

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHRISTOPHE STRICKER

## **Une remarque sur une certaine classe de semimartingales**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 19 (1985), p. 218-221

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1985\\_\\_19\\_\\_218\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__218_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Une remarque sur une certaine classe de semimartingales

---

Par C. STRICKER

Soit  $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), P)$  un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles. Dans [2] nous avons étudié la classe des semimartingales continues  $X$  de décomposition canonique  $M+A$  satisfaisant à la condition :

(1)  $d\langle M, M \rangle_s = m_s ds$ ,  $dA_s = a_s ds$ , le processus prévisible  $(m_s)$  est localement borné et  $\int_0^t a_s^2 ds < +\infty$  pour tout  $t > 0$ .

Nous avons montré que cette condition (1) était équivalente à :

(2) Si  $\mathcal{B}$  désigne l'ensemble des processus prévisibles élémentaires bornés vérifiant  $\int_0^t H_s^2 ds \leq 1$  pour tout  $t \geq 0$ , alors  $\{(H.X)_t, H \in \mathcal{B}\}$  est borné dans  $L^0$  pour tout  $t \geq 0$ .

Notons, toujours d'après [2], que la condition (2) est aussi équivalente à :

(3) Tout processus prévisible  $H$  vérifiant  $\int_0^t H_s^2 ds < +\infty$  pour tout  $t > 0$ , est  $X$ -intégrable, c'est-à-dire  $\int_0^t H_s dX_s$  existe pour tout  $t > 0$ .

Comme la condition (2) est invariante par changement de loi dans une même classe d'équivalence, il en est de même pour (1). On est tenté d'affaiblir (1) en considérant des semimartingales non nécessairement continues mais spéciales vérifiant :

(1')  $[M, M]$  est localement intégrable, la projection duale de  $[M, M]$ , notée  $\langle M, M \rangle$  est de la forme  $d\langle M, M \rangle_s = m_s ds$ ,  $dA_s = a_s ds$ , le processus prévisible  $(m_s)$  est localement borné et  $\int_0^t a_s^2 ds < +\infty$  pour tout  $t \geq 0$ .

Montrons que (1') implique (2).

**PROPOSITION 1.** Si  $X$  est une semimartingale spéciale vérifiant (1'), elle vérifie aussi (2).

**DEMONSTRATION.** Soit  $t > 0$  fixé. Par arrêt nous pouvons supposer qu'il existe

une constante  $C$  telle que  $|m_s| \leq C$  et  $\int_0^t a_s^2 ds \leq C$ . Si  $H$  est un processus prévisible vérifiant  $\int_0^t H_s^2 ds \leq 1$ ,  $E[(H \cdot M)_t^2] = E[(H^2 \cdot [M, M])_t] = E[(H^2 \cdot \langle M, M \rangle)_t] \leq C$  et  $E[(H \cdot A)_t^2] \leq E[\int_0^t H_s^2 ds \int_0^t a_s^2 ds] \leq C$ . Donc  $X$  vérifie (2).

La réciproque de cette proposition est fautive et voici un contre-exemple qui montrera en même temps que la classe des semimartingales spéciales vérifiant (1') n'est pas invariante par changement de loi dans une même classe d'équivalence.

Soit  $\Omega = \mathbb{R}^+$ ,  $\mathcal{F}$  la tribu borélienne,  $S$  l'application identité sur  $\Omega$ ,  $(\mathcal{F}_t)$  la filtration naturelle du processus  $(S \wedge t)$ ,  $P_1$  la loi exponentielle de paramètre 1 et  $P_2$  une loi de densité continue  $f > 0$  telle que  $f(u) = o(u)$  au voisinage de 0. D'après Dellacherie [1] on sait que si  $P$  est une loi diffuse sur l'espace probabilisable ci-dessus, la projection duale prévisible  $\tilde{A}^P$  du processus croissant  $A = 1_{[S, +\infty[}$  est définie par  $\tilde{A}_t^P = -\text{Log}(1 - F(S \wedge t))$  où  $F$  désigne la fonction de répartition de  $P$ . Par ailleurs, si  $f$  est une fonction borélienne telle que  $f(S)$  soit  $P$  intégrable, la projection duale prévisible de  $(\int_0^t f(u) dA_u)$  est  $(\int_0^t f(u) d\tilde{A}_u^P)$ . Soit  $X_t = \frac{1}{\sqrt{S}} 1_{[S, +\infty[} - \int_0^t \frac{1}{\sqrt{u}} d\tilde{A}_u^{P_2}$ .  $X$  est une  $P_2$  martingale,  $[X, X] = \frac{1}{S} 1_{[S, +\infty[}$ ,  $[X, X]_t^{P_2} = \int_0^{t \wedge S} \frac{f(u)}{u(1 - F_2(u))} du$ . Donc  $X$  vérifie (1') sous  $P_2$ . Or la décomposition canonique de  $X$  sous  $P_1$  est :

$$X_t = \left( \frac{1}{\sqrt{S}} 1_{[S, +\infty[} - \int_0^t \frac{du}{\sqrt{u}} \right) + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{u}} d(u + \tilde{A}_u^{P_2}).$$

Ainsi  $X$  ne vérifie pas (1') sous  $P_1$ . Toutefois  $X$  vérifie (1') et donc (2) sous  $P_2$ . Mais la condition (2) étant invariante par changement de loi dans une même classe d'équivalence,  $X$  vérifie aussi (2) sous  $P_1$ , si bien que (2) n'entraîne pas (1'), même si la semimartingale  $X$  est spéciale.

#### REMARQUES.

i) Bien entendu, on pourrait modifier la loi  $P_1$  dans l'exemple ci-dessus pour que  $X$  ne soit même plus spéciale.

ii) Notons que la densité  $\frac{dP_1}{dP_2}$  n'est pas bornée. En effet la formule de Girsanov et les résultats de [2] montrent que si  $X$  est une semimartingale spéciale vérifiant (1') sous la loi  $P$ , elle vérifie aussi (1') sous toute loi  $Q$  absolument continue par rapport à  $P$  et ayant une densité  $\frac{dQ}{dP}$  bornée.

PROPOSITION 2. Si  $X$  est une semimartingale telle que  $(H \cdot X)_t = 0$  pour tout processus prévisible borné  $H$  vérifiant  $\int_0^t |H_s| ds = 0$  alors :

i) les sauts de  $X$  sont totalement inaccessibles.

ii)  $(H^2 \cdot [X, X])_t = 0$

iii) lorsque  $X$  est une semimartingale spéciale, la partie à variation finie est absolument continue et  $(H \cdot [M, M])_t = 0$ ,  $M$  étant la partie martingale locale de la décomposition canonique de  $X$ .

DEMONSTRATION.

i) si  $T$  est un temps d'arrêt prévisible et si  $H = 1_{[T, \infty[}$ , on a  $\int_0^t H_s ds = 0$  pour tout  $t$  et  $H \cdot X = \Delta X_T 1_{[T, \infty[}$ . Donc  $\Delta X_T = 0$  et  $X$  n'a que des sauts totalement inaccessibles.

ii) d'après la formule d'Ito,  $(H \cdot X)_t^2 = \int_0^t (H \cdot X)_{s-} H_s dX_s + (H^2 \cdot [X, X])_t$ . Ainsi  $(H^2 \cdot [X, X])_t = 0$  si  $\int_0^t |H_s| ds = 0$ .

iii) cette assertion est établie dans notre article [2].

REMARQUE. Notons que l'hypothèse de la proposition 2 n'entraîne pas que  $X$  est une semimartingale spéciale. En effet soit  $N$  un processus de Poisson standard,  $S$  le premier instant de saut et  $(\mathcal{F}_t)$  la filtration naturelle de  $N$ . Alors si  $H$  est un processus prévisible borné,  $E[H_S] = E[(H \cdot N)_S] = E[\int_0^S H_u du]$ .

En particulier si  $H$  est positif et  $\int_0^\infty H_u du = 0$ ,  $H_S = 0$ . Posons  $Y = \frac{1}{S} 1_{[S, \infty[}$ . On a  $H \cdot Y = 0$  mais  $Y$  n'est pas localement intégrable car si  $T$  est un temps d'arrêt,  $T$  est constant sur  $\{T < S\}$ . Ainsi  $Y$  n'a pas de projection duale prévisible et ne peut donc être spéciale.

Ces calculs montrent aussi, comme nous l'avions annoncé dans [2], que la martingale purement discontinue  $M_t = N_{t \wedge S} - t \wedge S$  vérifie les hypothèses de la proposition 2.

REFERENCES.

[1] DELLACHERIE C. : Capacités et processus stochastiques. Ergebnisse der Math. 67, Springer Verlag, 1972.

[2] STRICKER C. : Quelques remarques sur les semimartingales gaussiennes et le problème de l'innovation. Proceedings of the ENST-CNET Colloquium, Lecture Notes in Control and Information Sciences 61, 260-276, Springer Verlag, 1984.

Université de Franche-Comté  
Faculté des Sciences  
Laboratoire de Mathématiques  
(U. A. n°741)  
25030 BESANCON CEDEX