Paul-André Meyer

Une remarque sur la topologie fine

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 19 (1985), p. 176
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__176_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1983/84

UNE REMARQUE SUR LA TOPOLOGIE FINE

par P.A. Meyer

La remarque suivante est certainement << bien connue >>, mais elle mérite d'être rappelée de temps en temps.

Soit (X_t) un bon processus de Markov droit. Soit (f_t) une famille de fonctions presque boréliennes finement continues, dépendant mesurablement d'un paramètre t , et uniformément bornée. Soit $f=\int f_t\lambda(dt)$, où λ est une mesure bornée. Alors f est encore finement continue.

Sur un espace métrisable, ce serait évident : on prendrait des x_n tendant vers x , $f(x_n) = \int f_t(x_n)\lambda(dt)$ converge vers $f(x)$ par convergence dominée. Mais la topologie fine n'est pas métrisable, et n'admet en général aucune suite convergente.

On remplace ce raisonnement par le suivant : pour vérifier que f est finement continue en x, il suffit de vérifier que, pour toute suite (T_n) de t. d'a. qui tend en décroissant vers 0, $E^x[|f(X_{T_n})-f(x)|]$ tend vers 0. Or cette propriété a lieu pour les f_t , et il suffit d'intégrer en t et d'utiliser la convergence dominée comme ci-dessus.