CHENG-DE LIN

Quand l'inégalité de Kunita-Watanabe est-elle une égalité ?

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 40-47
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__40_0>

QUAND L'INEGALITE DE KUNITA-WATANABE EST-ELLE UNE EGALITE ?

par LIN Cheng de

Etant donné un espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ muni d'une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0}$ vérifiant les conditions habituelles, soient X et Y deux $\underline{\underline{F}}_t$-semimartingales, H et K deux processus $\underline{\underline{F}}_t$-prévisibles ; on a alors l'inégalité de Kunita-Watanabé :

$$\{\int_0^\infty |H_sK_s|\,|d[X,Y]_s|\}^2 \leqq \int_0^\infty H_s^2\,d[X]_s \int_0^\infty K_s^2\,d[Y]_s$$

où $[X]$ est une abréviation de $[X,X]$ (et de même $\langle X\rangle$ pour $\langle X,X\rangle$) ; si $\langle X\rangle$ et $\langle Y\rangle$ existent, on a aussi l'inégalité pour le crochet oblique. On se pose le problème suivant : quand est-ce que ces inégalités deviennent des égalités ? Dans ce travail, on étudie le cas essentiel : quand a-t-on

$$[X,Y]^2 = [X][Y] \quad \text{et} \quad \langle X,Y\rangle^2 = \langle X\rangle\langle Y\rangle$$

La première partie de ce travail traite le cas du crochet droit. Pour le cas où X et Y sont deux martingales locales, on trouve une condition nécessaire et suffisante sur les trajectoires de X et Y analogue à celle pour l'inégalité de Schwarz, i.e. il existe une relation linéaire entre les trajectoires de X et Y. Mais la dépendance linéaire s'écrit à l'aide d'une v.a. douée d'une certaine mesurabilité. Cette condition nécessaire et suffisante peut être étendue au cas où X et Y sont deux semimartingales chacune étant définie à un processus continu à variation finie près.

La deuxième partie de ce travail traite le cas du crochet oblique. On suppose que X et Y sont deux martingales telles que $\langle X\rangle$ et $\langle Y\rangle$ existent, autrement dit que X et Y sont deux martingales de carré localement intégrale. Dans ce cas on trouve seulement une condition nécessaire et une condition suffisante sur le comportement des trajectoires de X et Y. Des contre-exemples (pour des filtrations qui ne sont pas quasi-continues à gauche) montrent qu'aucune de ces deux concitions ne peut être à la fois nécessaire et suffisante. Pour des semimartingales dont les crochets obliques existent, ces deux résultats restent vrais à un processus continu à variation finie près.

PARTIE I : Crochet droit

A. Cas où $X,Y\in\underline{\underline{M}}_{loc}$

Rappel 1 : Soient $X\in\underline{\underline{M}}_{loc}$, T un t.d'a. et γ une v.a. $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable. Posons $N=\gamma(X-X^T)$; alors on a $N\in\underline{\underline{M}}_{loc}$ et $[N,L]=\gamma([X,L]-[X,L]^T)$ pour toute martingale locale L.

<u>Lemme</u> 1 : Soient X et Y deux martingales locales telles que l'on ait $[X,Y]^2 = [X][Y]$. Posons $S = \inf\{s : [X]_s > 0\}$. Il existe alors une v.a. $\gamma \in \underline{\underline{F}}_S$ telle que $1_{\{S<\infty\}}[X,Y] = \gamma[X]$ et $1_{\{S<\infty\}}[Y] = \gamma^2[X]$

<u>Démonstration</u> : Supposons d'abord $S = 0$, et rappelons le résultat déterministe suivant. Soient $a(t)$, $b(t)$ deux fonctions positives croissantes et $c(t)$ une fonction à variation dinie telles qu'on ait pour tout s,t

$$|c(t)-c(s)|^2 = |a(t)-a(s)||b(t)-b(s)|.$$

Si, de plus, on a $c^2(t) = a(t)b(t)$ pour tout t, alors on a pour tout t

$$a(t) = k^2 b(t)$$

où k est une constante non nulle. On déduit de cela (et du lemme 1) qu'il existe une v.a. k , jamais nulle, telle que $[X,Y]^2 = [X][Y] = k^2[X]$, et donc un processus mesurable ε à valeurs dans $\{-1,+1\}$, càdlàg, tel que $[X,Y]_t = \varepsilon_t k[X]_t$ pour tout t. Montrons par l'absurde que les trajectoires de ε sont constantes. Supposons qu'il existe un couple (s,t), $0<s<t$, tel que $\varepsilon_s = -\varepsilon_t$ sur une partie A non vide de Ω. Comme

$$[X,Y]_s^t = [X,Y]_t - [X,Y]_s = \varepsilon_t k([X]_t + [X]_s) \text{ sur } A$$

on a

$$[X]_t[Y]_t \geqq [X]_s^t[Y]_s^t \geqq ([X,Y]_s^t)^2 = k^2([X]_t + [X_s])^2 \text{ sur } A$$

Mais, par hypothèse, on a $X_s > 0$, d'où $[X]_t[Y]_t > k^2[X_t]^2$ sur A et finalement $[Y_t] > k^2[X]_t$ sur A, ce qui est absurde. Il ne nous reste plus alors qu'à poser $\gamma = \varepsilon_t k$ pour obtenir une v.a. γ telle que, pour tout t,

$$[X,Y]_t = \gamma[X]_t \quad \text{et} \quad [Y]_t = \gamma^2[X]_t .$$

Enfin, pour le cas général, il suffit de poser $\underline{\underline{G}}_t = \underline{\underline{F}}_{S+t}$, $\underline{X}_t = X_{S+t}1_{\{S<\infty\}}$ et $\underline{Y}_t = Y_{S+t}1_{\{S<\infty\}}$. En utilisant le résultat ci-dessus, on a les deux égalités désirées, et comme γ est égal, pour tout $t>0$, au quotient de $1_{S<\infty\}}[X,Y]_{S+t}$ par $[X]_{S+t}$, il est clair que γ est $\underline{\underline{F}}_S$-mesurable.

<u>Lemme</u> 2 : Posons $S = \inf\{t : [X]_t > 0>$ et $R = \inf\{t : [Y]_t > 0\}$. Si on a $[X,Y]^2 = [X,][Y]$, alors on a

$$\Omega = \{\omega : S(\omega) \vee R(\omega) = \infty\} \cup \{\omega : S(\omega) = R(\omega) < \infty\} \text{ p.s.}$$

Autrement dit, si les deux processus [X] et [Y] sont non constants sur une trajectoire, ils démarrent en même temps. La démonstration est triviale. Nous omettrons désormais les "p.s." quand il n'y aura pas risque de confusion, et, dans toute cette partie I, nous conserverons les notations S et R pour les deux t.d'a. définis ci-dessus.

<u>Theoreme</u> 1 : Soient X et Y deux martingales locales. Pour que l'on ait $[X,Y]^2 = [X][Y]$, il faut et il suffit qu'il existe une v.a. $\gamma \in \underline{\underline{F}}_S$ (resp $\gamma \in \underline{\underline{F}}_R$) telle que $\{\gamma \neq 0\} = \{S \vee R < \infty\} = \{S = R < \infty\}$ et que $\gamma X - Y = 0$ (resp $X - \gamma Y = 0$) sur $\{S \vee R < \infty\}$.

<u>Démonstration</u> : D'abord la suffisance. Pas de problèmes sur $\{S \vee R = \infty\}$. L'ensemble $F = \{S \vee R < \infty\}$ est égal par hypothèse à $\{S = R < \infty\}$ et appartient

donc à $\underline{\underline{F}}_S \cap \underline{\underline{F}}_R$. Posons $M = \gamma(X-X^S)$, $N = 1_F(Y-Y^R)$; on a $M,N \in \underline{\underline{M}}_{o,loc}$ et $M-N = 0$ d'où $1_F\{\gamma^2[X]-2\gamma[X,Y]+[Y]\} = 1_F\{\gamma^2([X]-X_S^2 1_{[\![S,\infty[\![})-2\gamma([X,Y]-X_SY_S1_{[\![S,\infty[\![})$
$$+([Y]-Y_S^2 1_{[\![S,\infty[\![})\} = [M-N] = 0,$$
et finalement $[X,Y]^2 = [X][Y]$ sur $\{S \vee R < \infty\}$. Passons à la nécessité. D'après les lemmes 1 et 2 on a $\{\gamma \neq 0\} = \{S \vee R < \infty\} = \{S=R<\infty\} \in \underline{\underline{F}}_S \cap \underline{\underline{F}}_R$. Avec les mêmes notations F,M,N que précédemment, on a
$$[M-N] = \gamma^2([X]-[X]^S)-2\gamma([X,Y]-[X,Y]^S)+1_F([Y]-[Y]^S) = 0$$
d'où $M-N = \gamma(X-X^S)-1_F(Y-Y^R) = 0$. D'autre part, sur $\{S<\infty\}$, on a
$$\gamma X_S^2 = \gamma[X]_S = [X,Y]_S = X_SY_S \quad , \quad \gamma^2X_S^2 = \gamma^2[X]_S = [Y]_S = Y_S^2$$
d'après le lemme 1, d'où $Y_S = \gamma X_S$. Ainsi, on a $\gamma X-Y = 0$ sur $\{S \vee R < \infty\}$.

B. Cas où $X,Y \in \underline{\underline{S}}$

Soit $X = M+A = M+A^d+A^c$ une décomposition de la semimartingale X, où M appartient à $\underline{\underline{M}}_{loc}$, A est à variation finie et A^d, A^c sont les parties discontinue, continue de A. Comme A^c ne joue pas de rôle dans le calcul du crochet droit, il nous suffit de considérer le problème quand
$$X = M+A^d = M+\sum_n \Delta A_{S_n} 1_{[\![S_n,\infty[\![} \quad \text{et} \quad Y = N+B^d = N+\sum_n \Delta B_{T_n} 1_{[\![T_n,\infty[\![}$$
où (S_n) et (T_n) sont deux suites de t.d'a. telles que, pour tout $i \neq j$, on ait $[\![S_i]\!] \cap [\![S_j]\!] = \emptyset$ et $[\![T_i]\!] \cap [\![T_j]\!] = \emptyset$.

<u>Théorème</u> 2 : Soient X et Y deux semimartingales, et $X = M+A^c+A^d$ et $Y = N+B^c+B^d$ des décompositions de celles-ci. Pour que $[X,Y]^2 = [X][Y]$, il faut et il suffit qu'il existe une v.a. $\gamma \in \underline{\underline{F}}_S$ (resp $\gamma \in \underline{\underline{F}}_R$) telle que $\{\gamma \neq 0\} = \{S \vee R < \infty\} = \{S=R<\infty\}$ et que $\gamma(X-A^c)-(Y-B^c) = 0$ sur $\{S \vee R < \infty\}$ (resp $(X-A^c)-\gamma(Y-B^c) = 0$ sur $\{S \vee R < \infty\}$).

La démonstration est analogue à celle du théorème 1 ; nous la laissons au lecteur.

PARTIE II : <u>Crochet oblique</u>

A. <u>Cas où</u> $X,Y \in \underline{\underline{M}}^2_{loc}$

On va donner quelques résultats concernant les martingales locales. Pour toute martingale locale X, le fait que son crochet oblique $\langle X\rangle$ existe est équivalent à dire que X est une martingale de carré localement intégrable. Donc, pour toute la suite, on prend $X,Y \in \underline{\underline{M}}^2_{loc}$ et on pose
$$S = \inf\{s : \langle X\rangle_s > 0\} \quad , \quad R = \inf\{s : \langle Y\rangle_s > 0\}.$$
On a le résultat suivant, analogue à celui pour le crochet droit :

<u>Théorème</u> 3 : Si $\langle X,Y\rangle^2 = \langle X\rangle\langle Y\rangle$, alors il existe une v.a. $\gamma \in \underline{\underline{F}}_S$ (resp $\gamma \in \underline{\underline{F}}_R$) telle que $\{\gamma \neq 0\} = \{S \vee R < \infty\} = \{S=R<\infty\}$ et que $\gamma X-Y = 0$ (resp $X-\gamma Y = 0$) sur $\{S \vee R < \infty\}$.

<u>Démonstration</u> : La preuve se décompose en deux parties :

(i) il existe une v.a. $\gamma \in \underline{\underline{F}}_S$ telle que $\{\gamma \neq 0\} = \{S \vee R < \infty\} = \{S=R<\infty\}$ et que $\gamma(X-X^S)-(Y-Y^S) = 0$ sur $\{S \vee R < \infty\}$

(ii) on a $\gamma X^S - Y^S = 0$ sur $\{S \vee R < \infty\}$.

Voyons (i). Il est bien connu que, pour tout $X, Y \in \underline{\underline{M}}^2_{loc}$, il existe une unique décomposition de Y par rapport à X de la forme

$$Y_t = \int_0^t H_s \, dX_s + L_t$$

où (H_s) est un processus prévisible tel que $\int_0^{\cdot} H_s^2 \, d[X]_s$ soit localement intégrable et où (L_s) est une martingale de carré localement intégrable orthogonale à X (cf [4],[5]). . Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, quitte à arrêter X,Y à un t.d'a. convenable, on a

$$<X,Y>_t^2 = \{\int_0^t H_s \, d<X>_s\}^2 \leqq <X>_t \int_0^t H_s^2 \, d<X>_s \leqq$$

$$\leqq <X>_t\{\int_0^t H_s^2 \, d<X>_s + <L_t>\} = <X>_t <Y>_t$$

Donc, d'après l'hypothèse, on a pour presque toute trajectoire

(1) $\quad <X>_t <L>_t = 0$ pour tout $t > 0$

(2) $\quad <X>_t \int_0^t H_s^2 \, d<X>_s = \{\int_0^t H_s^2 \, d<X>_s\}^2$ pour tout $t > 0$

D'après (2), il existe, pour presque tout ω, une constante $k(\omega)$ telle que

$$H_s(\omega) = k(\omega) \quad d<X>_s(\omega)\text{-p.p.}$$

et donc, pour tout $t \geqq 0$, on a sur $\{S < \infty\}$

$$<X,Y>_{S+t}/<X>_{S+t} = <X>^{-1}_{S+t} \int_0^{S+t} H_s \, d<X>_s = k \; .$$

Posons $\gamma = k 1_{\{S<\infty\}}$; on a alors $\gamma \in \underline{\underline{F}}_S$, γ nulle hors de $\{S<\infty\}$ et aussi $1_{\{S<\infty\}} <Y>_{S+t}/<X>_{S+t} = \gamma^2$. Par conséquent on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

(3) $\quad 1_{\{S<\infty\}} <X,Y>_t = \gamma <X>_t \quad$ et $\quad 1_{\{S<\infty\}} <Y>_t = \gamma^2 <X>_t$.

Considérons maintenant la martingale locale suivante

$$M_t = 1_{\{\gamma \neq 0\}}(Y - Y^S) - \gamma(X - X^S)$$

Comme on a

$$<M>_t = 1_{\{\gamma\neq 0\}}\{(<Y>_t + \gamma^2 <X>_t - 2\gamma<X,Y>_t) - (<Y^S>_t + \gamma^2 <X^S>_t - 2\gamma <X^S, Y^S>_t)\} = 0,$$

on a $\gamma(X - X^S) - (Y - Y^S) = M = 0$ sur $\{\gamma \neq 0\}$. Et il résulte de (3) qu'on a $\{\gamma \neq 0\} = \{S \vee R < \infty\} = \{S = R < \infty\}$, d'où la conclusion désirée. Passons à (ii). On va d'abord montrer le fait suivant : pour $X \in \underline{\underline{M}}^2_{loc}(P)$ et $F \in \underline{\underline{F}}$, si on a $1_F <X>_\infty = 0$, alors on a $1_F X = 0$. En effet, posons $B = \{(t,\omega) : <X>_t(\omega) = 0\}$: B est un ensemble prévisible et donc

$$Y_t(\omega) = \int_0^t 1_B(s,\omega) \, dX_s(\omega) = 0$$

car Y est une P-martingale et $<Y>_\infty = 0$. Mais, pour la loi $Q = 1_F P/P(F)$, X est encore une semimartingale et $\mathbb{R}_+ \times F$ est prévisible, d'où

$$1_{F(\omega)} X_t(\omega) = Q\text{-}\int_0^t 1_{\mathbb{R}_+\times F}(s,\omega) \, dX_s(\omega) = Q\text{-}\int_0^t 1_{\mathbb{R}_+\times F}(s,\omega) 1_B(s,\omega) \, dX_s(\omega)$$

$$= Q\text{-}\int_0^t 1_{\mathbb{R}_+\times F}(s,\omega) \, dY_s(\omega) = 0$$

Ceci fait, posons $F_1 = \{S<\infty, <X>_S = 0\}$ et $F_2 = \{<X>_S < 0\}$ si bien qu'on a $\{S < \infty\} = F_1 \cup F_2$. Comme $1_{F_1} <X^S>_\infty = 1_{F_1} <X>_S = 0$, on a $1_{F_1} X^S = 0$. Par ailleurs, d'après (1) de (i), on a $1_{F_1} <L>_\infty = 0$ d'où $1_{F_1} <Y>_S = \int_0^S H_s^2 \, d<X>_s = 0$ et donc $1_{F_1} Y^S = 0$. Par conséquent, on a $1_{F_1}(\gamma X^S - Y^S) = 0$. Ensuite on regarde la restriction S' du t.d'a. S à F_2 : il est le début du fermé prévisible $\{(s,\omega) : <X>_s(\omega) > 0 \text{ et } <X>_{s-}(\omega) = 0\}$ et est donc prévisible. Soit alors (S_n) une suite de t.d'a. annonçant le t.d'a. S'. Pour chaque n on a $1_{F_2}X^{S_n} = 0$, d'où $1_{F_2}X^{S-} = 0$. Par conséquent, on a

$$1_{F_2}X^S = X_S 1_{[\![S',\infty[\![}$$
$$1_{F_2}Y^S = H^S X^S 1_{[\![S',\infty[\![} = kX_S 1_{[\![S',\infty[\![} = \gamma X_S 1_{[\![S',\infty[\![}$$

(voir la démonstration de (i) où $H_s(\omega) = k(\omega)$ $d\langle X\rangle_s$-p.p. ; ici on a $\Delta\langle X\rangle_S(\omega) > 0$), d'où $1_{F_2}(\gamma X^S - Y^S) = 0$.

Dans le sens inverse de celui du théorème 3 , on a le résultat suivant, qui est moins fort que l'analogue pour le crochet droit.

<u>Théorème</u> 4 : Soit γ une v.a. $\underline{\underline{F}}_{S-}$-mesurable (resp $\underline{\underline{F}}_{R-}$-mesurable) telle que $\{\gamma \neq 0\} = \{S \vee R < \infty\} = \{S = R < \infty\}$, et posons $F = \{S \vee R < \infty\}$. Si $1_F(\gamma X - Y) = 0$ (resp $1_F(X - \gamma Y) = 0$), alors $\langle X,Y\rangle^2 = \langle X\rangle\langle Y\rangle$.

<u>Démonstration</u> : Par hypothèse, il existe un processus Z tel qu'on ait $Y = \gamma X + 1_{F^c}Z$; on pose $L = 1_{F^c}Z$. Soit $G = \{\omega : \langle X\rangle_S = 0\}$: comme G appartient à $\underline{\underline{F}}_S$, la restriction S_G de S à G est un t.d'a. et ${}^1H = \gamma 1_{]\!]S_G,\infty[\![}$ est un processus prévisible. De même soit $K = \{\omega : \langle X\rangle_S > 0\}$: S_K est le début du fermé prévisible $\{\langle X\rangle_s > 0, \langle X\rangle_{s-} = 0\}$ et est donc un t.d'a. prévisible, et ${}^2H = \gamma 1_{[\![S_K,\infty\}}$ est un processus prévisible, $S_K \geq S$ impliquant $\gamma \in \underline{\underline{F}}_{S_K-}$. Maintenant, si on pose $H = {}^1H + {}^2H$, on a $Y = \int H\,dX + L$. Il est évident que L appartient à $\underline{\underline{M}}^2_{loc}$. Comme on sait que $1_F\langle X\rangle = 0$ implique $1_F X = 0$, on est assuré que $X1_{\{S=\infty\}} = 0$. De même $Y1_{\{R=\infty\}} = 0$, et par conséquent $Z1_{\{R=\infty\}} = 0$. Donc on a $XL = 1_{F^c}XZ = 1_{\{S=\infty\}\cup\{R=\infty\}}XZ = 0$, d'où L est orthogonale à X. Ainsi

$$\langle Y\rangle = \int H^2\,d\langle X\rangle + \langle L\rangle = \gamma^2\langle X\rangle + \langle L\rangle .$$

Il est évident que $1_{\{R=\infty\}}\langle L\rangle = 0$, d'où $1_{\{R=\infty\}}L = 0$ et donc $1_{\{S<\infty\}}L = 0$. D'autre part si on pose

$$\underline{G} = \{\langle L\rangle_S = 0\} \quad , \quad \underline{K} = \{\langle L\rangle_S > 0\} \quad , \quad {}^1\underline{H} = 1_{]\!]S_{\underline{G}},\infty[\![}$$
$${}^2\underline{H} = 1_{[\![S_{\underline{K}},\infty[\![} \quad , \quad \underline{H} = {}^1\underline{H} + {}^2\underline{H}$$

avec le même raisonnement que ci-dessus on a $1_{\{S<\infty\}}L = \int \underline{H}\,dL \in \underline{\underline{M}}^2_{loc}$. Comme $1_{\{S<\infty\}}L = 0$, on a $1_{\{S<\infty\}}\langle L\rangle = \int \underline{H}^2\,d\langle L\rangle = 0$, d'où $1_F\langle L\rangle = 0$. Finalement sur F on a $\langle X,Y\rangle = \int H\,d\langle X\rangle = \gamma\langle X\rangle$, $\langle Y\rangle = \gamma^2\langle X\rangle$ d'où $\langle X,Y\rangle^2 = \langle X\rangle\langle Y\rangle$, et, sur F^c, le résultat est trivial.

Maintenant, en conséquence des théorèmes 4 et 5, on sait tout de suite que, pour toutes les filtrations $(\underline{\underline{F}}_t)$ totalement continues (i.e. on a $\underline{\underline{F}}_T = \underline{\underline{F}}_{T-}$ pour tout t.d'a. T), il existe une condition nécessaire et suffisante, analogue à celle pour le crochet droit, pour que $\langle X,Y\rangle^2 = \langle X\rangle\langle Y\rangle$. Mais en réalité on peut établir mieux :

<u>Corollaire</u> 1 : Supposons $(\underline{\underline{F}}_t)$ quasi-continue à gauche (i.e. on a $\underline{\underline{F}}_T = F_{T-}$ pour tout t.d'a. prévisible T). Pour que $\langle X,Y\rangle^2 = \langle X\rangle\langle Y\rangle$, il faut et il suffit qu'il existe une v.a. $\gamma \in \underline{\underline{F}}_S$ (resp $\gamma \in \underline{\underline{F}}_R$) telle que $\{\gamma \neq 0\} = \{S \vee R < \infty\} = \{S = R < \infty\}$ et que $\gamma X - Y = 0$ (resp $X - \gamma Y = 0$) sur $\{S \vee R < \infty\}$.

Démonstration : Il suffit de remarquer que, dans la démonstration du théorème 4, S_K est un t.d'a. prévisible majorant S si bien que γ est $\underline{\underline{F}}_{S_K}$-mesurable et donc $\underline{\underline{F}}_{S_{K}-}$-mesurable si $(\underline{\underline{F}}_t)$ est quasi-continue à gauche. Le reste de la démonstration est alors inchangé, ${}^2H$ étant prévisible.

Dans le cas général, comme le montrent les contre-exemples suivants, nous n'avons pas de condition nécessaire et suffisante analogue à celle du crochet droit pour que $<X,Y>^2 = <X><Y>$. En effet, c'est la mesurabilité de γ, la v.a. citée dans les théorèmes 3 et 4, qui fait problème. Le contre-exemple 1 nous montre que "γ est $\underline{\underline{F}}_{S-}$-mesurable " n'est pas une condition nécessaire pour avoir $<X,Y>^2 = <X><Y>$ tandis que le contre-exemple 2 nous montre que, dans l'énoncé du théorème 4, on ne peut pas remplacer la $\underline{\underline{F}}_{S-}$-mesurabilité de γ par la $\underline{\underline{F}}_S$-mesurabilité de γ pour avoir l'égalité désirée.

Contre-exemple 1 : Soient $(\Omega',\underline{\underline{F}}',P')$ et $(\Omega'',\underline{\underline{F}}'',P'')$ deux espaces probabilisés complets suffisamment riches, Ω' et Ω'' étant disjoints. Soient Z' et Z'' deux processus de Poisson sur Ω' et Ω'' respectivement, $(\underline{\underline{G}}_t)$ et $(\underline{\underline{H}})_t$ leurs filtrations naturelles complétées, M et N les martingales locales compensées de Z' et Z''. Posons $\Omega = \Omega' \cup \Omega''$, $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}' \; \underline{\underline{F}}''$, $P = \frac{1}{2}(P'+P'')$ et soit $(\underline{\underline{F}}_t)$ la filtration telle que $\underline{\underline{F}}_t$ soit la tribu engendrée par les ensembles P-négligeables pour $t<1$ et soit égale à $\underline{\underline{G}}_{t-1} \; \underline{\underline{H}}_{t-1}$ pour $t \geq 1$. Il est évident que $(\underline{\underline{F}}_t)$ vérifie les conditions habituelles. Définissons deux processus X et Y par

$$X_t = 0 \quad \text{pour } t<1 \quad , \quad X_t = M_{t-1}1_{\Omega'} + N_{t-1}1_{\Omega''} \quad \text{pour } t \geq 1$$
$$Y_t = 0 \quad \text{pour } t<1 \quad , \quad Y_t = M_{t-1}1_{\Omega'} - N_{t-1}1_{\Omega''} \quad \text{pour } t \geq 1$$

Il est facile de voir que X et Y sont deux martingales de carré localement intégrable et qu'on a $Y = \gamma X$ p.s. où γ est une v.a. $\underline{\underline{F}}_1$-mesurable ($\gamma = 1$ sur Ω' et $\gamma = -1$ sur Ω'') qui n'est pas $\underline{\underline{F}}_{1-}$-mesurable. Il est évident que $S = R = 1$ et que $<X>_1 = <Y>_1 = 0$, d'où $X^S = Y^S = 0$. On a donc

$$<Y> = <Y-Y^S> = <\gamma(X-X^S)> = \gamma^2 <X> \quad , \quad <X,Y> = <X,\gamma(X-X^S)> = \gamma <X> ,$$

d'où $<X,Y>^2 = <X><Y>$.

Contre-exemple 2 : Soient Ω l'intervalle $[0,1]$, P la mesure de Lebesque sur $[0,1]$ et $\underline{\underline{F}}$ la tribu borélienne de $[0,1]$ complétée. Prenons pour $(\underline{\underline{F}}_t)$ la filtration telle que $\underline{\underline{F}}_t$ soit la tribu engendrée par les ensembles négligeables pour $t<1$ et soit égale à $\underline{\underline{F}}$ pour $t \geq 1$. Il est évident que $(\underline{\underline{F}}_t)$ vérifieles conditions habituelles mais qu'elle n'est pas quasi-continue à gauche. Prenons deux v.a. $\underline{\underline{F}}$-mesurable α et β, diffuses, de carré intégrable, indépendantes. Posons

$$X_t = 0 \quad \text{pour } t<1 \quad , \quad X_t = \alpha - E\alpha \quad \text{pour } t \geq 1$$
$$L_t = (\beta - E\beta) X_t$$

Alors X et L sont deux martingales de carré intégrable. Il est évident que tout t.d'a. non constant est $\geqq 1$; donc, pour tout t.d'a. T, on a, grâce à l'indépendance de α et β,

$$E[X_T L_T] = E[X_T^2(\beta - E\beta)] = 0$$

d'où X et L sont orthogonales. Posons maintenant

$$Y = (E\beta)X + L$$

Y est une martingale de carré intégrable, et il est clair que $Y = \beta X$ et que $\{S \vee R < \infty\} = \{S=1\} = \{R=1\} = \Omega$. Comme α et β sont diffuses, L et $<L>$ ne peuvent s'annuler p.p.. Donc, sur $\{<L>_\infty > 0\}$, on a

$$\begin{aligned}<X,Y>_\infty^2 &= (<X,(E\beta)X + L>_\infty)^2 = (E\beta)^2 <X>_\infty^2 < (E\beta)^2 <X>_\infty^2 + <X>_\infty <L>_\infty \\ &= <X>_\infty <L>_\infty\end{aligned}$$

B. Cas où $X, Y \in \underline{\underline{S}}$

Comme dans le cas du crochet droit, les théorèmes 3 et 4 s'étendent aussi au cas où X et Y sont deux semimartingales dont les crochets obliques existent. L'existence du crohet oblique d'une semimartingale X équivaut à dire que X est une semimartingale spéciale, de décomposition canonique $X = M + A$, où M est une martingale de carré localement intégrable et où A est un processus prévisible à variation finie. En effet, si $<X>$ existe, alors $[X]$ est localement intégrable, donc aussi $[X]^{1/2}$, d'où X est une semimartingale spéciale. Soit $X = M + A$ sa décomposition canonique (M est une martingale locale et A un processus prévisible à variation finie) ; d'après le lemme de Yoeurp, $[M,A]$ est une martingale locale, donc $<M,A>$ est nul, d'où $<X> = <M> + <A>$, et le fait que $<M>$ existe montre que M est une martingale de carré localement intégrable. La réciproque est triviale. Par conséquent on peut supposer que

$$X = M + A^d + A^c \quad \text{et} \quad Y = N + B^d + B^c$$

avec $M, N \in \underline{\underline{M}}^2_{loc}$, A^c et B^c (resp A^d et B^d) étant des processus prévisibles à variation finie continus (resp purement discontinus). On a alors les deux théorèmes suivants :

<u>Théorème</u> 5 : Soient X et Y deux semimartingales dont les crochets obliques existent. Supposons qu'on ait $<X,Y>^2 = <X><Y>$. Alors il existe une v.a. $\gamma \in \underline{\underline{F}}_S$ (resp $\gamma \in \underline{\underline{F}}_R$) telle que $\{\gamma \neq 0\} = \{S \vee R < \infty\} = \{S = R < \infty\}$ et $\gamma(X - A^c) - (Y - B^c) = 0$ (resp $(X - A^c) - \gamma(Y - B^c) = 0$) sur $\{S \vee R < \infty\}$.

N.B. : Ainsi, la différence entre γX et Y (resp X et γY) est un processus dont les trajectoires sont à variation finie p.s. ; mais ce processus n'est pas forcément adapté.

<u>Théorème</u> 6 : Soit γ une v.a. $\underline{\underline{F}}_{S-}$-mesurable (resp $\underline{\underline{F}}_{R-}$-mesurable) telle que $\{\gamma \neq 0\} = \{S \vee R < \infty\} = \{S = R < \infty\}$. Si on a $\gamma(X - A^c) - (Y - B^c) = 0$ (resp $(X - A^c) - \gamma(Y - B^c) = 0$) sur $\{S \vee R < \infty\}$, alors on a $<X,Y>^2 = <X><Y>$.

La démonstration du théorème 5 est très proche de celle du théorème 3 et celle du théorème 6 de celle du théorème 4. Donc nous ne détaillerons pas les démonstrations, nous contentant de remarquer deux faits : premièrement, pour toute semimartingale spéciale X dont la décomposition continue de comporte pas de partie continue à variation finie, on a

$$\forall F \in \underline{\underline{F}} \quad [(1_F \langle X\rangle = 0) \Rightarrow (1_F X = 0)] ;$$

deuxièmement, il existe une sorte de décomposition entre nos deux semimartingales X et Y, analogue à la décomposition orthogonale entre deux martingales de carré localement intégrable utilisée dans les démonstrations des théorèmes 3 et 4. Plus précisément, on a $Y = \int H\,dX + L$ où H est un processus prévisible et où L est une semimartingale telle que $\langle X,L\rangle = 0$. Cette décomposition est essentiellement unique lorsque X et Y ne possèdent pas de parties continues à variation finie dans leur décomposition. On peut établir ces deux faits comme suit. Pour le premier, il est facile de voir que X est nul pour $F = \Omega$; pour le cas général, on peut utiliser le même procédé que dans le cas des martingales localement de carré intégrable pour obtenir le résultat désiré. Pour le second, par la technique de localisation, on peut supposer $\langle X\rangle$ et $\langle Y\rangle$ intégrables ; d'après l'inégalité de Kunita-Watanabé, on sait alors que $\langle X,Y\rangle$ engendre sur la tribu prévisible une mesure absolument continue par rapport à celle engendrée par $\langle X\rangle$. Prenons maintenant pour H la dérivée de Radon-Nikodym correspondante, pour L le processus $Y - \int H\,dX$ et vérifions que $\langle X,L\rangle = 0$. On a $\langle X,L\rangle = \langle X,Y\rangle - \langle X,\int H\,dX\rangle$ et

$$\langle X,\int H\,dX\rangle = [X,\int H\,dX]^p = (\int H\,d[X])^p = \int H\,d\langle X\rangle ,$$

d'où $\langle X,L\rangle = \langle X,Y\rangle - \int H\,d\langle X\rangle$. Par définition de H, on voit que $\langle X,L\rangle$ engendre une mesure nulle sur la tribu prévisible ; autrement dit, $\langle X,L\rangle$ est une martingale locale, et comme elle est prévisible, elle est nulle. L'unicité de ce type de décomposition résulte du premièrement.

L'auteur remercie T. JEULIN pour la remarque qui simplifie beaucoup la démonstration dans la première partie.

Bibliographie :

[1] C. Dellacherie : Capacités et Processus stochastiques. Springer-Verlag, 1972.

[2] C. Dellacherie et P.A. Meyer : Probabilités et Potentiel, 2e édition, Chapitres I-IV. Hermann, Paris, 1975.

[3] H. Kunita et S. Watanabé : On Saquare Integrable Martingales, Nagoya Math. J. 30, 1967.

[4] P.A. Meyer : Un cours sur les Intégrales Stochasiques, Seminaire de Proba. X, L.N. in Math. n°511. Springer-Verlag, 1976.

[5] K.A. Yen : An Introduction to the Theory of Martingale and Stochastic Integral (in Chinese).Shangai, 1981.

Laboratoire de Calcul de Probabilités et Statistiques
Université de ROUEN