JEAN-FRANÇOIS LE GALL

Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan et la méthode de renormalisation de Varadhan

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 19 (1985), p. 314-331

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__314_0>

SUR LE TEMPS LOCAL D'INTERSECTION DU MOUVEMENT BROWNIEN PLAN ET LA METHODE DE RENORMALISATION DE VARADHAN.

J.F. LE GALL.

0. *Introduction* :

Soit W un mouvement brownien plan. Une façon d'étudier les recoupements de la trajectoire de W avec elle-même consiste à introduire l'intégrale formelle :

$$\text{(0-a)} \qquad \int_0^1 \int_0^1 \delta_0(W_s - W_t)\,ds\,dt.$$

Ici δ_0 désigne la mesure de Dirac au point 0 du plan. L'expression formelle (0-a) joue un rôle important dans l'approche par Symanzik [8] de la théorie quantique des champs. Dans son appendice au livre de Symanzik, Varadhan [9] décrit une méthode qui permet de donner un sens à l'intégrale formelle (0-a) ; soit $(g_k, k \geqslant 1)$ la suite de fonctions sur le plan définies par :

$$g_k(x) = (k/2\pi)\exp(-k\,|x|^2/2)$$

La suite (g_k) converge, au sens de la convergence étroite des mesures, vers δ_0. Il est alors tentant de définir l'intégrale (0-a) comme la limite, quand k tend vers l'infini des intégrales :

$$\text{(0-b)} \qquad \int_0^1 \int_0^1 g_k(W_s - W_t)\,ds\,dt.$$

Varadhan [9] observe que cette limite est presque surement infinie mais qu'on peut obtenir une convergence vers une variable aléatoire finie, à condition de "renormaliser" la suite des intégrales (0-b) ; plus précisément il existe une suite de constantes $(c_k, k \geq 1)$ telle que :

(0-c) $$\int_0^1 \int_0^1 g_k(W_s - W_t)ds\, dt - c_k \xrightarrow[k\to\infty]{} . \qquad \text{dans } L^2(P).$$

L'un des buts de ce travail est de retrouver sans calculs le résultat de Varadhan. Pour cela nous utiliserons la notion de temps local d'intersection introduite par Geman, Horowitz et Rosen [2] (voir aussi Wolpert [11]) pour deux mouvements browniens plans indépendants, et étendue par Rosen [5] au cas d'un seul mouvement brownien plan. Décrivons brièvement notre méthode ; si B est une partie borélienne de $[0,1]^2$, le temps local d'intersection $(\alpha(y,B),\ y \in \mathbb{R}^2 - \{0\})$ satisfait, pour toute fonction g borélienne bornée :

(0-d) $$\int\int_B g(W_s - W_t)ds\, dt = \int_{\mathbb{R}^2} g(y)\alpha(y,B)dy.$$

On peut choisir une "bonne" version de $\alpha(y,B)$ qui soit continue en la variable d'espace y, sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. La difficulté vient de ce qu'il n'est pas en général possible d'étendre $\alpha(y,B)$ à $\mathbb{R}^2$ tout entier (c'est possible si B est "loin de la diagonale"). En particulier on a :

(0-e) $$\alpha(y, [0,1]^2) \xrightarrow[y \to 0]{} \infty \qquad P \text{ p.s.}$$

La renormalisation de Varadhan suggère d'introduire, pour $y \neq 0$:

$$\gamma(y,B) = \alpha(y,B) - E[\alpha(y,B)].$$

Nous montrons dans la partie 2 que $\gamma(y,B)$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$. On déduit alors de (0-d) :

$$\int_0^1\int_0^1 g_k(W_s - W_t)ds\, dt - E\left[\int_0^1\int_0^1 g_k(W_s - W_t)ds\, dt\right]$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} g_k(y)\gamma(y, [0,1]^2)dy.$$

D'où :

$$\int_0^1\int_0^1 g_k(W_s-W_t)ds\,dt - E\,[\int_0^1\int_0^1 g_k(W_s-W_t)ds\,dt\,]$$

$$\xrightarrow[k\to\infty]{} \gamma(0,[0,1]^2) \qquad \text{p.s. et dans } L^2(P).$$

On retrouve ainsi le résultat de Varadhan (0-c). Signalons que l'idée d'appliquer la notion de temps local d'intersection à la renormalisation de Varadhan a déjà été utilisée par Rosen [6] mais avec des méthodes très différentes des notres.

Dans la partie 1 nous reprenons les résultats de Geman, Horowitz et Rosen [2] pour construire le temps local d'intersection $\alpha(y,B)$. Notre but est là surtout pédagogique ; nous montrons comment à partir du cas plus simple de deux mouvements browniens plans indépendants on construit le temps local d'intersection pour un seul mouvement brownien, et surtout on met en évidence les difficultés inhérentes à ce cas. La partie 2 est consacrée à l'étude de la version "renormalisée" $\gamma(y,B)$. Enfin dans la partie 3 nous donnons une interprétation de $\gamma(0,[0,1]^2)$ liée à l'étude asymptotique de la saucisse de Wiener. Pour $\varepsilon > 0$ la saucisse de Wiener de rayon ε associée à W est définie par :

$$S^\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^2 \;;\; \inf(|W_s-y| \;;\; s \leq 1) < \varepsilon\}$$

Il est intuitivement clair que plus la trajectoire de W se recoupe elle-même, plus la mesure de Lebesgue de S^ε sera petite. Nous montrons que si m désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, il existe une constante K telle que :

$$(\log \frac{1}{\varepsilon})((\log \frac{1}{\varepsilon})m(S^\varepsilon)-\pi) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} K - \frac{\pi^2}{2}\gamma(0,[0;1]^2)$$

avec convergence dans $L^2(P)$.

1. *Rappels sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan :*

Nous commencerons par rappeler, sous une forme adaptée à nos applications, certains résultats de Geman, Horowitz et Rosen [2] relatifs au temps local d'intersection pour deux mouvements browniens plans indépendants. Soient donc W,W' deux mouvements browniens plans indépendants. Le temps local d'intersection de W et W' est la famille $(\beta(y,.) \; ; \; y \in \mathbb{R}^2)$ de mesures (aléatoires) positives bornées sur $[0,1]^2$ qui satisfait P p.s. les deux propriétés suivantes :

(i) Pour toute partie borélienne B de $[0,1]^2$ et toute fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ borélienne bornée :

$$\text{(1-a)} \qquad \iint_B g(W_s - W'_t)\,ds\,dt = \int_{\mathbb{R}^2} g(y)\beta(y,B)dy.$$

(ii) L'application $y \to \beta(y,.)$ est étroitement continue.

Remarquons que (i) et (ii) assurent l'unicité de β (à indistingabilité près). On a de plus la propriété suivante :

pour tout $p \geq 1$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $C(p,\varepsilon)$ telle que, pour tous $y,z \in \mathbb{R}^2$ et toute partie borélienne B de T :

$$\text{(1-b)} \qquad E\,[\,|\beta(y,B)-\beta(z,B)|^p\,] \leq C(p,\varepsilon)\;|y-z|^{p-\varepsilon}.$$

Si maintenant nous nous intéressons aux intersections de la trajectoire d'un seul mouvement brownien plan W avec elle-même, nous chercherons à construire une famille de mesures $(\alpha(y,.),\; y \in \mathbb{R}^2)$ qui satisfasse la propriété (0-d) à la place de (1-a). Pour des raisons de symétrie évidentes on peut se limiter à une étude sur le triangle

$$T = \{(s,t) \; ; \; 0 \leq s < t \leq 1\}.$$

Il est alors facile de se ramener à la situation ci-dessus. On pose pour tout entier $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq 2^{n-1}$:

$$A_k^n = [(2k-2)2^{-n} \; ; \; (2k-1)2^{-n}[\times](2k-1)2^{-n} \; ; \; (2k)2^{-n}].$$

On remarque que : $\quad T = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} A_k^n \right).$

De plus les A_k^n sont deux à deux disjoints. Sur chaque carré A_k^n on est ramené à la situation de deux mouvements browniens indépendants issus du même point. Les résultats rappelés plus haut entraînent donc l'existence pour chaque couple (n,k) d'une famille $(\beta_k^n(y,.), y \in \mathbb{R}^2)$ de mesures positives finies sur A_k^n telles que :

(i) Pour toute partie borélienne B de A_k^n et toute fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ borélienne bornée :

$$\iint_B g(W_s - W_t)ds\, dt = \int_{\mathbb{R}^2} g(y)\beta_k^n(y,B)dy.$$

(ii) L'application $y \to \beta_k^n(y,.)$ est étroitement continue.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette partie :

Théorème 1.1 :

Il existe une famille, unique à indistingabilité près, $(\alpha(y,.), y \in \mathbb{R}^2 - \{0\})$ de mesures (aléatoires) positives finies sur le triangle T qui satisfait les deux propriétés suivantes :

(i) Pour toute partie borélienne B de T et toute fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ borélienne bornée :

$$\iint_B g(W_s - W_t)ds\, dt = \int_{\mathbb{R}^2 - \{0\}} g(y)\alpha(y,B)dy.$$

(ii) L'application $y \to \alpha(y,.)$ est étroitement continue.

Preuve :

On pose : $\alpha(y,.) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \beta_k^n (y,.)$.

La propriété (i) est évidente. Pour montrer (ii) on choisit $\varepsilon > 0$ et on remarque que P p.s. il existe un entier $N(\omega)$ tel que :

pour tout couple $(s,t) \in T$ avec $t-s \leq 2^{-N(\omega)}$

$$|W_t - W_s| < \varepsilon.$$

On en déduit, si $|y| > \varepsilon$:

$$\alpha(y,.) = \sum_{n=1}^{N(\omega)} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \beta_k^n(y,.). \tag{1-c}$$

La finitude des mesures $\alpha(y,.)$, et la continuité étroite de l'application $y \to \alpha(y,.)$ résultent alors de (1-c) et des propriétés correspondantes pour les β_k^n. □

On aurait pu aussi définir :

$$\alpha(0,.) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \beta_k^n(0,.).$$

$\alpha(0,.)$ ainsi définie est une mesure positive σ-finie sur T. La difficulté vient de ce que, à la différence des $\alpha(y,.)$ pour $y \neq 0$, $\alpha(0,.)$ n'est pas finie.

Proposition 1.2 :

$$\alpha(0,T) = +\infty \qquad P \text{ p.s.}$$

Preuve :

On note pour simplifier $\ell_k^n = \alpha(0,A_k^n)$ et $\ell^n = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \ell_k^n$. Pour n fixé les ℓ_k^n $(1 \leq k \leq 2^{n-1})$ sont indépendantes et équidistribuées. Un changement d'échelle montre :

$$\ell_k^n \overset{(d)}{=} 2^{1-n} \, \ell_1^1.$$

On en déduit l'existence de constantes K_1 et K_2 telles que :

$$E[\ell^n] = K_1 \quad \text{et} \quad E[(\ell^n - E[\ell^n])^2] = K_2\, 2^{-n}.$$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} (\ell^n - E[\ell^n])$ converge p.s. Finalement :

$$\alpha(0,T) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell^n = \sum_{n=1}^{\infty} E[\ell^n] + \sum_{n=1}^{\infty} (\ell^n - E[\ell^n]) = +\infty. \qquad \square$$

Remarque :

L'ensemble des résultats de cette partie reste valable pour le mouvement brownien à valeurs dans R^3. Il n'en sera pas de même pour la partie suivante.

2. *La renormalisation de Varadhan* :

Le résultat de Varadhan [9] et la preuve de la *proposition 1.2* suggèrent d'étudier une forme "renormalisée" du temps local d'intersection. On pose pour $y \in R^2 - \{0\}$ et pour toute partie borélienne B de T :

$$\gamma(y,B) = \alpha(y,B) - E[\alpha(y,B)].$$

Pour $y=0$ on adopte la même définition, à ceci près qu'il faut se restreindre aux parties B telles que $E[\alpha(0,B)] < \infty$.

Remarquons qu'on a, pour tout $y \in R^2$ et toute partie B :

$$E[\alpha(y,B)] = \frac{1}{2\pi} \iint_B \frac{ds\, dt}{t-s} \exp\left(-\frac{|y|^2}{2(t-s)}\right) \tag{2-a}$$

La formule (2-a) s'obtient facilement à l'aide de la formule de densité de temps d'occupation (formule (i) du *théorème 1.1*).

Proposition 2.1 :

L'application $B \to \gamma(0,B)$ définie pour les parties B telles que $E[\alpha(0,B)] < \infty$ admet un unique prolongement à la tribu borélienne de T qui satisfait la condition suivante : si B est réunion d'une suite croissante $(B_n, n \geq 1)$, alors

$$\gamma(0,B) = \lim_{n\to\infty} \gamma(0,B_n) \text{ avec convergence dans } L^2(P).$$

Preuve :

On reprend les notations de la partie précédente et on pose, pour tout entier $n \geq 1$:

$$A^n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} A_k^n .$$

Alors, pour toute partie borélienne B de T :

$$\begin{aligned} E\,[\,(\alpha(0,B \cap A^n) - E\,[\alpha(0,B \cap A^n)\,])^2\,] &= \sum_{k=1}^{2^{n-1}} E\,[\,(\alpha(0,B \cap A_k^n) - E\,[\alpha(0,B \cap A_k^n)\,])^2\,] \\ &\leq 2^{n-1} \,.\, 2^{2(1-n)}\, E\,[\,(\alpha(0,A_1^1))^2] \\ &\leq \text{Cst. } 2^{-n}. \end{aligned}$$

Ceci permet de définir :

$$\gamma(0,B) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha(0,B \cap A^n) - E\,[\alpha(0,B \cap A^n)\,]).$$

La série converge dans L^2 uniformément quand B décrit la tribu borélienne de T. Si $E\,[\alpha(0,B)\,] < \infty$ il est clair que les deux définitions de $\gamma(0,B)$ coïncident. Pour vérifier la condition de l'énoncé on utilise le fait que la série définissant $\gamma(0,B)$ converge uniformément en B. Enfin l'unicité du prolongement est évidente. □

Remarque :

Posons pour $\varepsilon > 0$: $T_\varepsilon = \{\,(s,t) \in T \; ; \; t-s > \varepsilon\}$.

La proposition entraîne :

$$\gamma(0,T_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \gamma(0,T) \quad \text{avec convergence dans } L^2(P).$$

D'autre part, (2-a) montre que :

$$E\,[\alpha(0,T_\varepsilon)\,] = \frac{1}{2\pi}\,(\log \frac{1}{\varepsilon} + 1-\varepsilon)$$

On a donc :

$$\alpha(0,T_\varepsilon) - \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \gamma(0,T) - \frac{1}{2\pi} \quad \text{dans } L^2(P). \tag{2-b}$$

(2-b) fournit une nouvelle illustration du fait que la mesure $\alpha(0,.)$ est de masse totale infinie.

Théorème 2.2 :

Pour toute partie borélienne B de T l'application $y \to \gamma(y,B)$ est continue de R^2 dans $L^2(P)$.

Plus précisément, pour tout entier p pair et tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $K(p,\varepsilon)$ telle que, pour tous $y,z \in R^2$ et toute partie B :

$$E\,[\,(\gamma(y,B)-\gamma(z,B))^p\,] \leqslant K(p,\varepsilon)\,|y-z|^{p-\varepsilon}.$$

En particulier, pour toute partie borélienne B de T, il existe une version continue de l'application $y \to \gamma(y,B)$.

Preuve :

On a :

$$\gamma(y,B) = \sum_{n\geqslant 1} (\alpha(y,B\cap A^n)-E\,[(\alpha(y,B\cap A^n)\,]).$$

Les arguments de la preuve de la *proposition 2.1* montrent que la série converge dans $L^2(P)$ uniformément quand y décrit R^2 et B la tribu borélienne de T. D'autre part chacun des termes est une fonction continue de y à valeurs dans $L^2(P)$. Ceci suffit à prouver la première assertion du théorème.

On écrit ensuite :

$$E\,[\,(\gamma(y,B)-\gamma(z,B))^p\,]^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} E\,[\,(\gamma(y,B\cap A^n)-\gamma(z,B\cap A^n))^p\,]^{\frac{1}{p}}$$

Pour n fixé on a : $\gamma(y,B\cap A^n)-\gamma(z,B\cap A^n) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} X_k$, à condition de poser :

$$X_k = \gamma(y,B \cap A_k^n)-\gamma(z,B \cap A_k^n).$$

Les variables X_k $(1 \leq k \leq 2^{n-1})$ sont indépendantes. Un changement d'échelle montre :

$$X_k \overset{(d)}{=} 2^{1-n}(\gamma(2^{\frac{n-1}{2}} y, B_k)-\gamma(2^{\frac{n-1}{2}} z, B_k))$$

pour une certaine partie B_k de A_1^1.

(1-b) entraîne alors :

$$E [(X_k)^p] \leq 2^{p(1-n)} \bar{C}(p,\varepsilon)|2^{\frac{n-1}{2}} y-2^{\frac{n-1}{2}} z|^{p-\varepsilon}$$

$$\leq \bar{C}(p,\varepsilon)2^{(p+\varepsilon)(\frac{1-n}{2})} |y-z|^{p-\varepsilon}.$$

Le fait que les X_k soient indépendantes et centrées entraîne pour une certaine constante $C'(p)$ ne dépendant pas de n :

$$E [(\sum_{k=1}^{2^{n-1}} X_k)^p] \leq C'(p)\ 2^{p(\frac{n-1}{2})} \sup(E [X_k^p] \ ; \ 1 \leq k \leq 2^{n-1}).$$

On en deduit :

$$E [(\gamma(y,B \cap A^n)-\gamma(z,B \cap A^n))^p] \leq C'(p)\ \bar{C}(p,\varepsilon)\ 2^{(\frac{1-n}{2})\varepsilon} |y-z|^{p-\varepsilon}.$$

On trouve finalement :

$$E [(\gamma(y,B)-\gamma(z,B))^p]^{\frac{1}{p}} \leq (C'(p)\ \ \bar{C}(p,\varepsilon))^{\frac{1}{p}} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{(1-n)\varepsilon}{2p}} |y-z|^{1-\frac{\varepsilon}{p}},$$

d'où la deuxième assertion du théorème.

Le lemme de Kolmogorov (voir par exemple Ikeda et Watanabe [3] p. 20) entraîne alors l'existence d'une version continue en y de $\gamma(y,B)$. □

Corollaire 2.3 :

Soit C la constante d'Euler. On a :

(2-c) $$\alpha(y,T) - \frac{1}{\pi} \log \frac{1}{|y|} \xrightarrow[y\to 0]{} \gamma(0,T) + \frac{1}{2\pi} (\log 2-1-C).$$

la convergence ayant lieu p.s. et dans $L^2(P)$.

Preuve.

On applique le théorème après avoir remarqué que :

$$E[\alpha(y,T)] = \frac{1}{2\pi}\iint_T \exp\left(-\frac{|y|^2}{2(t-s)}\right)\frac{ds\,dt}{t-s}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{2}{|y|^2}} \left(1-\frac{u|y|^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{1}{u}\right)\frac{du}{u}$$

d'où : $E[\alpha(y,T)] - \frac{1}{\pi}\log\frac{1}{|y|} \xrightarrow[y\to 0]{} \frac{1}{2\pi}(\log 2-1-C)$. □

Corollaire 2.4 :

Soient B une partie borélienne de T et $(g_n\ ;\ n \geq 1)$ une suite de fonctions bornées définies sur R^2 telle que la suite de mesures $g_n(y)dy$ converge étroitement vers δ_0. Alors :

$$\iint_B g_n(W_s-W_t)ds\,dt - E\left[\iint_B g_n(W_s-W_t)ds\,dt\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma(0,B)$$

la convergence ayant lieu p.s. et dans $L^2(P)$.

Dans le cas particulier $B=T$ on a :

$$\iint_T g_n(W_s-W_t)ds\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{R^2} g_n(y)\log\frac{1}{|y|}dy$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma(0,T) + \frac{1}{2\pi}(\log 2-1-C)$$

Preuve :

On écrit :

$$\iint_B g_n(W_s-W_t)ds\,dt - E\left[\iint_B g_n(W_s-W_t)ds\,dt\right]$$

$$= \int_{R^2} g_n(y)\gamma(y,B)dy.$$

Ensuite on applique le *théorème 2.2*. La convergence presque sûre résulte de l'existence d'une version continue en y de $\gamma(y,B)$. Pour le cas particulier $B=T$ on utilise le *corollaire 2.3*. □

Remarques :

a) L'expression $\gamma(0,T)$ apparaît de façon naturelle dans l'étude des "mesures de polymères" (voir Edwards [1] ou Westwater [10]). On appelle mesure de polymères en dimension d toute probabilité ν sur l'espace des fonctions continues de $[0;1]$ dans R^d qui s'écrit formellement :

$$\text{(2-d)} \qquad \nu(d\omega) = L^{-1} \exp\left(-c \int_0^1 \int_0^1 \delta_0(\omega(s)-\omega(t))ds\, dt\right)\mu(d\omega)$$

où μ est la mesure de Wiener en dimension d, c une constante positive et L une constante de normalisation.

La formule (2-d) doit être interprétée de la manière suivante. On choisit une suite (g_n) convergeant étroitement vers δ_0 et on définit les probabilités ν_n par :

$$\nu_n(d\omega) = L_n^{-1} \exp\left(-c \int_0^1 \int_0^1 g_n(\omega(s)-\omega(t))ds\, dt\right)\mu(d\omega).$$

Les valeurs d'adhérence de la suite ν_n sont appelées mesures de polymères. Le *corollaire 2.4* montre que toutes les mesures de polymères en dimension deux sont de la forme :

$$\nu = L^{-1} \exp(-c\gamma(0,T)).\mu$$

On peut vérifier que $\gamma(0,T)$ possède des moments exponentiels de tous ordres.

b) Il n'existe pas à notre connaissance d'analogue de la renormalisation de Varadhan en dimension trois. Cependant Westwater [10] a montré l'existence de mesures de polymères non triviales en dimension trois. A la différence du cas de la dimension deux, les mesures construites par Westwater sont étrangères à la mesure de Wiener.

3. *Une autre interprétation de* $\gamma(0,T)$:

Pour $\varepsilon > 0$ on note S^ε la "saucisse de Wiener" de rayon ε associée à W sur l'intervalle $[0;1]$:

$$S^\varepsilon = \{y \in R^2 \ ; \ \inf(|W_s - y| \ ; \ s \leqslant 1) < \varepsilon\}$$

Pour $y \neq 0$ on peut interpréter $\alpha(y,T)$ à l'aide de S^ε et de sa translatée par y ; m désignant la mesure de Lebesgue sur R^2 on a le résultat suivant ([4]) :

$$\text{(3-a)} \qquad (\log \frac{1}{\varepsilon})^2 \, m(S^\varepsilon \cap (y+S^\varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \pi^2(\alpha(y,T)+\alpha(-y,T))$$

avec convergence dans $L^2(P)$.

Pour $y=0$ le résultat de convergence (3-a) n'est plus vérifié. On sait (voir [4]) que :

$$\text{(3-b)} \qquad (\log \frac{1}{\varepsilon}) \, m(S^\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \pi \qquad \text{p.s. et dans } L^2(P).$$

Il est cependant possible de faire intervenir $\gamma(0,T)$ à condition d'aller "au second ordre".

Théorème 3.1 :

$$\text{(3-c)} \qquad (\log \frac{1}{\varepsilon})((\log \frac{1}{\varepsilon}) \, m(S^\varepsilon) - \pi) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{\pi}{2}(1+C-\log 2) - \pi^2\gamma(0,T)$$

où C désigne toujours la constante d'Euler et la convergence a lieu dans $L^2(P)$.

Lemme 3.2 :

Soit, pour $\varepsilon > 0$: $H^\varepsilon = (\log \frac{1}{\varepsilon})((\log \frac{1}{\varepsilon})\, m(S^\varepsilon)-\pi)$.

La famille $(H^\varepsilon,\ 0 < \varepsilon < \frac{1}{2})$ est bornée dans $L^2(P)$.

Preuve :

Spitzer ([7] *théorème 2*) a montré, dans un cadre bien plus général :

$$E[H^\varepsilon] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{\pi}{2}(1+C-\log 2) \tag{3-d}$$

La famille $(E[H^\varepsilon],\ 0 < \varepsilon < \frac{1}{2})$ est donc bornée.

Pour $0 \leqslant u < v \leqslant 1$ soit $S^\varepsilon(u,v)$ la saucisse de Wiener de rayon ε associée à W sur l'intervalle $[u;v]$; on a :

$$H^\varepsilon = H_1^\varepsilon + H_2^\varepsilon - (\log \frac{1}{\varepsilon})^2\, m(S^\varepsilon(0,\frac{1}{2}) \cap S^\varepsilon(\frac{1}{2},1)) \tag{3-e}$$

où
$$H_1^\varepsilon = (\log \frac{1}{\varepsilon})((\log \frac{1}{\varepsilon})m(S^\varepsilon(0,\frac{1}{2})) - \frac{\pi}{2}),$$
$$H_2^\varepsilon = (\log \frac{1}{\varepsilon})((\log \frac{1}{\varepsilon})m(S^\varepsilon(\frac{1}{2},1)) - \frac{\pi}{2}).$$

H_1^ε et H_2^ε sont indépendantes de même loi. Un changement d'échelle montre:

$$H_1^\varepsilon \overset{(d)}{=} \frac{1}{2}(\log \frac{1}{\varepsilon})((\log \frac{1}{\varepsilon})m(S^{\varepsilon\sqrt{2}}) - \pi)$$
$$\overset{(d)}{=} \frac{1}{2}H^{\varepsilon\sqrt{2}} + \frac{1}{2}(\log \sqrt{2})((\log \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}})m(S^{\varepsilon\sqrt{2}}) - \pi)$$
$$+ \frac{1}{2}(\log \frac{1}{\varepsilon})(\log \sqrt{2})m(S^{\varepsilon\sqrt{2}})$$

En utilisant (3-b) on voit qu'il existe une constante K telle que :

$$E[(H_1^\varepsilon)^2]^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2} E[(H^{\varepsilon\sqrt{2}})^2]^{\frac{1}{2}} + K. \tag{3-f}$$

D'après [4] la famille des variables $(\log \frac{1}{\varepsilon})^2 m(S^\varepsilon(0,\frac{1}{2}) \cap S^\varepsilon(\frac{1}{2},1))$ est bornée dans $L^2(P)$. (3-e), (3-f) et (3-d) entraînent alors, pour une certaine constante k' : $E[(H^{\varepsilon})^2]^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} E[(H^{\varepsilon\sqrt{2}})^2]^{\frac{1}{2}} + k'$.

Cela suffit à établir le résultat du lemme. □

Preuve du théorème 3.1 :

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$(3\text{-g}) \qquad m(S^{\varepsilon}) = \sum_{k=1}^{2^n} m(S^{\varepsilon}((k-1)2^{-n},k2^{-n})) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{2^{i-1}} m(S^{\varepsilon}((2k-2)2^{-i},(2k-1)2^{-i}) \cap S^{\varepsilon}((2k-1)2^{-i},2k2^{-i}))$$

D'autre part les résultats de [4] entraînent, pour tout couple (i,k) :

$$(\log \frac{1}{\varepsilon})^2 m(S^{\varepsilon}((2k-2)2^{-i},(2k-1)2^{-i}) \cap S^{\varepsilon}((2k-1)2^{-i},2k2^{-i})) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \pi^2 \alpha(0,A_k^i)$$

avec convergence dans $L^2(P)$.

On déduit alors de (3-g) :

$$(\log \frac{1}{\varepsilon})^2 (m(S^{\varepsilon}) - \sum_{k=1}^{2^n} m(S^{\varepsilon}((k-1)2^{-n},k2^{-n}))) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\pi^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha(0,A^i)$$

avec convergence dans $L^2(P)$.

On calcule facilement $E[\alpha(0,A^i)] = \log 2/2\pi$, d'où

$$(3\text{-h}) \quad (\log \frac{1}{\varepsilon})^2 (m(S^{\varepsilon}) - \sum_{k=1}^{2^n} m(S^{\varepsilon}((k-1)2^{-n},k2^{-n}))) + \frac{\pi \log 2}{2} n \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\pi^2 \sum_{i=1}^{n} \gamma(0,A^i)$$

avec convergence dans $L^2(P)$.

Soit, pour $0 < a < 1$: $H^{\varepsilon}(a) = (\log \frac{1}{\varepsilon})((\log \frac{1}{\varepsilon})m(S^{\varepsilon}(0,a)) - \pi a)$.

Le même changement d'échelle que dans la preuve du lemme montre que :

$$(3\text{-i}) \qquad H^{\varepsilon}(a) \overset{(d)}{=} a\, H^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{a}}} + R^{\varepsilon}(a)$$

où le "reste" $R^{\varepsilon}(a)$ vérifie :

$$(3\text{-j}) \qquad R^{\varepsilon}(a) + \pi a \log a/2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \quad \text{dans } L^2(P).$$

n étant fixé on a, pour $1 \leq k \leq 2^n$:

$$(\log \frac{1}{\varepsilon})^2 m(S^\varepsilon((k-1)2^{-n},k2^{-n}))=\pi 2^{-n} \log \frac{1}{\varepsilon} + H_k^\varepsilon(2^{-n})$$

où les variables $H_k^\varepsilon(2^{-n})$ sont indépendantes et de même loi que $H^\varepsilon(2^{-n})$.

(3-i) permet maintenant d'écrire, pour $1 \leq k \leq 2^n$:

$$(\log \frac{1}{\varepsilon})^2 m(S^\varepsilon((k-1)2^{-n},k2^{-n}))=\pi 2^{-n} \log \frac{1}{\varepsilon} +2^{-n} H_k^{\varepsilon 2^{n/2}} + R_k^\varepsilon(2^{-n})$$

où les variables $H_k^{\varepsilon 2^{n/2}}$ (respectivement $R_k^\varepsilon(2^{-n})$) sont indépendantes de même loi que $H^{\varepsilon 2^{n/2}}$ (resp. $R^\varepsilon(2^{-n})$).

On obtient ainsi :

$$\text{(3-k)} \quad (\log \frac{1}{\varepsilon})^2 (m(S^\varepsilon) - \sum_{k=1}^{2^n} m(S^\varepsilon((k-1)2^{-n},k2^{-n}))) + \frac{\pi \log 2}{2} n =$$

$$= H^\varepsilon - 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^n} H_k^{\varepsilon 2^{n/2}} - \sum_{k=1}^{2^n} R_k^\varepsilon (2^{-n}) + \frac{\pi \log 2}{2} n.$$

(3-j) entraîne :

$$\text{(3-l)} \qquad \sum_{k=1}^{2^n} R_k^\varepsilon(2^{-n}) - \frac{\pi \log 2}{2} n \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \quad \text{dans } L^2(P)$$

En regroupant (3-h), (3-k) et (3-l) on trouve :

$$\text{(3-m)} \qquad H^\varepsilon - 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^n} H_k^{\varepsilon 2^{n/2}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\pi^2 \gamma(0, \bigcup_{k=1}^{n} A^i)$$

avec convergence dans $L^2(P)$.

Il suffit alors d'utiliser la *proposition 2.1*, le résultat de Spitzer (3-d) ainsi que le *lemme 3.2* pour déduire de (3-m) le théorème. □

Remarques :

Il serait intéressant d'obtenir un analogue du *théorème 3.1* pour le mouvement brownien en dimension trois. On sait que, W étant maintenant un mouvement brownien à valeurs dans R^3 et S^ε la "saucisse de Wiener" de rayon ε associée à W sur l'intervalle $[0;1]$, on a :

$$\varepsilon^{-1} m(S^{\varepsilon}) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 2\pi \qquad \text{p.s. et dans } L^2(P).$$

Spitzer [7] a montré que :

$$\varepsilon^{-1} E[\varepsilon^{-1} m(S^{\varepsilon}) - 2\pi] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \sqrt{2\pi}.$$

Peut-on renforcer le résultat de Spitzer en montrant la convergence des variables aléatoires $\varepsilon^{-1}(\varepsilon^{-1} m(S^{\varepsilon}) - 2\pi)$? Ce problème semble très lié à l'existence d'une "bonne renormalisation" pour le temps local d'intersection en dimension trois (voir les remarques de la fin de la partie 2).

— — — — — — —

Je voudrais ici remercier Marc Yor pour de nombreuses et fructueuses discussions.

— — — — — — —

Laboratoire de Probabilités
4, Place Jussieu - Tour 56
75230 PARIS CEDEX 05

Références :

[1] Edwards, S.F. : The statistical mechanics of polymers with excluded volume. Proc. Phys. Sci. 85, 613-624 (1965).

[2] Geman, D., Horowitz, J., Rosen, J. : The local time of intersections for Brownian paths in the plane. Ann. Prob. 12, 86-107 (1984).

[3] Ikeda, N., Watanabe, S. : Stochastic differential equations and diffusion processes. North Holland mathematical library. Kodansha (1981).

[4] Le Gall, J.F. : Sur la saucisse de Wiener et les points multiples du mouvement brownien. Preprint (novembre 1984).

[5] Rosen, J. : A local time approach to the self intersections of Brownian paths in the plane. Commun. Math. Phys. 88, 327-338 (1983).

[6] Rosen, J. : Tanaka's formula and renormalisation for intersections of planar Brownian motion. Preprint University of Massachusetts (1984).

[7] Spitzer, F. : Electrostatic capacity, heat flow, and Brownian motion. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 3, 110-121 (1964).

[8] Symanzik, K. : Euclidean quantum field theory. In : Local Quantum Theory. Jost, R. (ed) New-York : Academic Press (1969).

[9] Varadhan, S.R.S. : Appendix to Euclidean quantum field theory. By K. Symanzik, in : Local Quantum Theory. Jost, R. (ed) New-York : Academic Press (1969).

[10] Westwater, J. : On Edwards' model for long polymer chains. Commun. Math. Phys. 72, 131-174 (1980).

[11] Wolpert, R. : Wiener path intersections and local time. J. Funct. Anal. 30, 329-340 (1978).