MARC YOR

Sur la représentation comme intégrales stochastiques des temps d'occupation du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 543-552

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__543_0>

Sur la représentation comme intégrales stochastiques des temps d'occupation du mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^d$.

Marc YOR

1. Introduction.

(1.1) Soit $(B_t\ ;\ t \geqslant 0)$ mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, issu de 0. L'objet de ce travail est de montrer :

(i) pour $d=1$, l'existence des temps locaux $(\ell_t^x\ ;\ x \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0)$ définis ici pour tout $t \geqslant 0$ donné comme densité par rapport à la mesure de Lebesgue de la mesure :

$$f \to \int_0^t ds\ f(B_s) \qquad\qquad (f \in C_c(\mathbb{R}))$$

(ii) pour $d=2$ ou 3, l'existence des temps locaux d'intersection $(\alpha(x;t)\ ;\ x \in R^d,\ t \geqslant 0)$ définis, pour tout $t \geqslant 0$, comme densité par rapport à la mesure de Lebesgue de la mesure :

$$f \to \int_0^t ds \int_s^t du\ f(B_u - B_s) \qquad\qquad (f \in C_c(\mathbb{R}^d))$$

en s'appuyant uniquement sur la représentation de $f(B_s)$, resp : $f(B_u-B_s)$, comme somme d'une constante et d'une intégrale stochastique.
Cette méthode est particulièrement simple et rapide, en comparaison des méthodes plus classiques que sont les approches par le calcul stochastique (Millar [6]; Meyer [5]) ou par la transformée de Fourier (Geman-Horowitz-Rosen [3], Rosen [7]). Elle peut s'étendre très aisément à de nombreux processus de Markov, sous des hypothèses adéquates portant sur leur semi-groupe ; on devrait pouvoir obtenir ainsi les résultats de Rosen [8] qui a étudié la question (ii) pour des diffusions générales.

Un autre intérêt de la méthode est qu'elle attire l'attention sur le soin qu'il faut apporter à l'interversion de l'ordre de certaines intégrations stochastiques et déterministes. A titre d'exemple, rappelons la formule de Tanaka-Rosen en dimension 2, qui figure en [9] sous la forme :

$$\int_0^t ds\{\log|B_t-B_s-y|-\log|y|\}=\int_0^t (dB_u;\int_0^u ds\ \frac{B_u-B_s-y}{|B_u-B_s-y|^2})+\pi\alpha(y;t) \qquad (y\neq 0)$$

et remarquons qu'elle peut être écrite sous la forme :

$$\int_0^t ds\int_s^t (dB_u;\ \frac{B_u-B_s-y}{|B_u-B_s-y|^2})-\int_0^t (dB_u;\int_0^u ds\ \frac{B_u-B_s-y}{|B_u-B_s-y|^2})=\pi\alpha(y;t) \qquad (y\neq 0)$$

Enfin, cette méthode de représentation au moyen des intégrales stochastiques permet d'obtenir très aisément le résultat de renormalisation de Varadhan en dimension 2 ; la même méthode nous permet d'obtenir un résultat de renormalisation pour certaines intégrales triples du mouvement brownien plan [11].

(1.2) La représentation des variables $f(B_s)$, pour $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, et $s > 0$, a déjà rendu de grands services pour la résolution de problèmes tout à fait différents de ceux considérés ici : Bass [1] donne une solution au problème de Skorokhod à l'aide de cette représentation, tandis que Kunita [4] utilise cette représentation pour remplacer l'équation du filtrage markovien non-linéaire obtenue par Fujisaki-Kallianpur-Kunita [2], et difficile à étudier directement, par une équation équivalente pour laquelle la méthode des approximations successives converge.

2. Temps locaux du mouvement Brownien réel.

(2.1) Préliminaires.

Soit $(B_t\ ;\ t \geq 0)$ mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, issu de 0. On note $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration naturelle, et (P_t) son semi-groupe. On a :

$$P_t(x,dy) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}\exp(-\frac{|x-y|^2}{2t})dy.$$

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, fonction continue, à support compact. On a, pour $u < s$, grâce à la propriété de Markov : $\quad E[f(B_s)|\mathcal{F}_u]=P_{s-u}f(B_u)$,

puis, grâce à la formule d'Itô :

$$\text{(2.a)}\qquad E[f(B_s)|\mathcal{F}_u]=E[f(B_s)]+\int_0^u (dB_v\ ;\ \nabla(P_{s-v}f)(B_v))$$

d'où la représentation explicite :

$$\text{(2.b)}\quad \begin{aligned}&E[f(B_s)\,|\,\mathcal{F}_u]\\ &=E[f(B_s)]-\int dy\, f(y)\,\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_0^u (dB_v\,;\,B_v-y)\,\frac{1}{(s-v)^{1+\frac{d}{2}}}\,\exp\Big(-\frac{|B_v-y|^2}{2(s-v)}\Big)\end{aligned}$$

Remarques : 1) L'échange de l'ordre de l'intégration en (dy) et de l'intégration stochastique ne pose ici aucun problème.

2) La formule (2.b) n'est autre que la version intégrée (en (dy)) du développement comme intégrales stochastiques des martingales fondamentales :

$$p_{s-u}(B_u;y)\equiv\frac{1}{(2\pi(s-u))^{d/2}}\exp-\frac{|B_u-y|^2}{2(s-u)}\qquad (u<s)$$

On a, en effet :

$$\text{(2.c)}\quad \frac{1}{(s-u)^{d/2}}\exp-\frac{|B_u-y|^2}{2(s-u)}=\frac{1}{s^{d/2}}\exp\Big(-\frac{|y|^2}{2s}\Big)-\int_0^u\Big(dB_v;\frac{B_v-y}{(s-v)^{1+\frac{d}{2}}}\Big)\exp\Big(-\frac{|B_v-y|^2}{2(s-v)}\Big)$$

3) Si l'on fait tendre u vers $s-$ dans la formule précédente, on obtient :

$$\text{(2.d)}\quad \frac{1}{s^{d/2}}\exp\Big(-\frac{|y|^2}{2s}\Big)=\int_0^s\Big(dB_v\,;\,\frac{B_v-y}{(s-v)^{1+\frac{d}{2}}}\Big)\exp-\frac{|B_v-y|^2}{2(s-v)}$$

Cette égalité entre constante et intégrale stochastique (pour s fixé) s'explique partiellement par le fait que l'intégrand n'est pas de carré intégrable par rapport à $dvdP$. Nous verrons, par la suite, d'autres exemples de telles égalités.

(2.2) Nous conservons les notations et hypothèses utilisées en *(2.1)*. On a, pour toute $f\in C_c(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned}\int_0^t ds\, f(B_s)&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^t ds\, E[f(B_s)\,|\,\mathcal{F}_{s-\varepsilon}] \qquad\qquad (P\ \text{p.s.})\\ &=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^t ds\Big\{E[f(B_s)]-\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_0^{s-\varepsilon}\frac{(dB_v;B_v-y)}{(s-v)^{1+\frac{d}{2}}}\exp\Big(-\frac{|B_v-y|^2}{2(s-v)}\Big)\end{aligned}$$

$$=\int_0^t ds\, E[f(B_s)]-\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\lim_{\varepsilon\to 0}\int dy\, f(y)\int_0^{t-\varepsilon}(dB_v;B_v-y)\int_{v+\varepsilon}^t ds\,\exp\Big(-\frac{|B_v-y|^2}{2(s-v)}\Big)\frac{1}{(s-v)^{1+\frac{d}{2}}}$$

Introduisons les notations suivantes :

$$\nu = \frac{d}{2} - 1 \quad \text{et} \quad \phi_\nu(x) = 2^{\nu+1}\int_x^\infty dv\, v^\nu \exp(-v) = 2^{\nu+1}(-1)^\nu x^{\nu+1} \frac{d^\nu}{dx^\nu}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right),$$

cette dernière formule étant valable au moins pour les valeurs entières de ν.

On a alors, de façon immédiate, la

Proposition 1 : Pour toute fonction $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, *et tout* $t > 0$:

$$\int_0^t ds\; f(B_s) - \int_0^t ds\; E[f(B_s)]$$

$$(2.e) \qquad = -\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int dy\; f(y) \int_0^{t-\varepsilon} \frac{(dB_v; B_v - y)}{|B_v - y|^d} \left\{\phi_\nu\left(\frac{|B_v-y|^2}{2(t-v)}\right) - \phi_\nu\left(\frac{|B_v-y|^2}{2\varepsilon}\right)\right\}$$

(2.3) Le cas de la dimension 1.

a) Il est naturel, à la suite de la formule (2.e), de chercher à intervertir $\lim_{\varepsilon\to 0}$ et intégrales. Une telle interversion peut être légitimée sous les hypothèses suivantes :

Lemme : Soit $\mu(dy)$ *mesure positive* σ*-finie sur* $\mathbb{R}^d$.

Soit, pour tout $\varepsilon > 0$, $h_\varepsilon : [0,1] \times (\mathbb{R}_+ \times \Omega) \to \mathbb{R}^d$ *processus mesurable par rapport à* $\mathcal{B}[0,1] \otimes \mathcal{P}$, *où* $\mathcal{P}$ *désigne la tribu prévisible associée à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$.

Supposons de plus qu'il existe une fonction $C : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$, *mesurable, telle que :*

pour tout $\varepsilon > 0$, $\qquad E\left[\int_0^1 du\, |h_\varepsilon(y;u,\omega)|^2\right]^{1/2} \leq C(y)$

et $\qquad \int \mu(dy) C(y) < \infty$,

et, d'autre part, que $\mu(dy)$ *p.s.* $h_\varepsilon(y;\cdot) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} h(y;\cdot)$ *dans* $L^2(\Omega \times [0,1], P(d\omega)du)$

Alors, $\qquad \int \mu(dy) \int_0^1 (dB_u; h_\varepsilon(y;u)) \xrightarrow{L^2} \int \mu(dy) \int_0^1 (dB_u; h(y;u))$

La démonstration du lemme est une application immédiate du théorème de convergence dominée.

b) Pour la dimension $d=1$, le lemme s'applique à la formule (2.e), et on a donc montré, à l'aide de cette formule, l'existence d'un processus $L_t(y)$ indexé par t et y, tel que, pour tout t :

pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, borélienne,

$$\int_0^t ds\ f(B_s) = \int dy\ f(y) L_t(y),$$

avec :

$$L_t(y) = \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{|y|^2}{2s}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t dB_v\ \mathrm{sgn}(B_v - y)\,\phi_{-1/2}\left(\frac{(B_v-y)^2}{2(t-v)}\right)$$

(2.4) Le cas des dimensions $d \geq 2$.

Si l'on retourne au début du paragraphe (2.2), on s'aperçoit que la méthode ci-dessus a consisté :

- d'une part, à écrire : $\displaystyle\int_0^t ds\ f(B_s) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int dy\ f(y)\,\ell_{(\varepsilon)}(y,t)$,

  où $\displaystyle\ell_{(\varepsilon)}(y;t) = \int_\varepsilon^t ds\ \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|B_s - y|^2}{2\varepsilon}\right)$

- d'autre part, à développer $\ell_{(\varepsilon)}(y;t)$ comme somme d'une constante et d'une intégrale stochastique. De façon explicite :

$$\ell_{(\varepsilon)}(y;t) = \int_\varepsilon^t \frac{ds}{(2\pi s)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|y|^2}{2s}\right) - \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_0^{t-\varepsilon} \frac{(dB_v; B_v - y)}{|B_v - y|^d} \left\{\phi_\nu\left(\frac{|B_v-y|^2}{2(t-v)}\right) - \phi_\nu\left(\frac{|B_v-y|^2}{2\varepsilon}\right)\right\}$$

Or, en dimension $d \geq 2$, tout point $y \neq 0$ est polaire, et on a, à l'aide de la première écriture de $\ell_{(\varepsilon)}(y;t)$: $\ell_{(\varepsilon)}(y,t) \xrightarrow[(\varepsilon \to 0)]{} 0$ P p.s.,

d'où l'on déduit, à l'aide de la seconde écriture de $\ell_{(\varepsilon)}$:

$$\text{(2.f)} \qquad \int_0^t \frac{ds}{s^{d/2}} \exp\left(-\frac{|y|^2}{2s}\right) = \int_0^t \frac{(dB_v; B_v - y)}{|B_v - y|^d}\ \phi_\nu\left(\frac{|B_v-y|^2}{2(t-v)}\right),$$

formule à rapprocher de (2.d).

3. Temps locaux d'intersection en dimensions 2 et 3.

(3.1) Préliminaires.

On reprend, cette fois pour l'étude des intégrales $\displaystyle\int_0^t ds \int_s^t du\ f(B_u - B_s)$ $(f \in C_c(\mathbb{R}^d))$ la méthode développée en (2.1) et (2.2). On a :

$$\int_0^t ds\int_s^t du\ f(B_u-B_s)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{t-\varepsilon} ds\int_\varepsilon^{t-s} du\ E[\ f(B_{u+s}-B_s)\,|\mathcal{F}_{u+s-\varepsilon}\ ]$$

$$=\int_0^t ds\int_s^t du\ E[\ f(B_s-B_u)\ ]$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\ \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int dy\ f(y)\int_0^{t-\varepsilon} ds\int_\varepsilon^{t-s} du\int_s^{u+s-\varepsilon}(dB_v;B_v-B_s-y)\exp\left(-\frac{|B_v-B_s-y|^2}{2(u+s-v)}\right)\frac{1}{(u+s-v)^{1+\frac{d}{2}}}$$

L'intégrale triple en ds du dB_v peut être réécrite sous la forme :

$$\int_0^{t-\varepsilon} ds\int_{s+\varepsilon}^t du\int_s^{u-\varepsilon}(dB_v;B_v-B_s-y)\exp\left(-\frac{|B_v-B_s-y|^2}{2(u-v)}\right)\frac{1}{(u-v)^{1+\frac{d}{2}}}$$

$$=\int_0^{t-\varepsilon}(dB_v;\int_0^v ds\int_{v+\varepsilon}^t du(B_v-B_s-y)\exp-\frac{|B_v-B_s-y|^2}{2(u-v)}\ \frac{1}{(u-v)^{1+\frac{d}{2}}})$$

$$=\int_0^{t-\varepsilon}(dB_v;\int_0^v ds\ \frac{B_v-B_s-y}{|B_v-B_s-y|^2}\ \{\phi_\nu\left(\frac{|B_v-B_s-y|^2}{2(t-v)}\right)-\phi_\nu\left(\frac{|B_v-B_s-y|^2}{2\varepsilon}\right)\})$$

où l'on note toujours $\qquad \phi_\nu(x)=2^{\nu+1}\int_x^\infty dv\ v^\nu\exp(-v)$

On a donc obtenu, pour toute dimension d, la

Proposition 2 : *Pour toute fonction $f\in C_c(\mathbb{R}^d)$, et tout $t>0$, on a :*

$$\int_0^t ds\int_s^t du\ f(B_u-B_s)\ -\int_0^t ds\int_s^t du\ E[\ f(B_u-B_s)\ ]$$

(3.a)

$$=-\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\lim_{\varepsilon\to 0}\int dy\ f(y)\int_0^{t-\varepsilon}(dB_v;\int_0^v ds\ \frac{B_v-B_s-y}{|B_v-B_s-y|^d}\ \{\phi_\nu\left(\frac{|B_v-B_s-y|^2}{2(t-v)}\right)-\phi_\nu\left(\frac{|B_v-B_s-y|^2}{2\varepsilon}\right)\})$$

(3.2) Le cas de la dimension 2.

a) Dans ce cas, on a : $\nu=0$ et $\phi_0(x)=2\exp(-x)$. L'intégrand qui figure dans l'intégrale stochastique de l'identité (3.a) est alors majoré, pour tout $v>0$ donné, par :

$$2\int_0^v\frac{ds}{|B_v-B_s-y|}\overset{(d)}{=}2\int_0^v\frac{ds}{|B_s-y|}$$

Or, on a, pour tout $y\in\mathbb{R}^2$, la décomposition suivante du processus radial $(|B_t-y|\ ;\ t\geq 0)$

$$|B_v-y|=|y|+\beta_v^{(y)}+\frac{1}{2}\int_0^v\frac{ds}{|B_s-y|},$$

où $(\beta_v^{(y)}, v\geqslant 0)$ désigne un mouvement brownien réel.

Ainsi, on a, pour tout $y\in\mathbb{R}^2$: $E[(\int_0^v \frac{ds}{|B_s-y|})^2] \leqslant C.v.$

pour une certaine constante C, indépendante de y.

On peut donc appliquer le lemme pour déduire de la formule (3.a) l'existence d'une densité $\alpha(y;t)$ telle que :

$$\int_0^t ds\int_s^t du\ f(B_u-B_s)=\int dy\ f(y)\alpha(y;t) \tag{3.b}$$

avec :

$$\alpha(y,t)=\int_0^t ds\int_s^t du\ \frac{1}{2\pi(u-s)}\exp-\frac{|y|^2}{2(u-s)}-\hat{\alpha}_t(y) \tag{3.c}$$

et :

$$\hat{\alpha}_t(y)=\frac{1}{\pi}\int_0^t (dB_v;\int_0^v ds\ \frac{B_v-B_s-y}{|B_v-B_s-y|^2}\exp(-\frac{|B_v-B_s-y|^2}{2(t-v)})) \tag{3.d}$$

b) Toujours dans le cas de la dimension 2, le résultat de renormalisation de Varadhan, à savoir :

$$n^2\int_0^t ds\int_s^t du\ f(n(B_u-B_s))-E[n^2\int_0^t ds\int_s^t du\ f(n(B_u-B_s))] \tag{3.e}$$

converge dans L^p, pour tout p, découle aisément des formules (3.b), (3.c) et (3.d).

En effet, l'expression (3.e) ci-dessus est égale, d'après (3.b) et (3.c), à :

$$-\int dy\ f(y)\hat{\alpha}_t(\frac{y}{n}),$$

cette expression converge, lorsque $n\to\infty$, vers :

$$(-\int dy\ f(y))\hat{\alpha}_t(0)$$

ce qui prouve à la fois le résultat de Varadhan, et donne une représentation de la limite comme intégrale stochastique, à savoir :

$$\hat{\alpha}_t(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^t (dB_v;\int_0^v ds\ \frac{B_v-B_s}{|B_v-B_s|^2}\quad \exp-\frac{|B_v-B_s|^2}{2(t-v)}$$

(3.3) Le cas de la dimension 3.

a) Dans ce cas, on a : $\nu=1/2$, et l'intégrand qui figure dans l'intégrale stochastique de l'identité (3.a) est majoré, pour tout $v > 0$ donné, par :

$$C\int_0^v \frac{ds}{|B_v-B_s-y|^2} \overset{(d)}{=} C\int_0^v \frac{ds}{|B_s-y|^2} \overset{(d)}{=} C\int_0^{v/|y|^2} \frac{ds}{|B_s-1|^2}.$$

Or, d'après [10] (lemme 2, p. 357), il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\text{pour tout } t > 0, \qquad E\left[\left(\int_0^t \frac{ds}{|B_s-1|^2}\right)^2\right] \leq c|\log t|^2.$$

En conséquence, on peut encore appliquer le lemme figurant en (2.3) ci-dessus pour déduire de la formule (3.a) l'existence d'une densité $\alpha(y;t)$ telle que la formule de densité d'occupation (3.b) soit encore satisfaite, avec :

$$\text{(3.f)} \qquad \alpha(y;t)=\int_0^t ds\int_s^t du \frac{1}{(2\pi(u-s))^{3/2}} \exp-\frac{|y|^2}{2(u-s)} -\hat{\alpha}_t(y),$$

et :

$$\text{(3.g)} \qquad \hat{\alpha}_t(y)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_0^t (dB_v;\int_0^v ds \frac{B_v-B_s-y}{|B_v-B_s-y|^3} \phi_{1/2}(\frac{|B_v-B_s-y|^2}{2(t-v)}))$$

b) Les formules (3.f) et (3.g) permettent, avec un peu de travail supplémentaire, de retrouver le résultat principal de [10], à savoir que, en dimension 3 :

$$\left(B_t;\frac{1}{\sqrt{\log\frac{1}{|y|}}}\left\{2\pi\alpha(y;t)-\frac{t}{|y|}\right\};\ t \geq 0\right) \xrightarrow{(d)} (B_t;2\beta_t;\ t \geq 0)$$

où $(\beta_t,\ t \geq 0)$ désigne un mouvement Brownien réel issu de 0, indépendant de B, et (d) indique la convergence en loi associée à la topologie de la convergence compacte sur l'espace canonique $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^4)$.

(3.4) Le cas des dimensions $d \geq 4$.

De même qu'en (2.4), on montre en retournant au début du paragraphe (3.1), et en utilisant le fait que pour ces dimensions l'ensemble $\{(s,t):B_s-B_t=y\}$ est p.s. vide, pour tout $y\neq 0$, que notre méthode fournit l'analogue suivant de la formule (2.f):

(3.h) $$\int_0^t ds \int_s^t du \frac{1}{(u-s)^{d/2}} \exp - \frac{|y|^2}{2(u-s)} = \int_0^t (dB_v ; \int_0^v ds \frac{B_v - B_s - y}{|B_v - B_s - y|^d} \phi_v (\frac{|B_v - B_s - y|^2}{2(t-v)}))$$

REFERENCES :

[1] R.F. BASS : Skorokhod embedding via stochastic integrals. Sém. Probas. XVII. Lect. Notes in Maths 986. Springer (1983).

[2] M. FUJISAKI, G. KALLIANPUR, H. KUNITA : Stochastic differential equations for the non-linear filtering problem. Osaka J. Math. 9, 19-40, 1972.

[3] D. GEMAN, J. HOROWITZ, J. ROSEN : A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. Annals of Proba., 12, 86-107, 1984.

[4] H. KUNITA : Asymptotic behavior of the non-linear filtering errors of Markov processes.
J. of Multivariate Analysis, 1, 365-393, 1971.

[5] P.A. MEYER : Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém. Probas X, Lect. Notes in Maths 511. Springer (1976).

[6] P.W. MILLAR : Stochastic integrals and processes with stationary independent increments. Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. 3, 307-332, 1972.

[7] J. ROSEN : A local time approach to the self intersections of Brownian paths in space.
Comm. Maths. Phys. 88, 327-338 (1983).

[8] J. ROSEN : Joint continuity of the intersection local times of Markov processes, Preprint (1985).

[9] M. YOR : Compléments aux formules de Tanaka-Rosen. Sém. Probas. XIX. Lect. Notes in Maths 1123. Springer (1985).

[10] M. YOR : Renormalisation et convergence en loi pour les temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$. Sém. Probas. XIX. Lect. Notes in Maths 1123. Springer (1985).

[11] M. YOR : A renormalisation result for some triple integrals of two-dimensional Brownian motion. To appear

---

Je remercie J.Y. Calais qui m'a permis de corriger une mauvaise formulation du lemme qui figure en (2.3).