit $(T_t^{(N)})$ le semi-groupe sur $\mathbb{R}^d$ tel que :

- la restriction de (T_t^N) au tore $[-N,N]^d$ est le semi-groupe du mouvement brownien sur le tore

- la restriction de T_t^N à $\mathbb{R}^d \setminus [-N,N]^d$ est l'opérateur identité.

Soit $(P_t^{(N)})_{t \geq 0}, L^{(N)}, \Gamma^{(N)}(\cdot,\cdot), C^{(N)}\}$ le système sur l'espace de Poisson (X,μ) associé à $(T_t^{(N)}, B^{(N)})$ où $B^{(N)}$ est l'opérateur de Cauchy associé à $(T_t^{(N)})_{t \geq 0}$.

D'après la formule *2.1.1* (voir également (I.2.2.1)), on peut affirmer que pour ϕ ci-dessus :

$$(2.1.3)\qquad \begin{cases} L\phi = L^{(N)}\phi,\ L^m\phi = (L^{(N)})^m\phi \\ \Gamma(\phi,\phi) = \Gamma^{(N)}(\phi,\phi),\ \Gamma_m(\phi,\phi) = \Gamma_m^{(N)}(\phi,\phi). \end{cases}$$

Il est facile d'établir l'inégalité suivante, à partir de l'inégalité de Sobolev pour le semi-groupe de W-P associé au mouvement brownien sur le tore (Théorème 1.3.1) :

$$(2.1.4)\qquad C'_{m,p}\,\|(C^{(N)})^m\phi\|_p \leq \|\sqrt{\Gamma_m^{(N)}(\phi,\phi)}\|_p \leq C_{m,p}\,\|(C^{(N)})^m\phi\|_p.$$

Pour établir l'inégalité de Sobolev *2.1.2* , nous considérons deux cas :

<u>Premier cas</u> : m est pair.

En remarquant que $C^2 = L$. Nous avons donc dans ce cas :

$$(C^{(N)})^m\phi = (-1)^{m/2}\,(L^{(N)})^{m/2}\phi = (-1)^{m/2}\,L^{m/2}\phi = C^m\phi.$$

Par suite, *2.1.3* et *2.1.4* entraînent *2.1.2*.

<u>Deuxième cas</u> : $m = 2k+1$ où $k = 0,1,2,\ldots$.

Nous allons utiliser le lemme suivant dont la preuve est donnée dans le prochain paragraphe (§ 2.2).

<u>*Lemme 2.1.1*</u> : *Pour* $\phi \in \mathcal{R}$ *fixée on a :*

$$C^{(N)}\phi \xrightarrow{(N\to+\infty)} C\phi \quad \textit{dans } L^p(X, \,) \quad \textit{pour tout } p : 1 \leq p < +\infty).$$

A partir de ce lemme, nous pouvons déduire pour tout $p : 1 \leq p < +\infty$:

$$\begin{aligned} (C^{(N)})^{2k+1}\phi &= C^{(N)}[(L^{(N)})^k\phi] && \text{(convention : } (L^{(N)})^0\phi = \phi)) \\ &= C^{(N)}(L^k\phi) && (L^k\phi \in \mathcal{R} \text{ d'après } \textit{2.1.1}) \\ &\xrightarrow[L^p(X,\mu)]{(N\to+\infty)} C(L^k\phi) = C^{2k+1}\phi \end{aligned}$$

Finalement, l'inégalité *2.1.2* est une traduction de *2.1.4* . □

2.2. Démonstration du lemme 2.1.1 : Notre démonstration est basée sur le résultat suivant, classique en analyse harmonique :

$$(2.2.1) \qquad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \qquad B^{(N)}f \xrightarrow{L^2(\mathbb{R}^d,dz)} Bf$$

où B est l'opérateur de Cauchy de Δ, i.e. $B = -\sqrt{-\Delta}$.

$B^{(N)}$ est l'opérateur de Cauchy associé à $(T_t^{(N)})$, défini dans § 2.1.

Nous avons maintenant, pour $\phi = F(x(f_1),\ldots,x(f_n)) \in \mathcal{R}$, d'après le lemme I.1.2.1,

$$\phi = \sum_{k=0}^{m} \tilde{p}^{(k)}(f_k \times \ldots \times f_{kk})$$

où les fonctions $f_{k\ell}$ $(k = 1,\ldots m \ ; \ \ell = 1,\ldots,k)$ (f_{00} est constante) appartiennent à l'algèbre engendrée par $\{f_1,\ldots,f_n\}$, et donc à $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

D'après la définition des semi-groupes de W-P $(P_t)_{t \geq 0}$ et $(P_t^{(N)})_{t \geq 0}$ (voir (I.1.3.1)), nous avons :

$$C^{(N)}\phi = \sum_{k=1}^{n} \tilde{p}^{(k)}(B_k^{(N)}[f_{k1} \otimes \ldots \otimes f_{kk}])$$

(d'après (I.1.2.3) et (2.2.1)) $\xrightarrow{L^2(X,\mu)} \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \tilde{p}^{(k)}(B_k[f_k \otimes \ldots \otimes f_{kk}]) = C\phi$

où $B_k^{(N)}$ est l'opérateur de Cauchy associé à $\underbrace{T_t^{(N)} \otimes \ldots \otimes T_t^{(N)}}_{k \text{ fois}}$,

B_k est l'opérateur de Cauchy associé à $\underbrace{T_t \otimes \ldots \otimes T_t}_{k \text{ fois}}$.

D'autre part, il résulte de l'inégalité *2.1.4* :

$$\|C^{(N)}(\phi)\|_p \leq (C_p')^{-1} \| \sqrt{\Gamma^{(N)}(\phi,\phi)}\|_p$$

$$= (C_p')^{-1} \|\sqrt{\Gamma(\phi,\phi)}\|_p \qquad \text{pour tout} \quad 1 \leq p < +\infty$$

où $C_p' = C_{1,p}'$ dans *2.1.4* .

Finalement, le théorème de convergence sous intégrabilité uniforme entraîne :

$$\|C^{(N)}\phi - C\phi\|_p \to 0 \qquad \text{pour tout} \quad 1 \leq p < +\infty.$$

Le lemme 2.1.1 est établi.

Remarque : Comme $\mathcal{R}$ est dense dans $D_p(L)$ $(1 \leq p < +\infty)$, d'après l'inégalité de Sobolev *2.1.2*, nous avons pour tout $\phi \in D_p(L)$:

$$C'_p \, \|C\phi\|_p \leq \|\sqrt{\Gamma(\phi,\phi)}\|_p \leq C_p \, \|C\phi\|_p \qquad (1 < p < +\infty)$$

3. *PRELIMINAIRES POUR LE CAS GENERAL.*

Jusqu'à la fin de cet article, nous travaillons dans le cadre général introduit dans le premier article :

- (E,λ), $(T_t)_{t \geq 0}, A, \mathcal{D}, \Gamma^A(\cdot,\cdot)$
- (X,μ), $(P_t)_{t \geq 0}, L, \mathcal{R}, \Gamma(\cdot,\cdot)$

outre les hypothèses faites dans § I.2.1 pour $(T_t, A, \mathcal{D})$, nous supposons encore :

(i) $\quad \Gamma_2^A(f,f) \triangleq \frac{1}{2} \; A\Gamma^A(f,f) - 2\Gamma^A(f,Af) \geq 0, \quad \forall f \in \mathcal{D}$

(ii) $\quad$ l'application $(u,v) \to A\Gamma^A(T_u f, T_v g)$ appartient à $C_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to L^p(E,\lambda))$ pour tout $1 \leq p < +\infty$, $f,g \in \mathcal{D}$.

Remarque : (i) est essentielle, tandis que (ii) est une hypothèse technique.

3.1.

Proposition 3.1.1 : *Sous les hypothèses faites pour $(T_t, \mathcal{D}, A)$, nous avons :*

$$\Gamma_2(\phi,\phi) \triangleq \frac{1}{2} \, [L\Gamma(\phi,\phi) - 2\Gamma(\phi,L\phi)] \geq 0 \quad \textit{pour tout } \phi \in \mathcal{R}. \tag{3.1.1}$$

Remarque : La forme bilinéaire $\Gamma_2(\cdot,\cdot)$ sur $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ définie par :

$$\Gamma_2(\phi,\psi) = \frac{1}{2} \, [L\Gamma(\phi,\psi) - \Gamma(\phi,L\psi) - \Gamma(L\phi,\psi)]$$

est appelée l'opérateur carré du champ itéré dans Bakry [1].

Démonstration : Pour $\phi = F(p(f_1),\ldots,p(f_n)) \in \mathcal{R}$, nous pouvons calculer d'après le théorème I.2.2.1 :

$$L\phi = \sum_{i=1}^{n} F_i(\;) \, p(Af_i) + \sum_{i,j=1}^{n} F_{ij}(\;) \, p(\Gamma^A(f_i,f_j))$$

$$\Gamma(\phi,\phi) = \sum_{i,j=1}^{n} F_i(\;) \, F_j(\;) \, p(\Gamma^A(f_i,f_j))$$

$$\Gamma_2(\phi,\phi) = \frac{1}{2} \, [L\Gamma(\phi,\phi) - 2\Gamma(\phi,L\phi)] \tag{3.1.2}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} F_i(\ )\ p(\Gamma_2^A(f_i,f_j))$$

$$+ \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} F_{ik}(\ )F_{j\ell}(\ )\cdot p(\Gamma^A(f_i,f_j))\ p(\Gamma^A(f_k,f_\ell))$$

$$+ \sum_{i,j,k=1}^{n} F_i(\ )\ F_{jk}(\ )\ [2p(\Gamma^A(f_k,\Gamma^A(f_i,f_j)) - p(\Gamma^A(f_i,\Gamma^A(f_j,f_k))]$$

où $F_i(\ ) = \frac{\partial F}{\partial y_i}\ (p(f_1),\dots,p(f_n))$, $\quad F_{ij}(\ ) = \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}\ (p(f_1),\dots,p(f_n))$.

Maintenant, nous posons :

$$\underset{n\times n}{N_1} = (\Gamma_2^A(f_i,f_j))_{i,j=1,\dots,n}$$

$$\underset{n\times n}{N_2} = (\Gamma^A(f_i,f_j))$$

N_3 est une matrice $n \quad n^2$, dont l'élément à la position $(i,j-1)n+k)$ est $\Gamma^A(f_k,\Gamma^A(f_i,f_j)) - \frac{1}{2}\,\Gamma^A(f_i,\Gamma^A(f_j,f_k))$ et définissons le produit tensoriel de deux matrices $\underset{m\times n}{M_1}$ et $\underset{p\times q}{M_2}$ par :

$$M_1 \otimes M_2 = \begin{pmatrix} M_1^{11}\cdot M_2,\dots,M_1^{1,n}\cdot M_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ M_1^{m,1}\cdot M_2,\dots,\ M_1^{m,n}\cdot M_2 \end{pmatrix}_{mp\times nq}$$

Nous pouvons réécrire la formule *3.1.2* en :

$$(3.1.3) \qquad \Gamma_2(\phi,\phi) = \nu\cdot\begin{pmatrix} p(N_1) & p(N_3) \\ & \\ p(N_3^T) & p(N_2)\otimes p(N_2) \end{pmatrix}\cdot\nu^T$$

où $\nu = (F_1(\ ),\dots,F_n(\ )\ ;\ F_{11}(\ ),\dots,F_{1n}(\ ),\dots,F_{n1}(\ ),\dots,F_{nn}(\ ))$

T indique la transposition :

$$p(M)^{ij} = p(M^{ij}).$$

Il résulte du fait suivant (classique en théorie des matrices) :

$$\underset{n\times n}{M_1} \geqq 0\ ,\quad \underset{n\times n}{M_2} \geqq 0 \Rightarrow M_1 \otimes M_2 \geqq 0$$

$$\Rightarrow (M_1 + M_2) \otimes (M_1 + M_2) \geqq M_1 \otimes M_1 + M_2 \otimes M_2$$

que : $\quad p(N_2) \otimes p(N_2) \geqq p(N_1 \otimes N_2)$.

Par suite,

$$(3.1.4) \qquad \Gamma_2(\phi,\phi) \geqq \nu\cdot\, p\begin{pmatrix} N_1 & N_3 \\ N_3^T & N_2 \otimes N_2 \end{pmatrix}\cdot\, \nu^T$$

D'autre part, pour un polynôme arbitraire G à n variables sans terme constant, nous obtenons de la même manière que ci-dessus :

$$\Gamma_2^A(G(f_1,\dots,f_n),\dots,G(f_1,\dots,f_n)) = \omega\cdot \begin{pmatrix} N_1 & N_3 \\ N_3^T & N_2 \otimes N_2 \end{pmatrix}\omega^T \geqq 0 \quad \text{(par hypothèse)}$$

où $\omega = (G_1(f_1,\dots,f_n),\dots,G_n(\ )\ ;\ G_{11}(\ ),\dots,G_{1n}(\ ),\dots,G_{n1}(\ ),\dots,G_{nn}(\ ))$.

Puisque G est arbitraire, nous déduisons :

$$\begin{pmatrix} N_1 & N_3 \\ N_3^T & N_2 \otimes N_3 \end{pmatrix} \geqq 0$$

d'où il résulte :

$$p\begin{pmatrix} N_1 & N_3 \\ N_3^T & N_2 \otimes N_2 \end{pmatrix} \geqq 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_2(\phi,\phi) \geqq 0 \ \text{d'après } 3.1.4\ . \ \square$$

Remarque : On peut conjecturer :

si $\Gamma_m^A(f,f) \geqq 0$ pour tout $f \in \mathcal{D}$, $m = 1,\dots,n$; alors

$\Gamma_m(\phi,\phi) \geqq 0$ pour tout $\phi \in \mathcal{R}$ et $m = 1,\dots,n$.

Il s'agit ici de calculs compliqués, et nous ne connaissons pas la réponse.

3.2. Les martingales fondamentales associées à notre système $(P_t,L,\mathcal{R})$.

Comme nous l'avons déjà indiqué dans l'introduction, notre travail est basé sur les travaux de Bakry ([1]). Mais on ne peut pas appliquer directement ses résultats à notre système $(P_t,L,\mathcal{R})$, parce qu'en comparaison avec les hypothèses faites dans [1], il nous manque les propriétés suivantes :

(i) les éléments de $\mathcal{R}$ ne sont pas bornés. Ce fait nous empêche d'apliquer les résultats de Meyer [6] (surtout le lemme 7, p. 156) qui sont techniquement la base du travail de Bakry [1].

(ii) μ n'est pas une mesure de référence, autrement dit, les ensembles μ-négligeables ne sont pas sûrement les ensembles de potentiel nul ; par exemple, $\{x \in X \mid x$ n'est pas une mesure de Radon$\}$ est un ensemble μ-négligeable, mais pas un ensemble de potentiel nul (ceci est clair si on regarde la construction du processus de W-P).

Pour surmontrer ces difficultés techniques, nous allons redémontrer quelques résultats de [6], convenant à notre système $(P_t, L, \mathcal{R})$.

Nous désignons par Ω l'espace $(X \times \mathbb{R})^{\mathbb{R}_+}$, par $Y_t = (X_t, B_t)$ l'application coordonnée d'indice t sur Ω, par $P^{\nu,a}$ (ν une loi sur X et $a > 0$) l'unique loi sur Ω telle que :

- $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(B_t)_{t \geq 0}$ sont indépendants.
- $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Markov, de semi-groupe $(P_t)_{t \geq 0}$, de loi initiale ν.
- $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}$, de générateur $\frac{d^2}{dt^2}$ ($\langle B,B\rangle_t = 2t$), partant de $a \in (0,+\infty)$.

Nous désignons en particulier par P^a la loi $P^{\mu,a}$, par $P^{x,a}$ la loi $P^{\delta_x,a}$.

Soit $(\vec{P}_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe du mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$, nous désignons par $(\tilde{P}_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe produit :

$$\tilde{P}_t((x,r),\cdot) = P_t(x,\cdot) \otimes \vec{P}_t(r,\cdot). \tag{3.2.1}$$

Nous allons établir le résultat suivant qui généralise le lemme 7 de [6] (p. 156) :

<u>Lemme 3.2.1</u> : *Soit $u : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{A}^o \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable.*

On suppose que pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, $u(\cdot,t)$ appartient à $D_1(L)$ et l'application $t \to u(\cdot,t)$ appartient à $C_b^2(\mathbb{R} \to L^1(X,\mu))$. Soient a,b deux fonctions $\mathcal{A}^o \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurables de $X \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{l} a(\cdot,t) \overset{\mu\text{-p.s.}}{=} L(u(\ ,t)) \\ b(\cdot,t) \overset{\mu\text{-p.s.}}{=} D_t^2(\cdot,t) \text{ (au sens de Fréchet dans } L^1(X,\mu)) \ ; \end{array}\right. \tag{3.2.2}$$

si on suppose encore que l'application $t \to a(\cdot,t)$ appartient à $C_b(\mathbb{R},L^1(X,\mu))$, alors il existe une version $\bar{u}$ de u (i.e. : $\forall r \in \mathbb{R}$, $\bar{u}(\cdot,r) \overset{\mu\text{-p.s.}}{=} u(\cdot,r)$ telle que le processus

(3.2.3) $\quad \bar{u}(x_t,B_t) - \int_0^t [a(x_s,B_s) + b(x_s,B_s)]dx$

est une P^a-martingale continue.

<u>Preuve</u> : On considère $(\tilde{P}_t)$ comme un semi-groupe de contractions, dans $C_b(\mathbb{R} \to L^1(X,\mu))$, muni de la norme : $|||u||| = \sup_{r\in\mathbb{R}} \|u(r)\|_{L^1(X,\mu)}$.

On calcule $(u(r) \overset{\Delta}{=} u(\cdot,r))$:

$$t^{-1}(\tilde{P}_t u(r) - u(r)) = t^{-1}[P_t(\int_{\mathbb{R}} \vec{P}_t(r,ds)\, u(s)) - u(r)] = t^{-1}[P_t u(r) - u(r)]$$

$$+ P_t[t^{-1}(\int_{\mathbb{R}} \vec{P}_t(r,ds)u(s) - u(r))] \xrightarrow[(t \to 0)]{L^1(X,\mu)} a(r) + b(r).$$

Par conséquent :

$$\tilde{P}_t u(r) = u(r) + \int_0^t \tilde{P}_s(a+b)\,(r)ds \quad \text{dans} \quad L^1(X,\mu)$$

d'où il résulte immédiatement que le processus

$$u(x_t,B_t) - \int_0^t (a+b)(x_s,B_s)ds$$

est une P^a-martingale (non nécessairement continue).

Prenons $\bar{u} = \tilde{R}_\lambda(\lambda u-a-b)^+ - \tilde{R}_\lambda(\lambda u-a-b)^-$ (avec la convention $\infty-\infty = 0$), où $\tilde{R}_\lambda(\lambda > 0)$ est la résolvante de $(\tilde{P}_t)_{t \geq 0}$. Comme $\tilde{P}_t$ est une contraction de $C_b(\mathbb{R} \to L^1(X,\mu)$, $\bar{u} \in C_b(\mathbb{R} \to L^1(X,\mu))$ et $\bar{u} = u$ dans cet espace. Autrement dit, nous avons :

$$\bar{u}(r) = u(r) \quad \text{dans} \quad L^1(X,\mu) \quad \text{pour tout} \quad r \in \mathbb{R}$$

$\bar{u}$ est donc une version de u.

Le théorème de Fubini entraîne que les deux processus $(\bar{u}(X_t,B_t))_{t\geq 0}$ et $(u(X_t,B_t))_{t\geq 0}$ sont équivalents sous la loi P^a. Pour terminer la preuve de ce lemme, il nous reste à établir la continuité p.s. du processus $(\bar{u}(X_t,B_t))_{t\geq 0}$ sous la loi $P^a = P^{\mu,a}$.

Posons $v = (\lambda u-a-b)^+$ ou $(\lambda u-a-b)^-$, nous choisissons une suite croissante de fonctions $\mathcal{A}^o \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurables <u>bornees positives</u> $(v_n)_{n\geq 1}$, telle que $v_n \uparrow v$ partout sur $X \times \mathbb{R}$.

D'après le lemme de Fatou, $\tilde{R}_\lambda v_n \uparrow \tilde{R}_\lambda v$ partout.

Comme dans la démonstration de la proposition I.2.3.1, on peut démontrer que $(\tilde{R}_\lambda v_n(X_t,B_t))_{t \geq 0}$ est un processus p.s. continu pour tout $P^{x,a}$ ($x \in X$, $a \in (0,+\infty)$ arbitraire), donc pour la loi $P^a = P^{\mu,a}$.

D'autre part, $M_t^n \stackrel{\Delta}{=} e^{-\lambda t} \tilde{R}_\lambda v_n(X_t,B_t) + \int_0^t e^{-\lambda s} v_n(X_s,B_s)ds$ est une P^a-martingale continue positive. Remarquons :

$$0 \leq M_t^n \uparrow M_t \stackrel{\Delta}{=} e^{-\lambda t} \tilde{R}_\lambda v(X_t,B_t) + \int_0^t e^{-\lambda s} v(X_s,B_s)$$

partout sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$ et $M_t \in L^1(P^a)$.

$\{M_t^n, t \in [0,T], n = 1,2,\ldots\}$ est donc borné dans $L^1(P^a)$ pour tout $T > 0$, et en plus, d'après le lemme maximal pour les martingales, (M^n) est une suite de Cauchy pour la convergence uniforme sur les compacts en probabilité, donc $M^n \to M$ uniformément en probabilité sur les compacts, donc M est P^a-p.s. continu. En particulier, $(\tilde{R}_\lambda v(X_t,B_t))_{t \geq 0}$ est un processus continu. □

<u>Remarque</u> : Soit $\bar{u}$ une version de u. Nous avons, d'après le théorème de Fubini : $\bar{u}(X_\tau,B_\tau) = u(X_\tau,B_\tau)$ P^a-p.s. pour un temps d'arrêt τ du mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$. Ce fait nous servira beaucoup.

Posons :

(3.2.4) $\quad \tau_c = \inf\{t \geq 0 : B_t = c\} \quad (c \in \mathbb{R}) \qquad \tau = \tau_0.$

Nous allons démontrer :

<u>*Lemme 3.2.2*</u> : *Soit $u : X \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ l'une des fonctions suivantes $P_t\phi$, $Q_t\phi$ $\Gamma(P_t\phi, P_t\phi)$, $\Gamma(Q_t\phi, Q_t\phi)$ où $\phi \in \mathcal{R}$. Alors il existe une version de u, notée encore u telle que :*

(3.2.5) $\quad M_u^t = u(X_{t\wedge\tau}, B_{t\wedge\tau}) - \int_0^t (Lu + D_t^2 u)(X_s,B_s)ds$

soit une P^a-martingale continue.

<u>Preuve</u> : Choisissons une fonction $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\rho \in C^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{avec } \operatorname{supp}(\rho) \subseteq (\varepsilon/2,+\infty) \; ; \quad \rho = 1 \text{ sur } [\varepsilon,+\infty)$$

Il n'est pas difficile de vérifier à partir des hypothèses faites pour le système $(T_t,\mathcal{D},A)$ et des résultats du premier article que la fonction $\rho u : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $X \times \mathbb{R}$ par :

$$\rho u(x,t) = 0 \quad (t < 0) \ ; = \rho(t)\, u(x,t),\ t \geq 0$$

vérifie les hypothèses du Lemme 3.2.1.

Par conséquent, le Lemme 3.2.1 entraîne que :

$$M_u^{t\wedge\tau_\varepsilon} = u(X_{t\wedge\tau_\varepsilon}, B_{t\wedge\tau_\varepsilon}) - \int_0^{t\wedge\tau_\varepsilon} (Lu + D_t^2 u)(X_s,B_s)ds$$

est une P^a-martingale continue.

Prenons une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ telle que $\varepsilon_n \downarrow 0$ $(\varepsilon_n < a)$. Nous avons :

$$\tau_{\varepsilon_n} \uparrow \tau .$$

Nous vérifions d'abord la continuité de $(M_u^t)_{t\geq 0}$ (sous la loi P^a), i.e. celle de $(u(X_{t\wedge\tau}, B_{t\wedge\tau}))_{t\geq 0}$.

Il est évident que $(u(X_{t\wedge\tau}, B_{t\wedge\tau}))_{t\geq 0}$ est continu sur $[0,\tau_{\varepsilon_n}[\ \cup \ [\tau,+\infty)$; pour établir sa continuité, il nous reste à démontrer :

$$u(X_{\tau_{\varepsilon_n}}, B_{\tau_{\varepsilon_n}}) \to u(X_\tau, B_\tau) \qquad P^a\text{-p.s.}$$

(i.e.)

(3.2.6) $$u(X_{\tau_{\varepsilon_n}}, \varepsilon_n) \to u(X_\tau, 0) \qquad P^a\text{-p.s.}$$

Remarquons d'abord :

$$\|u(X_{\tau_{\varepsilon_n}}, \varepsilon_n) - u(X_\tau,0)\|_{L^2(P^a)}$$

$$\leq \|u(X_{\tau_{\varepsilon_n}}, \varepsilon_n) - u(X_{\tau_{\varepsilon_n}},0)\|_{L^2(P^a)} + \|u(X_{\tau_{\varepsilon_n}},0) - u(X_\tau,0)\|_{L^2(P^a)}$$

(la loi de $X_{\tau_{\varepsilon_n}}$ sous P^a est μ)

$$= \|u(\cdot,\varepsilon_n) - u(\cdot,0)\|_{L^2(\mu)} + \|u(X_{\tau_{\varepsilon_n}},0) - u(X_\tau,0)\|_{L^2(P^a)} \to 0$$

parce que $u(\cdot,0) \in \mathcal{R}$ et $(u(X_t,0))_{t\geq 0}$ est un processus continu.

Il reste à choisir une sous-suite de $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ telle que 3.2.6 soit vraie ; ainsi, nous avons établi la continuité de $(u(X_{t\wedge\tau}, B_{t\wedge\tau}))_{t\geq 0}$ sous la loi P^a.

Fixons maintenant $t \in \mathbb{R}_+$, $M_u^{t\wedge\tau_{\varepsilon_n}} \to M_u^t$ P^a-p.s. et comme $\{M_u^{t\wedge\tau_{\varepsilon_n}}, n \geq 1\}$

$$M^{t\wedge\tau_{\varepsilon_n}} \to M_u^t \quad \text{dans } L^1(P^a) \quad (n \to +\infty)$$

(M_u^t) est donc une P^a-martingale. □

Corollaire 3.2.1 : *Soit $\overline{\phi}(x,t) = Q_t\phi$. Il existe une version de $\overline{\phi}$, notée encore $\overline{\phi}$, telle que le processus*

(3.2.7) $$M_t(\phi) = \overline{\phi}(x_{t\wedge\tau}, B_{t\wedge\tau}) - \overline{\phi}(x_0, a)$$

soit une martingale continue (sous la loi P^a).

Nous désignons par $\vec{M}(\phi)$ la projection orthogonale de $M(\phi)$ sur le sous-espace stable engendré par (B_t), par $M^{\dagger}(\phi)$ la projection "verticale" de $M(\phi)$ sur le sous-espace orthogonal.

Nous avons :

(3.2.8) $$\vec{M}_t(\phi) = \int_0^{t\wedge\tau} D_t\overline{\phi}\ (x_s, B_s)dB_s$$

(3.2.9) $$<\vec{M}(\phi), \vec{M}(\phi)>_t = 2\int_0^{t\wedge\tau} (D_t\overline{\phi})^2(x_s, B_s)ds$$

(3.2.10) $$<M^{\dagger}(\phi), M^{\dagger}(\phi)>_t = 2\int_0^{t\wedge\tau} \Gamma(\overline{\phi}, \overline{\phi})(x_s, B_s)ds.$$

Preuve : Parce que $L\overline{\phi} + D_t^2\overline{\phi} = LQ_t\phi + Q_tC^2\phi = 0$, d'après le Lemme 3.2.2, $M(\phi)$ est une martingale continue, et la formule d'Itô entraîne :

(3.2.11) $$<M(\phi), M(\phi)>_t = 2\int_0^{t\wedge\tau} (\Gamma(\overline{\phi}, \overline{\phi}) + D_t^2\overline{\phi})(x_s, B_s)ds$$

Remarquons que 3.2.9 résulte de 3.2.8 $(<B,B>_t = 2t)$, et que 3.2.10 résulte de 3.2.9 et 3.2.11 . Il nous suffit de montrer 3.2.8 .

Choisissons une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

- $g \in C_b^3(\mathbb{R})$
- $\mathrm{supp}(g) \subseteq [\varepsilon, +\infty[$ où ε vérifie : $0 < \varepsilon < 1/_2$, $a \in [2\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$.
- $g(t) = t$ sur $[2\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$.

Posons $u(x,t) = g(t)\ \overline{\phi}(x,t)$. Lemme 3.2.1 entraîne que le processus

$$u(x_t, B_t) - \int_0^t (Lu + D_t^2u)(x_s, B_s)ds$$

est une martingale continue.

Mais $Lu + D_t^2 u = g(L\bar{\phi} + D_t^2\bar{\phi}) + \bar{\phi} \cdot D_t^2 g + 2\, D_t g \cdot D_t \bar{\phi}$

$$= \bar{\phi} \cdot D^2 g + 2D_t g \cdot D_t \bar{\phi}$$

par suite, pour $t \leq \tau_{2\varepsilon} \wedge \tau_{\varepsilon^{-1}} < \tau$:

$$u(x_t, B_t) - \int_0^t (Lu + D_t^2 u)(x_s, B_s)ds$$

$$= \bar{\phi}(x_t, B_t)B_t - 2 \int_0^t D_t \bar{\phi}(x_s, B_s)ds$$

Par conséquent, le dernier membre est une martingale jusqu'à l'instant $\tau_{2\varepsilon} \wedge \tau_{\varepsilon^{-1}}$. Il en résulte :

$$(3.2.12) \qquad \langle M(\phi), B\rangle_{t \wedge \tau_{2\varepsilon} \wedge \tau_{\varepsilon^{-1}}} = 2 \int_0^{t \wedge \tau_{2\varepsilon} \wedge \tau_{\varepsilon^{-1}}} D_t \bar{\phi}(x_s, B_s)ds$$

En faisant tendre ε vers 0 dans *3.2.12*, nous obtenons :

$$\langle M(\phi), B\rangle_t = \langle M(\phi), B\rangle_{t \wedge \tau} = 2 \int_0^{t \wedge \tau} D_t \bar{\phi}(x_s, B_s)ds.$$

D'autre part, nous écrivons la représentation comme intégrale stochastique de $\vec{M}(\phi)$: $\vec{M}_t(\phi) = \int_0^t H_s \, dB_s$.

H_s est la densité de $d\langle M(\phi), B\rangle_t$ par rapport à $d\langle B, B\rangle_t = 2dt$, et H_s est donc égale à $(D_t \bar{\phi})(x_s, B_s)$. □

3.3. Dans ce paragraphe, nous allons établir la :

Proposition 3.3.1 : Pour toute $\phi \in \mathcal{R}$, $1 < p < +\infty$, *nous avons l'inégalité suivante :*

$$(3.3.1) \qquad \| \langle \vec{M}(\phi), M(\phi)\rangle_\infty^{1/2} \|_p \leq C_p \|\phi\|_p \leq C'_p (\| \Omega_{2a}\phi\|_p + \| \langle \vec{M}(\phi), \vec{M}(\phi)\rangle_\infty^{1/2} \|_p).$$

Remarque : L'inégalité ci-dessus reste encore vraie quand $\vec{M}(\phi)$ est remplacée par $M^{\uparrow}(\phi)$ ou $M(\phi)$, d'après l'égalité *3.3.3* .

Démonstration : Comme P_t est symétrique et markovien dans $L^2(X,\mu)$, nous avons :

$$(3.3.2) \qquad \langle C\phi, C\psi\rangle_\mu = -\langle \phi, L\psi\rangle_\psi = \langle \Gamma(\phi,\psi), 1\rangle_\mu .$$

D'après *3.2.9* et *3.2.10*, nous déduisons :

(3.3.3) $$E^a\langle\vec{M}(\phi),\vec{M}(\psi)\rangle_\infty = 2\,E^a\int_0^\tau (D_t\bar{\phi}\cdot D_t\bar{\psi})(X_s,B_s)ds$$

$$= 2\,E^a\int_0^\tau\int_X C\bar{\phi}\cdot C\bar{\psi}(\cdot,B_s)d\mu\;ds$$

$$\overset{(3.3.2)}{=} 2\,E^a\int_0^\tau\int_X \Gamma(\bar{\phi},\bar{\psi})(\cdot,B_s)d\mu\;ds$$

$$\overset{(3.3.10)}{=} E^a\langle M^\uparrow(\phi),\,M^\uparrow(\psi)\rangle_\infty$$

par suite : $$= \frac{1}{2}\,E^a\langle M(\phi),\,M(\psi)\rangle_\infty$$

$$= \frac{1}{2}\,E^\infty\,M_\infty(\phi)\,M_\infty(\psi)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_X \phi\psi\,d\mu - \int_X Q_a\phi\cdot Q_a\psi\,d\mu\right)$$

pour tout $\phi,\psi\in\mathcal{R}$, où $E^a = E^{P^a}$.

Il résulte de 3.3.3 :

$$|\langle\phi,\psi\rangle_\mu| \leq |\langle Q_a\phi,Q_a\psi\rangle_\mu| + 2|E^a\langle\vec{M}(\phi),\vec{M}(\psi)\rangle_\infty|$$

$$\leq |\langle Q_{2a}\phi,\psi\rangle_\mu| + 2\|\langle\vec{M}(\phi),\vec{M}(\phi)\rangle_\infty^{1/2}\|_{L^p(P^a)}\,\|\langle\vec{M}(\psi),\vec{M}(\psi)\rangle_\infty^{1/2}\|_{L^q(P^a)}$$

d'après l'inégalité de Kunita - Watanabe, où

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Burkholder, nous avons :

$$\|\langle\vec{M}(\psi),\vec{M}(\psi)\rangle_\infty^{1/2}\|_q \leq C_q\,\|\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|\bar{\psi}|(X_{t\wedge\tau},B_{t\wedge\tau})\|_q$$

$$\leq C'_q\,\|\psi(X_\tau)\|_{L^q(P^a)} \quad \text{(l'inégalité de Doob)}$$

$$= C'_q\,\|\psi\|_q$$

d'où résulte l'inégalité de gauche de 3.3.1 .

Pour établir l'inégalité droite de 3.3.1 , remarquons que $\mathcal{R}$ est dense dans $L^p(X,\mu)$ pour tout $1\leq p<+\infty$, nous avons donc :

$$\|\phi\|_p = \sup_{\substack{\psi\in\mathcal{R}\\ \|\psi\|_q\leq 1}} |\langle\phi,\psi\rangle_\mu|$$

$$\leq \sup_{\|\psi\|_q \leq 1} |\langle Q_{2a}\phi,\psi\rangle_\mu| + \sup_{\|\psi\|_q \leq 1} 2\|\langle \vec{M}(\phi),\vec{M}(\phi)\rangle_\infty^{1/2}\|_p \, \|\langle \vec{M}(\psi),\vec{M}(\psi)\rangle_\infty^{1/2}\|_q$$

$$\leq \|Q_{2a}\phi\|_p + C'_q \, \|\langle \vec{M}(\phi),\vec{M}(\phi)\rangle_\infty^{1/2}\|_p$$

3.3.1 est établie.

4. *INEGALITES DE SOBOLEV POUR LE SEMI GROUPE DE WIENER-POISSON DANS LE CAS GENERAL.*

Nous nous plaçons dans le cadre introduit dans le § 3.

4.1. Domination de C par $\sqrt{\Gamma(\cdot,\cdot)}$.

Nous commençons par présenter le résultat suivant dont la démonstration est empruntée à Bakry [1].

Théorème 4.1.1 : *Soit $1 < p < +\infty$; nous avons :*

$$\|C\phi\|_p \leq C_p \, \|\sqrt{\Gamma(\cdot,\cdot)}\|_p \qquad \phi \in \mathcal{R}$$

où C_p est une constante positive universelle.

Démonstration : Prenons $u(\cdot,t) = \Gamma(Q_t\phi,Q_t\phi)$; nous calculons d'après le Lemme 3.2.2 :

$$D_t u = 2\Gamma(Q_t\phi,Q_tC\phi)$$

$$D_t^2 u = 2\Gamma(Q_tC\phi,Q_tC\phi) + 2\Gamma(Q_t\phi,Q_tC^2\phi)$$

$$Lu + D_t^2 u = 2\Gamma(Q_tC\phi,Q_tC\phi) + 2\Gamma_2(Q_t\phi,Q_t\phi) \geq 2\Gamma(Q_tC\phi,Q_tC\phi) \geq 0.$$

D'après la Proposition 3.2.1, le processus,

$$Z_t = u(x_{t\wedge\tau},B_{t\wedge\tau})$$

est une sous-martingale positive avec la décomposition de Doob-Meyer :

$$Z_t = M_t + A_t$$

où $A_t = \int_0^{t\wedge\tau} (Lu + D_t^2u)(x_s,B_s)ds \geq 2\int_0^{t\wedge\tau} \Gamma(Q\cdot C\phi,Q\cdot C\phi)(x_s,B_s)ds$

$$= \langle M^\dagger(C\phi),M^\dagger(C\phi)\rangle_\infty \quad \text{(d'après } 3.2.10\text{)}.$$

Il résulte de l'inégalité *3.3.1* (pour $M^\dagger(C\phi)$) que :

$$\|C\phi\|_p \leq C_p(\|Q_{2a}\phi\|_p + \|\langle M^\dagger(C\phi),M^\dagger(C\phi)\rangle_\infty^{1/2}\|_{L^2(P^a)}$$

$$= C_p \; (\|Q_{2a}C\phi\|_p + \|A_\infty^{1/2}\|_p.$$

En faisant tendre a vers $+\infty$, d'après l'inégalité *3.4.2* , nous avons :

$$\|Q_{2a}C\phi\|_p \leq C_p(2a)^{-1}\|\phi\|_p \to 0.$$

Il nous reste à estimer : $\|A_\infty^{1/2}\|_p$.

Pour deux temps d'arrêt bornés S,T : $S \leq T$, on a :

$$E(A_T - A_S) = E(Z_T - Z_S) \leq E\left[Z_1^* \, 1_{[S<T]}\right]$$

où $Z_1^* = \sup_{t \leq T} Z_t$, d'après le Lemme de Lenglart - Lépingle - Pratelli, nous déduisons :

(*4.1.1*) $\qquad E\, A_\infty^q \leq C_q\, E(Z_\infty^{*q}) \qquad \forall\, 0 < q < +\infty.$

Considérons le processus $(\sqrt{Z_t})_{t \geq 0}$, qui est aussi une sous-martingale positive d'après [1]. D'après l'inégalité de Doob, nous avons :

$$E\, A_\infty^{p/2} \leq C_{p/2}\, E\, Z_\infty^{*p/2} \leq C_p\, E\, Z_\infty^{p/2} = C_p \quad \mu(\Gamma(\phi,\phi)^{p/2})$$

car la loi de X_τ est μ. □

4.2. Majoration de $\sqrt{\Gamma(\cdot,\cdot)}$ par C

Nous présentons dans ce paragraphe l'autre moitié de l'inégalité de Sobolev ; la démonstration est tout-à-fait identique à celle donnée en [1].

Théorème 4.2.1 : Soit $p > 2$. Pour tout $\phi \in \mathcal{R}$ vérifiant :

(*4.2.1*) $\qquad Q_a\phi \xrightarrow{L^2(X,\mu)} 0 \qquad (a \to +\infty)$

nous avons :

(*4.2.2*) $\qquad \|\sqrt{\Gamma(\phi,\phi)}\|_p \leq C_p\, \|C\phi\|_p.$

Remarque : Lorsque $\phi \in L^2(X,\mu)$ vérifie *4.2.1* on dit que ϕ est sans partie invariante.

Corollaire 4.2.1 : (i) quand $\lambda(E) < +\infty$, si on suppose

(*4.2.3*) $\qquad T_t f \xrightarrow{L^2(E,\mu)} \lambda(f) \qquad (t \to +\infty) \qquad \forall f \in \mathcal{D}$

alors l'inégalité 4.2.2 est vraie pour tout $\phi \in \mathcal{R}$

(ii) quand $\lambda(E) = +\infty$, si on suppose

(*4.2.4*) $\qquad T_t f \xrightarrow{L^2(E,\mu)} 0 \qquad (t \to \infty) \qquad \forall f \in \mathcal{D}$

l'inégalité 4.2.2 a lieu aussi pour tout $\phi \in \mathcal{R}$.

Preuve : (i) $\forall\phi \in \mathcal{R}$:

$$\phi = \sum_{n=1}^{m} \tilde{p}^{(n)}(f_{n,1} \otimes \ldots \otimes f_{n,n}) + \mu(\phi), \quad \text{où} \quad f_{n,k} \in \mathcal{D}$$

Posons : $\phi_\infty = \mu(\phi) + \sum_{n=1}^{m} \tilde{p}^{(n)}(\lambda(f_{n,1}) \otimes \ldots \otimes \lambda(f_{n,n})) \in \bigcap_{1 \leq p < +\infty} L^p(X,\mu)$.

D'après notre hypothèse, nous avons :

$$P_t(\phi - \phi_\infty) \xrightarrow{L^2(X,\mu)} 0 \qquad (t \to +\infty)$$

$$\Rightarrow Q_t(\phi - \phi_\infty) \xrightarrow{L^2(X,\mu)} 0 \qquad (t \to +\infty) \text{ d'après la définition de } Q_t.$$

D'autre part, d'après la définition du semi-groupe de W-P $(P_t)_{t \geqq 0}$, nous avons aussi : $P_t\phi_\infty = \phi_\infty$ d'où il résulte : $L\phi_\infty = C\phi_\infty = \Gamma(\phi_\infty,\phi) = 0$.

Finalement, $\forall\phi \in \mathcal{R}$, l'inégalité *4.2.2* entraîne :

$$\|\sqrt{\Gamma(\phi,\phi)}\|_p = \|\sqrt{\Gamma(\phi-\phi_\infty,\phi-\phi_\infty)}\|_p \leq C_p \|C(\phi-\phi_\infty)\|_p = C_p \|C\phi\|_p$$

(ii) Dans ce cas-là, nous obtenons :

$$P_t(\phi-\mu(\phi)) \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2(X,\mu) \quad \text{lorsque} \quad t \to \infty$$

ce qui implique :

$$Q_t(\phi-\mu(\phi)) \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2(X,\mu) \qquad (t \to \infty).$$

Une application de l'inégalité *4.2.2* à $\phi-\mu(\phi)$, nous donne le résultat.

Remarque 1 : Les conditions *4.2.3* ou *4.2.4* expriment justement l'ergodicité du semi-groupe $(T_t)_{t \geqq 0}$.

Remarque 2 : En supposant l'ergodicité du semi-groupe $(T_t)_{t \geqq 0}$, nous avons :

$$C'_p \|C\phi\|_p \leq \|\sqrt{\Gamma(\phi,\phi)}\|_p \leq C_p \|C\phi\|_p \qquad (p \geqq 2)$$

pour tout $\phi \in D_p(L)$, parce que $\mathcal{R}$ est dense dans $D_p(L)$.

4.3. Nous terminons cet article en présentant une application des résultats généraux précédents.

Prenons $(E,\lambda) = (\mathbb{R}^d, e^{\rho(z)}dz)$ où $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec :

$$|\nabla\rho(z)| \leq C(1 + |z|).$$

Cette condition assure que la diffusion de générateur

$$A = \Delta + \nabla\rho\cdot\nabla \text{ , dans } \mathbb{R}^d \text{ n'explose pas.}$$

Soit (T_t) le semi-groupe de la diffusion précédente, nous pouvons vérifier d'après la relation de Kolmogorov que (T_t) est symétrique dans $L^2(E,\lambda)$, par suite, $\lambda(dz) = e^{\rho(z)}dz$ est une mesure invariante pour (T_t)).

Prenons $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Quand ρ est concave, on peut vérifier :

$$\Gamma_2^A(f,f) \geq 0 \qquad \forall\, f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \qquad ([1])$$

D'après la théorie générale des diffusions (nous n'entrons pas dans les détails voir [9]). Nous pouvons vérifier les autres hypothèses techniques y compris l'ergodicité de (T_t)).

Finalement, l'inégalité de Sobolev pour le semi-groupe de W-P associé à (T_t) (Théorème 4.1.1 et Corollaire 4.2.1).

REFERENCES :

[1] BAKRY (D). Transformations de Riesz pour les semi-groupes symétriques I, II. Sémi. de Proba. XIX, Lect. Notes in Math. 1123, Springer (1985).

[2] BAKRY (D) et EMERY (M) : Diffusions hypercontractives. Sémi. de Proba. XIX Lect. Notes in Math. 1123, Springer (1985).

[3] DELLACHERIE (C). et MEYER (P.A) : Probabilités et Potentiels. 2ième volume Hermann (1980).

[4] GETOOR (R.K) : Markov processes : Ray processes and right processes. Lect. Notes in Math. 440, Springer (1975).

[5] MEYER (P.A) : Processus de Markov. Lect. Notes in Math. 26, Springer (1967).

[6] MEYER (P.A) : Démonstrations probabilistes de certaines inégalités de Littlewood-Paley I, II, III. Sém. de Proba. X, Lect. Notes in Math. 551, Springer (1976).

[7] MEYER (P.A) : Note sur les processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Sém. de Proba. XVI, Lect. Notes in Math. 920, Springer (1982).

[8] STEIN (E.M) : Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory. Princeton University Press (1970).

[9] STROOCK (D.W) et VARADHAN (S.R.S) : Multidimensional diffusion processes. Springer (1979).