DOMINIQUE BAKRY

Transformation de Riesz pour les semi-groupes symétriques. Seconde partie : étude sous la condition $\Gamma_2 \geqq 0$

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 19 (1985), p. 145-174
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__145_0>

TRANSFORMATIONS DE RIESZ POUR LES SEMI-GROUPES SYMETRIQUES

SECONDE PARTIE : ETUDE SOUS LA CONDITION $\Gamma_2 \geqq 0$

par D. Bakry

La première partie de ce travail cherchait à dégager, en dimension 1, les hypothèses nécessaires pour le développement d'une bonne théorie des transformations de Riesz. Nous nous proposons ici de démontrer un certain nombre de résultats généraux sous ces hypothèses - en laissant toutefois de côté la théorie H^1 .

Rappelons qu'il s'agit de démontrer des inégalités de normes dans L^p entre l'opérateur linéaire C (générateur de Cauchy) et l'opérateur non linéaire $\sqrt{\Gamma}$ (carré du champ). L'hypothèse qui remplace la condition $H(a) \geqq 0$ (formule (4) de la première partie) est la propriété << intrinsèque >> figurant dans la proposition 1, qui s'écrit sous forme intégrale $\Gamma(P_t f, P_t f) \leqq P_t \Gamma(f,f)$, et sous forme différentielle

$$2\Gamma_2(f,f) = L\Gamma(f,f) - 2\Gamma(f,Lf) \geqq 0$$

Lorsque L est un bon opérateur différentiel d'ordre 2, Γ_2 est une expression quadratique en les dérivées d'ordre $\leqq 2$ de f , et l'on peut s'interroger sur la signification géométrique d'une telle condition : Emery a montré (voir une note dans ce volume) que, lorsque L est le laplacien d'une variété riemannienne, cela correspond à une propriété de positivité de la courbure de Ricci (lorsque le laplacien est perturbé par un terme du premier ordre, l'interprétation est plus compliquée).

Depuis toujours, les inégalités d'intégrales singulières sont établies d'abord pour une classe $\mathcal{S}$ de bonnes fonctions (pour lesquelles tous les calculs formels que l'on peut faire sont légitimes) et prolongées ensuite par un argument de densité. Dans la première partie, le rôle de $\mathcal{S}$ était tenu par les polynômes. Ici, pour ne pas obscurcir les idées essentielles de la méthode par des complications techniques, nous avons pris le parti de rejeter celles-ci à la fin de l'article, en signalant par une marque ▌ chaque place où un calcul formel demande à être justifié. Provisoirement, le lecteur admettra que $\mathcal{S}$ est une algèbre de fonctions bornées, contenue dans tout $L^p(\mu)$ tel que $1<p<\infty$, dense dans L^p pour $1<p<\infty$, stable par L et les autres opérateurs considérés. Les hypothèses précises seront discutées plus tard, au §3.

Les notations sont les mêmes que dans la première partie : (P_t) est un semi-groupe markovien sur l'espace d'états E , symétrique par rapport à la mesure μ , admettant une réalisation par de bons processus de Markov (X_t) ; sa résolvante est (U_p) , (Q_t) est le semi-groupe de Cauchy associé, les générateurs des deux semi-groupes sont L et C . Contrairement à la première partie, nous considérerons des processus qui ne sont pas des diffusions (autrement dit, le générateur n'est pas nécessairement local, les martingales ne sont pas nécessairement continues).

Le travail comprend trois paragraphes : dans le premier, on établit la partie facile des inégalités, i.e. la domination de C par $\sqrt{\Gamma}$; dans le second, les inégalités inverses. Le troisième contient des résultats et justifications d'ordre technique.

Les notations $\Gamma(f,f)$, $\Gamma_2(f,f)$ avec deux arguments égaux seront parfois abrégées en $\Gamma(f)$, $\Gamma_2(f)$ par raison d'économie.

§ 1 . LA CONDITION $\Gamma_2 \geqq 0$. DOMINATION DE C PAR $\sqrt{\Gamma}$

La proposition 1 de la première partie suggère d'étudier les semi-groupe (P_t) pour lesquelles l'application bilinéaire

(1) $$2\Gamma_2(f,g) = L\Gamma(f,g) - \Gamma(f,Lg) - \Gamma(Lf,g) \quad \text{sur } \mathcal{D}\times\mathcal{D}$$

est positive. Lorsque f,g sont des éléments de $\mathcal{D}$, nous considérons $\Gamma(f,g)$, $\Gamma_2(f,g)$ comme des éléments de $\mathcal{D}$, i.e. des fonctions partout définies et non des classes, et la positivité doit avoir lieu partout.

EXEMPLES ET REMARQUES. a) La première partie a fourni des exemples de semi-groupes sur $[-1,1]$ satisfaisant à cette condition ; $\mathcal{D}$ était dans ce cas l'algèbre des polynômes. Un autre exemple est celui du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}^n$, étudié par Meyer (on peut alors prendre pour $\mathcal{D}$ l'espace S de Schwartz). On prendra garde que notre Γ_2 n'est pas le même que celui de Meyer [8], qui n'est pas « intrinsèque » (celui-ci est une somme de carrés, et le nôtre, qui est plus grand, est positif a fortiori).

b) Dans cet exemple-ci, nous resterons très formels : nous prendrons $E=\mathbb{R}^n$, et L sera une extension convenable de l'opérateur $\frac{1}{2}\Delta f + \nabla p\cdot\nabla f$ où p est assez régulière ; la mesure invariante symétrique pour le semi-groupe correspondant est $\mu(dx)=e^{2p(x)}dx$, et l'on a

$$\Gamma(f) = \tfrac{1}{2}\Sigma_{ij}\,(D_{ij}f)^2 - \Sigma_{ij}\, D_{ij}p\, D_i f\, D_j f$$

La positivité de Γ_2 est réalisée si et seulement si p est concave, autrement dit si la mesure μ a une densité logconcave.

c) Il arrive fréquemment que l'on ait une expression de Γ

(2) $$\Gamma(f,g) = \Sigma_n H_n f\, H_n g \qquad (f,g \in \mathcal{D})$$

où les H_n sont des opérateurs linéaires de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$, la somme étant ou finie (diffusions usuelles) ou convenablement convergente (cas des semi-groupes de convolution sur $\mathbb{R}^n$: Meyer [5], p. 178) . Il est alors facile de calculer Γ_2 sur $\mathcal{D}$

$$2\Gamma_2(f,g) = 2\Sigma_n H_n^2 f\, H_n^2 g + \Sigma_n([L,H_n]f\, H_n g + H_n f\, [L,H_n]g)$$

En particulier, si les H_n <u>commutent</u> avec L , Γ_2 a la même forme que Γ , H_n étant remplacé par H_n^2 , et tous les << gradients itérés >> que l'on peut construire par la formule

(3) $$2\Gamma_{n+1}(f,g) = L\Gamma_n(f,g) - \Gamma_n(f,Lg) - \Gamma_n(Lf,g)$$

ont la même forme, et sont positifs. Cette situation a été vue dans le cas de la convolution (Meyer [5]) et dans celui des laplaciens de groupes de Lie compacts et de sphères (notre travail [1]).

d) On a $\int\Gamma_2(f)d\mu = -\int\Gamma(f,Lf)d\mu = \int(Lf)^2 d\mu$, qui est <u>toujours</u> $\geqq 0$.

FORMES INTEGRALES DE LA CONDITION $\Gamma_2 \geqq 0$.

Comme dans la proposition 1 de la première partie, la condition $\Gamma_2 \geqq 0$ va entraîner que, pour $f\in\mathcal{D}$

(4) $$\Gamma(P_t f) \leqq P_t\Gamma(f) \qquad , \qquad \Gamma(Q_t f) \leqq Q_t\Gamma(f)$$

inégalités qui seront assez faciles à étendre hors de $\mathcal{D}$ ensuite. Notre justification ici sera formelle. La seconde inégalité se ramène à la première en rappelant que $Q_t f = \int \mu_t(ds)P_s f$ (noyaux stables d'ordre 1/2 sur $\mathbb{R}_+$: voir la première partie). Pour la première, on pose $g_s = P_s\Gamma(P_{t-s}f)$, alors $g_s' = P_s L\Gamma(P_{t-s}f) - 2P_s\Gamma(P_{t-s}f, LP_{t-s}f) = P_s\Gamma_2(P_{t-s}f) \geqq 0$, donc $\Gamma(P_t f) = g_0 \leqq g_t = P_t\Gamma(f)$. Inversement, d'ailleurs, si (4) a lieu on a $\Gamma_2(f) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(P_t\Gamma(f) - \Gamma(P_t f)) \geqq 0$. Les formes intégrales (4) sont donc équivalentes à la forme différentielle (1) de l'inégalité.

Les inégalités (4), surtout la seconde, nous diront qu'un certain processus (Z_t) est une sousmartingale positive . En fait, dans beaucoup de cas on aura le résultat bien meilleur que le processus $(\sqrt{Z_t})$ est une sousmartingale positive (en analyse classique, non seulement le carré du gradient d'une fonction harmonique est sous-harmonique, mais la norme du gradient l'est). Cela correspond à des inégalités de la forme

(5) $$\sqrt{\Gamma(P_t f)} \leqq P_t(\sqrt{\Gamma(f)}) \quad , \quad \sqrt{\Gamma(Q_t f)} \leqq Q_t(\sqrt{\Gamma(f)})$$

Ces inégalités sont satisfaites chaque fois que l'on a comme en (2) $\Gamma(f) = \Sigma_n (H_n f)^2$, avec $P_t H_n = H_n P_t$, ou plus généralement $|H_n P_t f| \leqq |P_t H_n f|$ (cas des processus d'Ornstein-Uhlenbeck). Plus généralement, on a alors pour tout $\varepsilon>0$

(5') $\qquad \sqrt{\varepsilon+\Gamma(P_t f)} \leqq P_t(\sqrt{\varepsilon+\Gamma(f)})$, (resp. Q_t) ,

qui est un peu plus facile à vérifier, la fonction $\sqrt{\varepsilon+.}$ n'ayant pas de singularité en 0 .

La forme infinitésimale des relations (5') s'obtient en écrivant que $\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(\sqrt{\varepsilon+\Gamma(P_t f)}-P_t(\sqrt{\varepsilon+\Gamma(f)}))\leqq 0$. Posons $u = \Gamma(f)+\varepsilon$. Nous avons

$$\frac{d}{dt}\sqrt{\varepsilon+\Gamma(P_t f)}\,\Big|_{t=0} = \frac{\frac{d}{dt}\Gamma(P_t f)|_{t=0}}{2\sqrt{u}} = \frac{2\Gamma(f,Lf)}{2\sqrt{u}}$$

D'autre part, <u>si</u> (P_t) <u>est un semi-groupe de diffusion</u>, nous pouvons écrire la « formule d'Ito »

$$L(\sqrt{u}\ ) = \frac{Lu}{2\sqrt{u}} - \frac{\Gamma(u)}{4u\sqrt{u}}$$

d'où l'inégalité (qui ne contient plus ε)

(6) $\qquad 4\Gamma_2(f)\Gamma(f) \geqq \Gamma(\Gamma(f))$ $\qquad$ ($f\in\mathcal{D}$; diffusions).

Inversement, on peut voir en considérant $g_s = P_s\sqrt{\varepsilon+\Gamma(P_{t-s}f)}$ et en calculant g'_s que (pour les diffusions) (6) entraîne (5') pour tout $\varepsilon\geqq 0$.

<u>Dans le cas des diffusions</u>, on a un résultat assez intéressant :

PROPOSITION 1. <u>La condition</u> $\Gamma_2\geqq 0$ <u>entraîne</u> (6), <u>et donc</u> (5').

<u>Démonstration</u>. Soient f_1,f_2 deux éléments de $\mathcal{D}$, P un polynôme sur $\mathbb{R}^2$. Nous allons calculer $\Gamma_2(P(f_1,f_2))$. Nous allons adopter des notations abrégées

$$X_i = \frac{\partial P}{\partial x_i}(f_1,f_2)\ ;\ X_{ij} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^i \partial x^j}(f_1,f_2) \quad (i=1,2)$$

$$(f,g)=\Gamma(f,g)\ ;\ \mathfrak{r}(f,g,h)= (g,(f,h))+(h,(f,g))-(f,(g,h))$$

(noter l'analogie avec les symboles de Christoffel de la géométrie riemannienne). On part de la « formule d'Ito » des diffusions

$$LP(f_1,f_2) = X_1 Lf_1 + X_2 Lf_2 + \Sigma_{ij} X_{ij}(f_i,f_j)$$

et $\qquad (P(f_1,f_2),g) = X_1(f_1,g) + X_2(f_2,g)$

On obtient alors

$$\Gamma_2(P(f_1,f_2),h) = X_1\Gamma_2(f_1,h) + X_2\Gamma_2(f_2,h) + \Sigma_{ij} X_{ij}(h,f_i,f_j)$$

et d'autre part

$$(P(f_1,f_2),h,k) = X_1(f_1,h,k) + X_2(f_2,h,k) + \Sigma_{ij} X_{ij}(f_i,h)(f_j,k)$$

Finalement, en développant $\Gamma_2(P(f_1,f_2),P(f_1,f_2))$, on obtient une forme quadratique en les variables $X_1,X_2,X_{11},X_{12},X_{22}$ dont la matrice est (en écrivant f,g au lieu de f_1,f_2 pour des raisons d'encombrement)

$$M = \left|\begin{array}{ccccc} \Gamma_2(f,f) & \Gamma_2(f,g) & (f,f,f) & 2(f,f,g) & (f,g,g) \\ & \Gamma_2(g,g) & (g,f,f) & 2(g,g,f) & (g,g,g) \\ & & (f,f)^2 & 2(f,f)(g,g) & (f,g)^2 \\ & & & 2(f,g)^2+2(f,f)(g,g) & 2(g,g)(f,g) \\ & \text{SYMETRIE} & & & (g,g)^2 \end{array}\right|$$

En tout point, les valeurs X_i, X_{ij} peuvent être choisies arbitrairement : la positivité de Γ_2 en tout point entraîne celle de M. Donc

- En faisant $X_2=X_{12}=X_{22}=0$

a) $$(f,f)^2\Gamma_2(f,f) \geqq (f,f,f)^2 = \tfrac{1}{4}(f,(f,f))^2 .$$

- En faisant $X_2=X_{11}=X_{22}=0$,

b) $$2\Gamma_2(f)((f,g)^2+(f,f)(g,g)) \geqq (g,(f,f))^2$$

Ecrivant b) pour $g=(f,f)$, on obtient en posant $(g,g)=U$, $V=2(f,f)\Gamma_2(f)$

$$(g,g)^2 \leqq 2\Gamma_2(f)[(f,g)^2+(f,f)(g,g)] \qquad U^2 \leqq 2\Gamma_2(f)(f,g)^2+UV$$

Appliquant a), on a $(f,g)^2=(f,(f,f))^2 \leqq 4(f,f)^2\Gamma_2(f)$, donc $U^2 \leqq 2V^2+UV$ ou $(U+V)(2V-U)\geqq 0$; comme U et V sont positifs, on a $U \leqq 2V$, le résultat cherché.

DOMINATION DE C PAR $\sqrt{\Gamma}$

Nous arrivons à la première inégalité importante. Comme dans tout ce travail, nous supposons que $\Gamma_2 \geqq 0$ sur $\mathcal{D}$.

THEOREME 2. <u>Supposons que</u> (P_t) <u>soit un semi-groupe de diffusion. Alors on a</u>

(7) $$\|Cf\|_p \leqq c_p \|\sqrt{\Gamma(f)}\|_p \qquad (1<p<\infty , f\in\mathcal{D})$$

<u>les</u> c_p <u>ne dépendant pas du semi-groupe considéré</u>.

<u>Démonstration</u>. Nous reprenons les notations probabilistes de la première partie : (X_t) pour le processus de Markov associé à (P_t), (B_t) pour le mouvement brownien, (Y_t) pour le couple (X_t,B_t), (Y_t^T) pour le même arrêté à la rencontre de $E\times\{0\}$, etc. Nous posons

$$\varphi(\cdot,t) = \Gamma(Q_tf) , \quad Z_t=\varphi(Y_t^T)$$

Nous avons

$$D_t\Gamma(Q_tf,Q_tf) = 2\Gamma(Q_tf,D_tQ_tf) = 2\Gamma(Q_tf,Q_tCf) \qquad \text{puis}$$

$$D_t^2\Gamma(Q_tf,Q_tf) = 2\Gamma(Q_tf,Q_tC^2f) + 2\Gamma(Q_tCf,Q_tCf)$$

Comme $C^2=-L$ on a

(8) $$(D_t^2+L_x)\varphi(\cdot,t) = 2\Gamma_2(Q_tf) + 2\Gamma(Q_tCf) \geqq 2\Gamma(Q_tCf) \geqq 0 .$$

Comme on a $\Gamma(Q_tf) \leqq Q_t\Gamma(f)$ d'après (4), le processus (Z_t) est borné, et la positivité de (8) entraîne aisément que c'est une sous-martingale . Ecrivons la décomposition de Z_t sous la forme $Z_0+M_t+A_t$, et posons $g=Cf$; le processus croissant associé à la partie verticale $M^{\uparrow}(g)$ de la martingale $M(g)$ est $2\int_C^{t\wedge\tau} \Gamma(Q_\cdot g)\circ Y_s ds$ (première partie, formule (7)). L'inégalité (8) nous dit donc que

$$A_t \geqq < M^{\uparrow}(g),M^{\uparrow}(g) >_t$$

Or d'après l'inégalité (11) de la première partie, nous avons pour $1<p<\infty$

$$(9) \qquad \|g\|_p \leqq c_p(\|Q_a g\|_p + \|< M^{\uparrow}(g),M^{\uparrow}(g) >_\infty^{1/2}\|_p)$$

Lorsqu'on fera tendre a vers l'infini, $g=Cf$ n'ayant pas de partie invariante, le premier terme disparaîtra. Reste à majorer le second, ce qui revient à majorer la norme dans L^p de $A_\infty^{1/2}$. Revenons à la décomposition $Z_t=Z_0+M_t+A_t$; comme la sousmartingale Z est bornée, M est une vraie martingale, et l'on peut écrire pour tout couple de temps d'arrêt bornés S,T avec $S\leqq T$

$$E[A_T-A_S] = E[Z_T-Z_S] \leqq E[Z_T^* I_{\{S<T\}}]$$

et donc, d'après le lemme de Lenglart-Lepingle-Pratelli comme dans la première partie

$$E[A_\infty^q] \leqq c_q E[Z_\infty^{*q}] \quad \text{pour} \quad 0<q<\infty \ .$$

Maintenant, nous utilisons la proposition 1 pour établir que $Z^{1/2}$ <u>est une sousmartingale</u> : cela résulte du calcul suivant, dans lequel on commence par introduire un $\varepsilon>0$ que l'on fera ensuite tendre vers 0 .

$$(D_t^2+L_x)(\varphi+\varepsilon)^{1/2} = \tfrac{1}{4}(\varphi+\varepsilon)^{-3/2}[2(\varphi+\varepsilon)(D_t^2+L_x)\varphi - (D_t\varphi)^2 - \Gamma(\varphi)]$$

L'expression entre crochets s'écrit

$$4\varphi\Gamma_2(Q_tf) - \Gamma(\varphi) + 4\varphi\Gamma(Q_tCf) - (D_t\varphi)^2$$

et comme $D_t\varphi = -2\Gamma(Q_tf,Q_tCf)$ on a

$$(D_t\varphi)^2 \leqq 4\Gamma(Q_tCf)\Gamma(Q_tf) \quad \text{(inégalité de Minkowski)}$$
$$= 4\varphi\Gamma(Q_tf) \ .$$

La positivité de la fonction considérée se ramène donc à celle de

$$4\varphi\Gamma_2(Q_tf) - \Gamma(\varphi) = 4\Gamma_2(Q_tf)\Gamma(Q_tf) - \Gamma(\Gamma(Q_tf))$$

qui est du type étudié dans la proposition 1.

Ceci étant fait, nous appliquons l'inégalité de Doob à $Z^{1/2}$

$$E[A_\infty^{p/2}] \leqq c_p E[Z_\infty^{*p/2}] \leqq c_p E[Z_\infty^{p/2}] = c_p \int\Gamma(f)^{p/2}d\mu$$

et la démonstration est achevée.

REMARQUE. Où avons nous vraiment utilisé le fait que (P_t) est une diffusion ?

Si $p>2$, nous n'avons pas besoin d'appliquer l'inégalité de Doob à $Z^{1/2}$: il suffit de l'appliquer à Z . Nous n'avons pas besoin non plus d'appliquer le lemme fin de Lenglart-Lepingle-Pratelli pour $0<q<\infty$: il suffit d'avoir $q>1$, et d'utiliser le lemme de Garsia-Neveu, qui n'exige pas la continuité de Z (et d'ailleurs fournit directement une majoration par Z_∞ et non Z^*_∞). Mais malheureusement, l'inégalité (9) n'est pas établie pour des semi-groupes qui ne sont pas des diffusions : un argument que nous ne reproduirons pas permet de l'établir pour $p\leqq 2$, mais cela justement ne nous sert à rien.

Dans les bons cas, un argument de dualité permet en fait d'établir (7) pour $p\leqq 2$ sans hypothèse de diffusion, à partir des inégalités plus difficiles du paragraphe 2 (cf. aussi Sém. Prob. XV, p. 161, formule (6)), et il est vraisemblable qu'elle a lieu pour tout $p>1$.

§ 2. DOMINATION DE $\sqrt{\Gamma}$ PAR C .

La méthode utilisée dans ce paragraphe étant beaucoup plus compliquée que celle du paragraphe précédent, il est encore plus important de séparer les idées, et les justifications techniques (signalées par un ▌). En particulier, les innombrables intégrations par parties seront traitées de manière formelle dans ce paragraphe. De même, la méthode de Littlewood-Paley repose sur des évaluations faites sur le « mouvement brownien venant de l'infini » : on fait un calcul sous la mesure initiale $\mu\otimes\varepsilon_a$ avec a très grand (espérance notée E_a) , et on fait tendre ensuite a vers l'infini. Dans ce paragraphe, il nous arrivera parfois de désigner directement cette limite par E_∞ , et de lui faire subir certaines manipulations formelles, justifiées au §3 .

Nous commençons par le calcul d'un certain nombre d'espérances et d'espérances conditionnelles indispensables.

CALCULS ELEMENTAIRES SUR LE MOUVEMENT BROWNIEN

Toute la théorie de Littlewood-Paley probabiliste repose sur le résultat élémentaire, concernant un mouvement brownien de processus croissant $2t$ et tué en 0

$$E^a\left[\int_0^\tau f(B_s)ds \right] = \int_0^\infty s\wedge a f(s)ds = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(s)ds \int_{|a-s|}^{a+s} dt$$

Dans cette section, nous allons noter diverses formules plus précises, qui nous serviront plus tard. Puis nous les étendrons à $E\times\mathbb{R}_+$, et en déduirons divers calculs d'espérances conditionnelles.

La formule précédente donne le potentiel de Green de la demi-droite positive. Notons la formule donnant le λ-potentiel de Green. On peut la considérer comme classique aussi :

$$(10)\qquad E^a\Big[\int_0^T e^{-\lambda s} f(B_s)ds\Big] = \int_0^\infty \frac{Sh\sqrt{\lambda}(a\wedge s)}{\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda}(a\vee s)} f(s)ds$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty f(s)ds \int_{|a-s|}^{a+s} e^{-t\sqrt{\lambda}}dt$$

On en déduit une formule donnant le potentiel de Green dans l'espace-temps. Rappelons que le semi-groupe stable d'ordre 1/2 sur $\mathbb{R}^+$ est caractérisé par sa transformée de Laplace $\int \mu_t(dr)e^{-\lambda r} = e^{-t\sqrt{\lambda}}$.
Alors

$$(11)\qquad E^a\Big[\int_0^T f(r,B_r)dr\Big] = \frac{1}{2}\int_0^\infty ds \int_{|a-s|}^{a+s} dt \int_0^\infty \mu_t(dr)f(r,s)$$

La formule (10) nous donne cela lorsque $f(s,B_s)=e^{-\lambda s}f(B_s)$, et l'on passe au cas général par classes monotones. On a aussi une interprétation probabiliste directe de (11) : soit $L^s_\cdot$ le temps local de (B_t) au point s ; compte tenu de $\langle B,B\rangle_t=2t$, $L^\cdot_r$ est la demi-densité d'occupation de la trajectoire brownienne jusqu'à l'instant r (voir par ex. Azéma-Yor, Temps locaux, Astérisque 52-53, p. 13). Donc la formule (11) résultera de la formule plus précise

$$(12)\qquad E^a\Big[\int_0^T f(r)dL^s_r\Big] = \int_{|a-s|}^{a+s} dt \int_0^\infty \mu_t(dr)f(r)$$

qu'il suffit aussi de vérifier lorsque $f(r)=e^{-\lambda r}$, où elle est à peu près classique en théorie du temps local.

Avant de quitter le mouvement brownien tué, notons une formule qui servira en un autre endroit : soit $m>a$, et soit σ_m le temps de sortie du mouvement brownien de l'intervalle $[0,m]$. Alors on a

$$(13)\qquad E^a\Big[\int_0^{\sigma_m} f(B_s)ds\Big] = \int_0^\infty (s\wedge a-\tfrac{a}{m}s\wedge m)f(s)ds \quad .$$

APPLICATION A $E\times\mathbb{R}_+$

Nous allons appliquer ces formules pour le calcul d'espérances et d'espérances conditionnelles. Tout d'abord, on a un calcul explicite de la fonction de Green du semi-groupe produit dans $E\times\mathbb{R}_+$

$$(14)\qquad E^{x,a}\Big[\int_0^T f(X_r,B_r)dr\Big] = \frac{1}{2}\int_0^\infty ds \int_{|a-s|}^{a+s} Q_t(x,f_s)dt$$

qui s'obtient en remarquant que $P^{x,a}$ est une mesure produit sur $\Omega_X\times\Omega_B$. On intègre d'abord sur Ω_X , ce qui fait apparaître l'intermédiaire

$$E^a\Big[\int_0^T g(r,B_r)dr\Big] \quad \text{avec} \quad g(r,s) = \int P_r(x,dy)f(y,s)$$

Après quoi on a $\int \mu_t(dr)g(r,s)=Q_t(x,f_s)$, et on applique (11). Il est peut être intéressant aussi de donner la formule correspondant à (12)

$$E^{x,a}\Big[\int_0^T f(X_r)dL^s_r\Big] = \frac{1}{2}\int_{|a-s|}^{a+s} Q_t(x,f)dt \quad .$$

Nous déduisons de (14) le lemme suivant :

LEMME 3. <u>Soit</u> $\eta(x,t)$ <u>une fonction telle que</u> $(1+t^2)|\eta(x,t)|\leqq C$. <u>Soit</u>

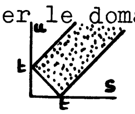
(15) $$K\eta(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^\infty ds \int_{|t-s|}^{t+s} Q_u(x,\eta_s)du$$

<u>Alors on a</u> $|K\eta(x,t)|\leqq C(1+t^2)$ <u>et le processus</u>

(15_a) $$N_t(\eta) = K\eta(Y_t^\tau) + \int_0^{t\wedge\tau}\eta(Y_s)ds = E[\int_0^\tau \eta(Y_s)ds|\mathcal{F}_t]$$

<u>est, sous toute loi</u> $P^{x,a}$, <u>une martingale uniformément intégrable, dont la projection sur le mouvement brownien</u> (B_t) <u>est</u>

(15_b) $$N_t^{\to}(\eta) = \int_0^{t\wedge\tau} K'\eta(Y_s)dB_s \ ,$$
$$K'\eta(.,t)= \frac{1}{2}[\int_0^\infty Q_{t+s}\eta_s ds + \int_t^\infty Q_{s-t}\eta_s ds - \int_0^t Q_{t-s}\eta_s ds]$$

<u>Démonstration</u>. Comme η est majorée par une fonction de t seulement, majorer $K\eta$ revient à majorer $\int_0^\infty C(1+s^2)^{-1}s\wedge t\, ds$, ce qui n'est pas trop difficile. On peut supposer $\eta\geqq 0$, de sorte que $K\eta$ est une fonction excessive, $K\eta(Y_t^\tau)$ une surmartingale positive dont (15_a) donne la décomposition. Evaluer la norme H^p de (N_t) revient à évaluer la norme L^p de $\sup_{t\leq\tau} K\eta(Y_t)$, i.e. celle de $(1+B_\tau^{*2})^p$, ou finalement de $<B,B>_\tau^p$ ou τ^p : ceci vaut $+\infty$ pour p=2, est fini entre 1 et 2. Pour obtenir (15_b), il suffit de se représenter le domaine d'intégration pour (15) en (s,u), et de faire varier t :  . Cela donne $K'(.,t)$, et le calcul de la projection est alors classique (Sém. X, p. 156).

CALCUL D'ESPERANCES CONDITIONNELLES

Le but est maintenant de calculer explicitement quatre espérances conditionnelles connaissant $X_\tau=x$: ce sont naturellement des fonctions de x , qui jouent le rôle de fonctions de Littlewood-Paley (ou plutôt de leur carré) dans les calculs qui suivent. Ces formules seront notées (A),(B),(C),(D), et deviendront le point de départ des calculs ultérieurs.

Pour alléger les notations, ici et dans toute la suite, nous adopteront les conventions suivantes :

a) Q_t' , Q_t'' désignent les noyaux (signés bornés) $CQ_t= C^2Q_t=-LQ_t$ pour $t>0$.

b) Les lettres <u>latines</u> f,g,h... désignent de << bonnes >> fonctions sur E, et <u>aussi</u> leur prolongement harmonique f(x,t)... ; f' est la fonction $f'(.,t)=f_t'(.)=Q_t'f$ et de même f" (si f est dans le domaine de C ou L, ces fonctions se prolongeront jusqu'à t=0).

c) Les fonctions sur $E\times\mathbb{R}_+$ qui ne sont pas données comme prolongement harmoniques sont désignées par des lettres <u>grecques</u> .

Voici les premières espérances conditionnelles : elles sont classiques en théorie de Littlewood-Paley :

LEMME 4. Soit f une bonne fonction sur E . On a

(A) $\quad E_a[\langle M^{\to}(f),M^{\to}(f)\rangle_T | X_T=\cdot] \quad = 2\int_0^\infty s\wedge a\ Q_s(f_s'^2)\,ds$

(B) $\quad E_a[\langle M^{\uparrow}(f),M^{\uparrow}(f)\rangle_T | X_T=\cdot] \quad = 2\int_0^\infty s\wedge a\ Q_s\Gamma(f_s)\,ds$

(C) $\quad E_a[\int_0^T M_s(f)dM_s^{\to}(f)\ | X_T=\cdot] \quad = 2\int_0^\infty s\wedge a\ Q_s'(f_sf_s')\,ds$

Démonstration. Pour (A) et (B), on sait que $\langle M^{\to}(f),M^{\to}(f)\rangle_T$ et l'analogue en (B) sont de la forme $\int_0^T \eta(Y_s)ds$, avec $\eta_t=2f_t'^2$ dans le premier cas, $\eta_t=2\Gamma(f_t)$ dans le second . On applique alors la formule fondamentale de la théorie de Littlewood-Paley probabiliste

(16) $\quad E_a[\int_0^T \eta(Y_s)ds\ |X_T=\cdot] = 2\int_0^\infty s\wedge a\ Q_s(\eta_s)\,ds$

(Sém. Prob. X, p. 131, formule (17)). Il n'y a aucune vérification d'intégrabilité à faire, puisque tout est positif.

Pour (C), il faut faire plus attention. Nous supposerons par exemple que f est dans L^1 et L^∞ (donc dans tout L^p). Il n'y a alors aucune difficulté du côté gauche. Du côté droit, il y a une vérification d'intégrabilité absolue à faire, que nous renverrons en appendice comme toutes les autres vérifications de ce genre. Désignant alors par C(.) la fonction du côté droit, il nous suffit de prouver que l'on a pour toute fonction g sur E, elle aussi dans $L^1\cap L^\infty$, on a

$$E_a[g(X_T)\int_0^T M_s(f)dM_s^{\to}(f)] = \int g(x)C(x)\mu(dx) = 2\int_0^\infty s\wedge a\ \langle g,Q_s'(f_sf_s')\rangle_\mu\,ds$$

Or $\langle g,Q_s'(f_sf_s')\rangle = \langle Q_s'g\ ,f_sf_s'\rangle = \int g_s'f_sf_s'\,d\mu$. D'autre part, le premier membre vaut

$$E_a[\ \langle M(g),M(f)\cdot M^{\to}(f)\rangle_\infty] = E_a[\ \langle M^{\to}(g),M(f)\cdot M^{\to}(f)\rangle_\infty] =$$

$$E_a[\ \int_0^\infty M_s(f)d\langle M^{\to}(f),M^{\to}(g)\rangle_s] = E_a[2\int_0^T f(Y_s)f'(Y_s)g'(Y_s)ds\ ] =$$

$$2\int_0^\infty s\wedge a\ \mu(g_sf_sf_s')\,ds\ .$$

C'est bien la même chose .

Le calcul suivant est plus compliqué, aussi n'énonçons nous que le résultat limite ($a\to\infty$) . Le résultat complet figure en (17).

LEMME 5. On a

(D) $\quad E_\infty[\int_0^T M_s^{\to}(f)dM_s^{\to}(f)|X_T=\ \cdot\ ] = \int_0^\infty (sQ_s'(f_sf_s')+s^2Q_s'(f_s'^2))ds$

Démonstration. Comme plus haut pour (C), il y aura une vérification à faire sur le côté droit, que nous rejetons en appendice. Cela mis à part, tout revient à calculer $E_a[g(X_T)\int_0^T M_s^{\to}(f)dM_s^{\to}(f)]$, g étant une fonction comme ci-dessus.

Comme $g(X_\tau)=M_\tau(g)$, on peut remplacer le produit par un crochet $<M(g),\vec{M}(f)\cdot d\vec{M}(f)>_\tau$, et comme la seconde martingale est horizontale, remplacer $M(g)$ par $\vec{M}(g)$. On notera qu'il n'y a aucune difficulté d'intégrabilité (f,g appartenant à tous les L^p par hypothèse). On écrit ce crochet $\int_0^\tau \vec{M}_s(f)d<\vec{M}(f),\vec{M}(g)>_s$. Or on a, d'après une transformation classique (Dellacherie-Meyer, Probabilités et Potentiel B, VI.57, (57.1)), en posant $A_t=<\vec{M}(f),\vec{M}(g)>_t = 2\int_0^{t\wedge\tau}\eta(Y_s)ds$, $\eta=f'g'$

$$E_a[\int_0^\tau M_s(f)dA_s] = E_a[\vec{M}_\tau(f)A_\tau] = E_a[<\vec{M}(f),N>_\tau]$$

où $N_\bullet$ est la martingale $E[A_\tau|\mathcal{F}_\bullet]$. Celle-ci a été calculée dans le lemme 3, ainsi que le crochet correspondant, et il nous reste

$$E_a[g(X_\tau)\int_0^\tau \vec{M}_s(f)d\vec{M}_s(f)] = E_a[\int_0^\tau 2f'(Y_t)K'(2\eta)(Y_t)dt]$$

Nous allons faire un calcul d'abord formel, que nous justifierons par la suite . Nous posons $s\wedge a=\alpha(s)=\beta'(s)$, où β est **nulle** en 0 . La dernière intégrale vaut (en recopiant (15_b) de façon plus concise)

$$4\int_0^\infty t\wedge a <f'_t,K'(\eta)_t>dt \ , \quad K'(\eta)_t = \frac{1}{2}\int_0^\infty[Q_{t+s}+\mathrm{sgn}(s-t)Q_{|s-t|}]\eta_s ds$$

Nous utilisons la symétrie des Q_r pour les faire passer sur f'_t . Reste donc

$$2\int \alpha(t)< \eta_s,[Q_{t+s}- \mathrm{sgn}(t-s)Q_{|s-t|}]f'_t > dsdt$$

Nous remarquons que $Q_rf'_t=f'_{r+t}$. Reste donc en face de η_s dans le crochet

$$2\int_0^\infty \alpha(t)[f'_{s+2t} - I_{\{t\geq s\}}f'_{2t-s} + I_{\{t<s\}}f'_s]\ dt$$

Le dernier terme vaut simplement $2\beta(s)f'_s$. Dans le second, nous remplaçons t par $s+t$, donc f'_{2t-s} par f'_{2t+s} , et il nous reste

$$2\int_0^\infty f'_{s+2t}[\alpha(t)-\alpha(s+t)]dt = \int_s^\infty f'_t[\alpha(\tfrac{t-s}{2})-\alpha(\tfrac{t+s}{2})]dt$$

Remarquons que α est constante au voisinage de l'infini, donc le crochet est nul : on peut intégrer par parties et il reste en tout

$$(17)\quad E_a[g(X_\tau)\int_0^\infty \vec{M}_s d\vec{M}_s] = \int_0^\infty < f'_sg'_s ,H^a_s > ds$$

$$H^a_s= 2\beta(s)f'_s + \alpha(s)f(s)+\frac{1}{2}\int_s^\infty [\alpha'(\tfrac{t+s}{2})-\alpha'(\tfrac{t-s}{2})]f(t)dt$$

En particulier, si l'on fait tendre a vers $+\infty$, $\alpha(s)=s$, $2\beta(s)=s^2$, le dernier terme tend vers 0, et il reste

$$\int^\infty < f'_sg'_s \ , \ sf_s+s^2f'_s >ds = < g, \int_0^\infty Q'_s(sf_sf'_s+s^2f'^2_s)ds >$$

d'où la formule annoncée en (D).

Contrairement à notre habitude, nous ne donnerons pas en appendice tous les détails (cf. la remarque après le lemme 6). Mais nous voudrions expliquer tout de suite la raison des notations $\alpha(s)$, $\beta(s)$ dans le calcul précédent : il est commode de remplacer dans la dernière partie de la démonstration $E_a[\int_0^T f'(Y_t)K'\eta(Y_t)dt]$ par une intégrale étendue à $[0,\sigma_m]$, le temps de sortie de $[0,m]$, et de faire tendre ensuite m vers l'infini. Dans ces conditions, le principe du calcul reste le même, simplement la fonction $\alpha(s)$ est remplacée par la fonction $s\wedge a-\frac{a}{m}s\wedge m$ de (13), et il est inutile de le modifier.

Dans l'énoncé suivant, seules les inégalités de la première colonne sont vraiment importantes, mais les autres apparaissent comme intermédiaires dans la démonstration, et la structure du théorème se comprend mieux si on les énonce explicitement. On remarquera que ce sont toutes des inégalités « horizontales », qui ne devraient pas exiger l'utilisation de l'opérateur « vertical » Γ : la remarque suivant la démonstration montre qu'un tel raisonnement est possible.

LEMME 6. Soit f une « bonne » fonction, et soit $p>2$. Alors chacune des fonctions suivantes sur E est bien définie, et a une norme dans $L^{p/2}$ majorée par $c_p\|f\|_p^2$:

$$\begin{array}{lll}
a_1(f) = \int_0^\infty -Q_s(f_sf'_s)ds^{(1)} & a_5(f) = \int Q'_s(f^2)ds & \\
a_2(f) = \int sQ_s(f'^2_s)ds & a_6(f) = \int sQ'_s(f_sf'_s)ds & a_8(f) = \int sQ''_s(f^2)ds \\
a_3(f) = \int sQ_s(f_sf''_s)ds & a_7(f) = \int s^2Q'_s(f'^2_s)ds & \\
a_4(f) = \int -s^2Q_s(f'_sf''_s)ds & &
\end{array}$$

Démonstration. On remarquera d'abord la forme générale $s^kQ^{(\ell)}(f^{(m)}f^{(n)})$ avec $m+n+\ell=k+1$. Le numérotage est parfaitement arbitraire.

L'expression « bonne » fonction ne représente pas simplement une condition de taille sur f : il faut que f soit « sans partie invariante » en un sens assez fort pour que ces intégrales convergent absolument (par exemple, que f soit de la forme Cg : détails au § 3).

Pour abréger la notation, on dira que deux fonctions u,v dépendant de f sont équivalentes ($u\approx v$) si $\|u-v\|_{p/2} \leqq c_p\|f\|_p^2$. Avec ce langage, le lemme 4, le lemme 5 et les inégalités classiques de théorie des martingales nous donnent le point de départ

$$a_2\approx 0 \text{ (cf.(A))}, \quad a_6\approx 0 \text{ (cf.(C))}, \quad a_6+a_7\approx 0 \text{ (cf.(D))}$$

D'autre part, la condition (B) $\int sQ_s\Gamma(f_s)\approx 0$ s'écrit aussi $\int -sQ''_s(f^2_s)$ + $2\int sQ_s(f_sf''_s)ds \approx 0$, d'où $a_8\approx a_3$. Cela suffira pour tout démontrer.

Dans a_7, on écrit $Q'_s(f'^2_s)=DQ_s(f'^2_s)-2Q_s(f'_sf''_s)$ et on intègre par parties .

1. Ce signe - donne à a_1 une intégrale positive, et de même a_4.

Il vient $a_7=-2a_2-2a_3$. Comme $a_7\approx 0$, $a_2\approx 0$, on a $a_3\approx 0$. On a vu que $a_8\approx 2a_3$, donc $a_8\approx 0$.

Dans a_8 on écrit $Q''_s(f^2)=DQ'_s(f^2)-2Q'_s(f_sf'_s)$ et on intègre par parties. Il vient $a_8=-a_5-2a_6$, donc $a_5\approx 0$.

Dans a_5 on écrit $Q'_s(f_s^2)=DQ_s(f_s^2)-2Q_s(f_sf'_s)$, d'où $a_5=a_1$ et $a_1\approx 0$.

Dans a_2 on écrit $2sds=d(s^2)$, d'où $2a_2=-a_7+2a_4$ et $a_4\approx 0$.

REMARQUE. L'une des inégalités de Littlewood-Paley-Stein affirme que

$$\int s^3 f''^2_s ds \approx 0$$

et il n'est pas difficile d'en déduire que

$$a_9=\int s^3 Q_s(f''^2_s)ds \approx 0 .$$

Nous ne connaissons pas de démonstration probabiliste de ce résultat. Voici comment on peut l'utiliser au lieu de l'estimation (D), assez pénible. On écrit d'abord une inégalité de Schwarz

$$|a_4| \leqq \left(\int Q_s(f'^2)sds\right)^{1/2}\left(\int s^2Q_s(f''^2_s)sds\right)^{1/2} = \sqrt{a_2}\sqrt{a_9}$$

et comme on sait majorer $\sqrt{a_2}$ et $\sqrt{a_9}$ dans L^p, on majore a_4 dans $L^{p/2}$, autrement dit $a_4\approx 0$. La dernière intégration par parties de la démonstration précédente nous donne alors $a_7\approx 0$ connaissant le résultat pour a_4 et a_2. Enfin, la relation $a_7=-2a_2-2a_3$ nous donne que $a_3\approx 0$, et la relation $a_3=a_1-a_2-a_6$ (sachant que $a_6\approx 0$: cf. (C)) nous donne que $a_1\approx 0$.

On a donc retrouvé tous les résultats de la première colonne sans utiliser l'existence de Γ, ni l'estimation (D).

LES INEGALITÉS FONDAMENTALES

Nous avons introduit dans la formule (3) la famille des « gradients itérés » Γ_n, commençant par $\Gamma_0(f,g)=fg$, continuant avec $\Gamma_1=\Gamma$, $\Gamma_2\ldots$ Nous prenons maintenant les quatre fonctions de la première colonne du lemme 6, et nous remplaçons les produits (Γ_0) par un Γ_1.

(18)
$$\begin{aligned} A_1(f) &= \int_0^\infty -Q_s\Gamma(f_s,f'_s)ds \\ A_2(f) &= \int sQ_s\Gamma(f'_s)ds \\ A_3(f) &= \int sQ_s\Gamma(f_s,f''_s)ds \\ A_4(f) &= \int -s^2Q_s\Gamma(f'_s,f''_s)ds . \end{aligned}$$

Notre but va être de démontrer les propriétés suivantes, où f est une « bonne » fonction, et où p est >2 (on utilisera pour cela la condition $\Gamma_2\geqq 0$)

(19₁) $$\|A_2(f)\|_{p/2} ,\ \|A_4(f)\|_{p/2} \leqq c_p\|Cf\|_p^2$$

(19₂) $$\|A_1(f)\|_{p/2} \leqq c_p\|\sqrt{\Gamma}(f)\|_p^2$$

(19_3) $\qquad \|A_1(f)-A_2(f)-A_3(f)\|_{p/2} \leqq c_p\|Cf\|_p\|\sqrt{\Gamma}(f)\|_p$

(19_4) $\qquad 4A_1(f) \geqq \Gamma(f)$

(19_5) $\qquad (4A_1(f)-\Gamma(f))(2A_4(f)-A_2(f)) \geqq 2(A_1(f)-2A_2(f)-2A_3(f))^2$

Montrons tout de suite à quoi servent ces inégalités : nous ne parlons ici que de << bonnes >> fonctions, mais il faudra au paragraphe 3, n°11, étendre cela à toute $f\in D_p(L)$ sans partie invariante.

THEOREME 7. Si f est une bonne fonction, $p>2$, on a $\|\sqrt{\Gamma}(f)\|_p \leqq c_p\|Cf\|_p$.

Démonstration. Comme f est une bonne fonction, ces normes sont a priori finies. Il suffit donc de montrer que $\|\Gamma(f)\|_{p/2} \leqq c_p\|Cf\|_p\|\sqrt{\Gamma}(f)\|_p$

Nous partons de la formule

$$A_1-2A_2-2A_3 = 2(A_1-A_2-A_3) - \tfrac{1}{4}(4A_1-\Gamma(f)) - \tfrac{1}{4}\Gamma(f)$$
$$\leqq 2(A_1-A_2-A_3) - \tfrac{1}{4}\Gamma(f) \quad (19_4)$$

Donc $\qquad \frac{1}{4}\Gamma(f) \leqq 2(A_1-A_2-A_3)-(A_1-2A_2-2A_3)$

Nous avons donc à majorer $\|A_1-A_2-A_3\|_{p/2}$ et $\|A_1-2A_2-A_3\|_{p/2}$. Le premier est donné par (19_3) . Pour le second, nous écrivons

$$|A_1-2A_2-2A_3| \leqq c\sqrt{4A_1-\Gamma(f)}\sqrt{2A_4-A_2} \leqq c\sqrt{A_1}\sqrt{A_4} \quad (19_5)$$

Dans le dernier terme, remarquer que $\Gamma(f)$ et A_2 sont positifs : comme $4A_1-\Gamma$ l'est, $2A_4-A_2$ l'est d'après (19_5). On utilise alors Hölder

$$c_p\|A_1-2A_2-A_3\|_{p/2} \leqq c\|\sqrt{A}_1\sqrt{A}_4\|_{p/2} \leqq c\|\sqrt{A}_1\|_p\|\sqrt{A}_4\|_p$$

et il ne reste plus qu'à appliquer (19_1) et (19_2).

Il faut maintenant établir les propriétés (19_1)-(19_5). La première inégalité (19_1), en fait, a déjà été vue : en effet, majorer la norme $L^{p/2}$ de $\int sQ_s\Gamma(f'_s)ds$ en fonction de $\|Cf\|_p$ revient, en remplaçant Cf par f et en utilisant la notation du lemme 6, à vérifier que $\int sQ_s\Gamma(f_s)ds \approx 0$, ce qui était l'une des inégalités de départ (fournie par le lemme 4, (B)).

La seconde inégalité (19_1) est plus longue, mais se ramène aussi au lemme 6. Esquissons la démonstration. On écrit la définition de Γ

$$-2Q_s\Gamma(f'_s,f''_s) = Q''_s(f'_sf''_s) - Q_s(f'_sf^{iv}_s)-Q_s(f'''_s f''_s)$$

On transforme cette expression ainsi $Q''_s(f'_sf''_s)=DQ'_s(f'_sf''_s)-Q'_s(f'_sf'''_s)$ $-Q'_s(f''^2_s) = D(Q'_s(f'_sf''_s)-Q_s(f'_s,f'''_s)-Q_s(f''^2_s))+ Q_s(f''_s f'''_s)+Q_s(f'_sf^{iv}_s)+2Q_s(f'''_sf''_s)$.
Deux termes disparaissent, et il reste en intégrant par parties

$$2A_4(f) = -2\int s(Q'_s(f'_sf''_s)-Q_s(f'_s,f'''_s)-Q_s(f''^2_s))ds + 2\int s^2Q_s(f''_sf'''_s)ds$$

Dans le dernier terme on reconnaît $-2a_4(Cf)$, dans les deux précédents $2a_2(Cf)$ et $2a_3(Cf)$, et le lemme 6 majore tout cela au moyen de $\|Cf\|_p$.

Enfin, le premier terme vaut $-2a_6(Cf)$, majoré par le lemme 6 de la même manière - mais il est bon, en vue de la suite, de remarquer directement qu'il se ramène aux termes $a_i(Cf)$ $(i=1,\dots,4)$ en écrivant $Q'_s(..)=DQ_s(..)-\dots$ et en intégrant par parties. En effet, un raisonnement analogue sera présenté (ou du moins esquissé) plus loin aux niveaux supérieurs (avec des Γ_n, $n>1$) et l'on ne disposera alors que des quatre fonctions d'indice $\leqq 4$.

Pour les autres inégalités, il faut utiliser vraiment l'hypothèse $\Gamma_2 \geqq 0$, en travaillant sur des (sous)martingales convenables.

DEMONSTRATION DE (19_2) ET (19_4)

Cela va résulter de la considération de la même sousmartingale qu'au paragraphe 1 : nous posons $\varphi(.,t)=\Gamma(f_t)$, $Z_t=\varphi(Y_t^\tau)=Z_0+M_t+A_t$, avec

$$A_t = \int_0^{t\wedge\tau} h(Y_s)ds \qquad h(.,t) = 2\Gamma_2(f_t)+2\Gamma(f'_t)$$

$$E[A_\infty \,|X_\tau=.] = 2\int sQ_s(\Gamma_2(f_s)+\Gamma(f'_s))ds = H(.)$$

et les inégalités classiques sur la décomposition d'une sousmartingale (nous omettons comme d'habitude les vérifications de détail : il faut raisonner sur E_a et faire tendre a vers $+\infty$) permettent de dire que $\|\int sQ_s(\Gamma_2(f_s)+\Gamma(f'_s))ds\|_{p/2} \leqq c_p\|Z_\infty\|_{p/2} = c_p\|\sqrt{\Gamma}(f)\|_p^2$. Reste à calculer explicitement cette intégrale.

On a $2Q_s\Gamma_2(f_s) = -Q''_s\Gamma(f_s)+2Q_s\Gamma(f_s,f''_s)$ par définition de Γ_2 . On écrit ensuite

$$\begin{aligned} -Q''_s\Gamma(f_s) &= -DQ'_s\Gamma(f_s)+2Q'_s\Gamma(f_s,f'_s) \\ &= \dots\dots\dots +2DQ_s\Gamma(f_s,f'_s)-2Q_s\Gamma(f_s,f''_s)-2Q_s\Gamma(f'_s) \end{aligned}$$

Les deux derniers termes s'en vont, et il reste en intégrant par parties

$$H = \int Q'_s\Gamma(f_s)ds - 2\int Q_s\Gamma(f_s,f'_s)ds$$

On intègre le premier terme par parties : il vaut $DQ_s\Gamma(f_s)-2Q_s\Gamma(f_s,f'_s)$, et il reste simplement

$$H = -\Gamma(f) -4\int Q_s\Gamma(f_s,f'_s)ds = 4A_1(f)-\Gamma(f) .$$

Comme $H\geqq 0$, on obtient (19_4). D'autre part, on en déduit (19_1) sans aucune peine.

DEMONSTRATION DE (19_3). Nous introduisons la fonction $\psi(.,t)=\Gamma(f_t,f'_t)$ et la martingale

$$N_t = \int_0^{t\wedge\tau} \psi(Y_s)dB_s$$

Nous allons écrire une inégalité de Burkholder

$$E_a[\,|E[N_\tau|X_\tau]|^{p/2}] \leqq E_a[\,|N_\tau|^{p/2}] \leqq E_a[\langle N,N\rangle_\infty^{p/4}]$$

Il faudra faire tendre a vers $+\infty$, mais en fait nous laisserons les détails de côté . Le calcul d'une espérance conditionnelle comme nous en avons une du côté gauche a déjà été fait au lemme 4, formule (C), avec une fonction un peu différente : on a

$$E_a[g(X_\tau)\int_0^\tau \psi(Y_s)dB_s] = E_a[\int_0^\tau g'(Y_s)\psi(Y_s)ds] \qquad g'(.,s)=Q_s'g$$

$$\int s\wedge a\langle Q_s'g,\Gamma(f_s,f_s')\rangle_\mu \, ds$$

et par conséquent

$$E_\infty[N_\tau|X_\tau=.] = 2\int_0^\infty sQ_s'\Gamma(f_s,f_s')ds$$

On écrit comme d'habitude $Q_s'\Gamma(f_s,f_s')=DQ_s\Gamma(f_s,f_s')-Q_s\Gamma(f_s')-Q_s\Gamma(f_s',f_s'')$, d'où en intégrant par parties l'expression de l'espérance conditionnelle, qui est

$$2A_1 -2A_2 - 2A_3 \ ,$$

ce qu'il nous faut pour (19_3). Du côté droit, nous avons

$$\langle N,N\rangle_\tau = \int_0^\tau 2\psi^2(Y_s)ds \qquad \psi_t^2=\Gamma(f_t,f_t')^2\leqq \Gamma(f_t)\Gamma(f_t') \leqq g_t\Gamma(f_t')$$

où l'on a posé $g=\Gamma(f)$, $g_t=Q_tg$. Ainsi, on a

$$< N,N >_t \leqq (\sup_s g(Y_s^\tau))\int_0^\tau 2\Gamma(f')\circ Y_s ds$$

et l'intégrale vaut $< M^\dagger(Cf),M^\dagger(Cf) >_\tau$. Désignant par A,B ces deux facteurs, on a

$$\|\langle N,N\rangle^{1/2}\|_{p/2} \leqq \| \sqrt{A}\sqrt{B} \|_{p/2} \leqq \|\sqrt{A}\|_p\|\sqrt{B}\|_p$$
$$\leqq c_p\|\sqrt{\Gamma}(f)\|_p\|Cf\|_p$$

d'après les inégalités de Doob et de Burkholder : (19_3) est établie.

DEMONSTRATION DE (19_5). On part de l'inégalité $\Gamma(Q_tg)\leqq Q_t\Gamma(g)$, on remarque que les deux côtés sont égaux pour t=0, et on en tire que $D_t\Gamma(Q_tg)\leqq D_tQ_t\Gamma(g)$ pour t=0, ce qui donne

(20) $$C\Gamma(g,g) \geq 2\Gamma(g,Cg)$$

Nous appliquons Q_s aux deux membres, remplaçons g par $Q_sf+\lambda sQ_s'f$ (avec notre notation usuelle, $f_s+\lambda sf_s'$) et intégrons de 0 à $+\infty$. A droite, nous avons

$$2\int_0^\infty Q_s\Gamma(f_s+\lambda sf_s',f_s'+\lambda sf_s'')ds = 2[-A_1(f)+\lambda(A_2(f)+A_3(f))-\lambda^2A_4(f)]$$

A gauche, nous avons $\int Q_s'\Gamma(f_s+\lambda sf_s')ds$. On fait disparaître Q_s' en écrivant cela $DQ_s(\ldots)-2Q_s(f_s+\lambda sf_s',f_s'+\lambda f_s'+\lambda sf_s'')$. On a

$$-2\int_0^\infty Q_s\Gamma(f_s+\lambda sf_s',(1+\lambda)f_s'+\lambda sf_s'')ds = -2[-A_1(f)+\lambda(A_2(f)+A_3(f))-\lambda^2A_4(f)]$$
$$+2[\lambda A_1(f)-\lambda^2A_2(f)]$$

tandis que le premier terme vaut $-\Gamma(f,f)$. Par conséquent

$$\lambda^2(2A_4-A_2) + \lambda(A_1-2A_2-2A_3) + (2A_1-\tfrac{1}{2}\Gamma(f)) \geq 0$$

ce qui nous donne (19_5), et nous redonne (19_4), ainsi d'ailleurs que la relation $2A_4\geqq A_2$.

§ 3 . RESULTATS TECHNIQUES

Ce paragraphe justifie les passages traités rapidement dans le corps du texte (passages marqués ▌). Il est divisé en courtes sections numérotées - d'abord de nature générale, puis concernant chaque point particulier à vérifier.

Sauf mention spéciale, la lettre p désigne un exposant fini > 1. Nous désignons par $D_p(L)$, $D_p(C)$ le domaine de L ou C dans L^p.

Nous supposons que la mesure invariante μ est une <u>mesure de référence</u> pour le processus (X_t), i.e., les ensembles μ-négligeables sont les mêmes que les ensembles de potentiel nul - en particulier, une inégalité établie μ-p.p. entre fonctions finement continues a lieu partout.

1. L'ALGEBRE $\mathcal{B}$. Nous désignons par $\mathcal{B}$ une algèbre de fonctions <u>bornées</u>, contenue et <u>dense</u> dans tout L^p, <u>stable</u> par le générateur L et le semi-groupe (P_t). Puisque les éléments de $\mathcal{B}$ appartiennent au domaine de L , ce sont automatiquement des fonctions <u>finement continues</u>.

> Si le lecteur veut s'épargner l'usage de cette notion, il pourra les supposer continues sur E polonais. Il sera utile (cf. note de P.A. Meyer) de savoir qu'une intégrale $f=\int f_t\lambda(dt)$ d'une famille de fonctions finement continues, mesurable et uniformément bornée, par rapport à λ bornée, est finement continue.

Pour $f\in\mathcal{B}$, la relation $P_tf=f+\int_0^t P_sLf\,ds$ (avec $Lf\in\mathcal{B}$) a lieu partout, et montre que la fonction $(x,t)\longmapsto P_tf(x)$, uniformément bornée, finement continue en x pour t fixé, admet une dérivée en t qui possède les mêmes propriétés. Cela vaut pour les dérivées en t D^kP_tf de tous ordres.

Pour $(f,g)\in\mathcal{B}$, nous rencontrerons aussi des expressions non-linéaires telles que $\Gamma(P_uf,P_vg)$, $L\Gamma(P_uf,P_vg)$, $\Gamma(\Gamma(P_uf))$, se ramenant à l'application répétée de L et du produit sur des fonctions de la forme P_uf, $f\in\mathcal{B}$. Nous supposerons toujours que ces expressions sont <u>continues</u> en (u,v), <u>uniformément bornées</u> en (x,u,v) .

En revanche, nous ne supposerons pas que $\mathcal{B}$ soit stable par Q_t ou par C . Cela nous imposera un peu de travail supplémentaire, que le lecteur pourra s'épargner en première lecture en faisant cette hypothèse.

2. QUELQUES RAPPELS. On trouvera dans le livre de Stein [10] certaines propriétés analytiques des semi-groupes symétriques. En particulier, les propriétés suivantes nous seront utiles

- Si $f\in L^p$, la fonction $f^*=\sup_t P_t|f|$ appartient à L^p, avec une norme majorée par $c_p\|f\|_p$ (ce serait faux dans L^1).

- Si $f \in L^p$, la fonction $P_t f$ de $\mathbb{R}_+$ dans L^p est prolongeable analytiquement en une fonction holomorphe, bornée par $\|f\|_p$, dans l'angle $|\arg z| \leqq \frac{\pi}{2}(1-|1-\frac{2}{p}|)$. En particulier, une application de la formule de Cauchy permet de démontrer que $D^k P_t f$ existe au sens L^p, avec

$$\|D^k P_t f\|_p \leqq c_k t^{-k} \|f\|_p \ . \tag{3.1}$$

3. SUR L'OPERATION Γ. Nous rappelons certains points présentés dans Meyer [5]. On suppose que (P_t) admet un opérateur carré du champ.

Soit h une fonction appartenant à $D_p(L)$. Alors tout d'abord il en existe une version << précisée >>, finement continue hors d'un ensemble polaire, et alors le processus

$$\mathfrak{M}_t^h = h(X_t)-h(X_0)-\int_0^t Lh(X_s)ds$$

est une martingale pour la mesure P^μ (et aussi pour P^x pour μ-presque tout x), bornée dans L^p sur tout intervalle fini, continue à droite (continue si X est une diffusion). Si cette martingale possède un crochet oblique (c'est toujours le cas si $p \geqq 2$, ou si X est une diffusion) celui-ci est absolument continu, et l'on a

$$d\langle \mathfrak{M}^h, \mathfrak{M}^h\rangle_t = 2\Gamma(h)\circ X_s \, ds \ .$$

Le cas le plus simple est celui où $h \in D_2(L)$. Dans ce cas, on a $h^2 \in D_1(L)$, $2\Gamma(h) = L(h^2)-2hLh$, $\|\Gamma(h)\|_1 = -\langle h,Lh\rangle \leqq \|h\|_2\|Lh\|_2$, d'où il résulte que Γ <u>est une forme bilinéaire continue de</u> $D_2(L)\times D_2(L)$ dans L^1.

Le petit lemme suivant nous servira plus tard, mais peut être omis pour l'instant :

LEMME. Si $h \to 0$ dans $D_p(L)$, $p \geqq 2$, $\Gamma(h) \to 0$ en mesure. Si (P_t) est une diffusion, on a le même résultat pour $1<p<2$ aussi.

<u>Démonstration</u>. Le cas p=2 est évident. Si $p>2$, soit θ une mesure bornée majorée par μ et équivalente à μ , et soit $\eta=\int_0^1 \theta P_s ds$, également majorée par μ et équivalente à μ . Nous allons montrer que $\Gamma(h) \to 0$ dans $L^1(\eta)$, d'où l'énoncé. Pour cela, on remarque que $\mathfrak{M}_1^h \to 0$ dans $L^p(P^\mu)$, donc dans $L^p(P^\theta)$, donc dans $L^2(P^\theta)$, donc $E^\theta[\langle \mathfrak{M}^h,\mathfrak{M}^h\rangle_1] = \langle \eta,\Gamma(h)\rangle \to 0$.

Si (P_t) est une diffusion, il n'y a pas lieu de distinguer crochet droit et oblique, et les inégalités de Burkholder nous disent que $E^\mu[\langle \mathfrak{M}^h,\mathfrak{M}^h\rangle_1^{p/2}] = E^\mu[(\int_0^1 \Gamma(h)\circ X_s ds)^{p/2}] \to 0$. Si $p \leqq 2$ on peut faire entrer le p/2 sous l'intégrale, et il vient que $\langle \mu, \Gamma(h)^{p/2}\rangle \to 0$.

APPLICATION. Avec les mêmes hypothèses sur p, si $f_n \to f$ et $g_n \to g$ dans $D_p(L)$, $\Gamma(f_n,g_n) \to \Gamma(f,g)$ en mesure.

En effet, $|\Gamma(f_n,g_n)-\Gamma(f,g)| \leqq \sqrt{\Gamma(f-f_n)}\sqrt{\Gamma(g)} + \sqrt{\Gamma(g-g_n)}\sqrt{\Gamma(f_n)}$, le dernier facteur étant borné en mesure, puisque majoré par $\sqrt{\Gamma(f-f_n)}+\sqrt{\Gamma(f_n)}$.

4. DERIVABILITE DE $\Gamma(P_t f)$. Nous allons montrer que, pour $f\in\mathcal{D}$, $g\in\mathcal{D}$, $\Gamma(P_t f,P_t g)$ est <u>dérivable</u> pour $t=0$, avec pour dérivée $\Gamma(f,Lg)+\Gamma(Lf,g)$.

Comme $\mathcal{D}$ est stable pour (P_t), on en déduira que la fonction est partout dérivable à droite, avec dérivée $\Gamma(P_t f,P_t Lg)+\Gamma(P_t Lf,P_t g)$, continue et uniformément bornée : donc en fait $\Gamma(P_t f,P_t g)$ est <u>dérivable</u>. Par récurrence, on voit alors qu'elle est C^∞ , avec dérivées de tous ordres uniformément bornées.

Ecrivons une formule de Taylor avec reste intégral en 0, pour la fonction C^∞ $P_t f$

$$P_t f = f + tLf + \int_0^t (t-u)P_u F\,du \qquad (F=L^2 f \in \mathcal{D})$$

et de même pour g . Alors

$$\Gamma(P_t f,P_t g) = \Gamma(f,g) + t(\Gamma(f,Lg)+\Gamma(Lf,g)) + t^2\Gamma(Lf,Lg) +$$
$$+ \Gamma(\int_0^t (t-u)P_u F\,du,\ P_t g)+\Gamma(f+tLf,\ \int_0^t (t-u)P_u G\,du)$$

et il s'agit de démontrer que les termes de la seconde ligne sont $O(t^2)$. On remarque que $\int_0^t (t-u)P_u F\,du = P_t f-f-tLf$ appartient à $\mathcal{D}$, et que $\Gamma(\int_0^t (t-u)P_u F\,du,P_t g\ ) = \int_0^t (t-u)\Gamma(P_u F,P_t g)du$ p.p. : en effet, l'intégrale peut être interprétée au sens de $D_2(L)$, car $u\mapsto P_u F$ est continue de $\mathbb{R}_+$ dans $D_2(L)$ (continuité simple + domination dans L^2 par $F^*,(LF)^*$) et Γ est alors continu à valeurs dans L^1. Cette égalité p.p. entre fonctions finement continues a lieu partout, de même que la relation

$$|\Gamma(P_u F,P_t g)| \leqq \Gamma(P_u F)^{1/2}\Gamma(P_t g)^{1/2}$$

Le second membre étant uniformément borné, la conclusion en découle.

VARIANTE. Un résultat très voisin, utilisé pour l'étude de Γ_2 , est la dérivabilité sur $[0,t]$ de la fonction

$g_s = P_s\Gamma(P_{t-s}f)$. On écrit pour $s<t$, $s\to s_0\leqq t$

$$g_s-g_{s_0} = (P_s-P_{s_0})\Gamma(P_{t-s_0}f) + P_s(\Gamma(P_{t-s}f)-\Gamma(P_{t-s_0}f))$$

L'étude que nous avons faite va régler le terme de droite : après division par $s-s_0$, la fonction sous le P_s va converger <u>uniformément</u> vers la dérivée, et alors l'application de P_s ne créera pas de problème. A gauche, c'est encore plus facile : $\Gamma(P_{t-s_0}f)$ appartient à $\mathcal{D}$. D'où pour $0<s\leqq t$ une dérivée

$$g'_s = L\Gamma(P_{t-s}f) - P_s\Gamma(P_{t-s}f,P_{t-s}Lf)$$

En 0, vérifions que $g_\varepsilon\to g_0=\Gamma(P_t f)$ dans L^1 : $P_{t-\varepsilon}f$ tend en effet vers $P_t f$ dans $D_2(L)$, donc $\Gamma(P_{t-\varepsilon}f)-\Gamma(P_t f)$ est petit dans L^1. Il en est de même de $P_\varepsilon(\Gamma(P_{t-\varepsilon}f)-\Gamma(P_t f))$, et aussi de $(P_\varepsilon-I)\Gamma(P_t f)$.

5. ETUDE DE Q_t ET DE C . Nous commençons par rappeler quelques formules explicites sur Q_t

(3.2) $$Q_t f = \int \mu_t(ds) P_s f \quad , \quad \mu_t(ds) = cte^{-t^2/4s} s^{-3/2} ds$$

d'où l'on déduit sans peine que, pour $f \in L^p$, $Q_t f$ appartient à $D_p(L)$, et même à $D_p(L^k)$ pour tout k. On a en fait

(3.3) $$D_t^k Q_t f = Q_t^{(k)} f = \int \mu_t^{(k)}(ds) P_s f \quad , \quad \mu_t^{(k)}(ds) = ct^{k+1} J_k(s/t^2) e^{-t^2/4s} s^{-3/2-k}$$

où J_k est un polynôme de degré $\leq k$. Ce qui en posant $s=ut^2$ nous donne

(3.4) $$D^k Q_t f = t^{-k} \int u^{-3/2-k} e^{-1/4u} J_k(u) P_{ut^2} f \, du = t^{-k} \int P_s f \, \Theta_{k,t}(ds)$$

où la masse totale de $\Theta_{k,t}$ ne dépend pas de t. En particulier, pour k=1, nous aurons un résultat utile : posons $Lf=g$, $P_s f - f = \int_0^s P_u g \, du$. Comme $\Theta_{1,t}(1)=0$, nous pouvons écrire

$$Q_t' f = \int c(P_s f - f)(1-2t^2) e^{-t^2/4s} s^{-3/2} ds$$

que nous coupons en $\int_0^1$ et $\int_1^\infty$, après quoi nous faisons tendre t vers 0. La seconde intégrale a une limite finie à cause du terme en $s^{-3/2}$. Dans la première, nous remplaçons $P_s f - f$ par $\int_0^s P_u g \, du$ et intervertissons les intégrations avant le passage à la limite. Il nous reste alors

(3.5) $$Cf = \int_0^1 P_s g \, \varepsilon(ds) + \int_1^\infty (P_s f - f) \eta(ds) \qquad g=Lf \ , \ \varepsilon, \eta \text{ bornées.}$$

D'où une majoration immédiate de $\|Cf\|_p$ en fonction de $\|f\|_p$, $\|Lf\|_p$.

Nous n'avons pas supposé $\mathcal{D}$ stable par C, Q_t , et ceci va nous créer quelques complications pour définir des quantités comme $\Gamma(Q_t f, Q_t g)$ ou $L\Gamma(Q_t f, Q_t g)$ pour $f,g \in \mathcal{D}$.

Nous avons p.p., d'après la continuité des applications $u \mapsto P_u f$, $v \mapsto P_v g$ de $\mathbb{R}_+$ dans $D_2(L)$, et la continuité de Γ de $D_2(L) \times D_2(L)$ dans L^1

(3.6) $$\Gamma(Q_t f, Q_t g) = \int \mu_t(du) \mu_t(dv) \Gamma(P_u f, P_v g)$$

Mais le côté droit est une fonction finement continue, en tant qu'intégrale de fonctions finement continues (appartenant à $\mathcal{D}$), uniformément bornées d'après la relation $|\Gamma(P_u f, P_v g)| \leq \Gamma(P_u f)^{1/2} \Gamma(P_v f)^{1/2}$ (qui a lieu p.p., et donc partout). Le côté droit est donc défini sans ambiguïté, et servira de définition partout au côté gauche. Ceci étant, on peut dériver en t le côté droit autant de fois qu'on le veut, et l'on voit que $D_t^k \Gamma(Q_t f, Q_t g)$ existe, et <u>est uniformément borné en</u> (x,t), <u>continu en</u> t . On a plus généralement le même résultat, par le même raisonnement, pour $D_t^k \Gamma(Q_t^{(i)} f, Q_t^{(j)} g)$.

Nous avons évidemment

(3.7) $$D_t \Gamma(Q_t f, Q_t g) = \int \mu_t'(du) \mu_t(dv) \Gamma(P_u f, P_v g) + \int \mu_t(du) \mu_t'(dv) \Gamma(P_u f, P_v g)$$
$$= \Gamma(Q_t Cf, Q_t g) + \Gamma(Q_t f, Q_t Cg)$$

D'où l'on tire aussi, par une récurrence immédiate, le calcul des dérivées d'ordre supérieur.

Nous aurons besoin de savoir aussi que $L\Gamma(Q_tf,Q_tf)$ existe, et est borné uniformément en (x,t). Pour cela, on utilise les hypothèses faites au début du paragraphe, i.e. le fait que $L\Gamma(P_uf,P_vg)$ est borné en (x,u,v) : on a $P_r\Gamma(P_uf,P_vg)=\Gamma(P_uf,P_vg)+\int_0^r P_sL\Gamma(P_uf,P_vg)ds$, et assez de domination pour intégrer par rapport à $\mu_t(du)\mu_t(dv)$, d'où le résultat cherché. Sans cette hypothèse, on pourrait seulement montrer que, pour $\varepsilon>0$ fixé, $LQ_\varepsilon\Gamma(Q_tf,Q_tf)$ est uniformément borné.

6. MAJORATION DE Q_t . Le lemme suivant nous servira un grand nombre de fois, surtout pour justifier des intégrations par parties.

LEMME. Soient $f,g\in\mathcal{D}$. On a

$$|Q_t\Gamma(Q_t^{(j)}f,Q_t^{(k)}g)|\leq t^{-j-k-2}C(f,g) \tag{3.8}$$

où $C(f,g)$ est uniformément bornée et appartient à tous les L^p .

Démonstration. Nous allons démontrer quelque chose d'un peu plus général que (3.8), en mettant Q_ε au lieu du premier Q_t (on peut plus généralement encore mettre $Q_\varepsilon^{(i)}$, mais nous ne traiterons pas ce cas). On écrit simplement la formule

$$\Gamma(Q_t^{(j)}fQ_t^{(k)}g) = L(Q_t^{(j)}fQ_t^{(k)}g) -Q_t^{(j)}f\ LQ_t^{(k)}g - LQ_t^{(j)}f\ Q_t^{(k)}g$$

On remplace $LQ_t^{(j)}f$ par $-Q_t^{(j+2)}f$, $LQ_t^{(k)}g$ par $-Q_t^{(k+2)}g$, et on applique (3.4)

$$|Q_t^{(j)}f|\leq ct^{-j}f^* \ ,\ |Q_t^{(k+2)}g|\leq ct^{-k-2}g^* \ ,\ \text{etc} .$$

Les deux derniers termes sont donc majorés par $ct^{-j-k-2}f^*g^*$, et f^*g^* est à la fois bornée et dans tous les L^p. Cette propriété est préservée par application de Q_ε (et si l'on prend $\varepsilon=t$ variable, $\sup_t Q_t(f^*g^*)\leq (f^*g^*)^*$ est bornée et dans tous les L^p).

Reste le premier terme. Après application de Q_ε (légitime, car ce terme est borné par différence), il reste d'après (3.4)

$$|-Q_\varepsilon''(Q_t^{(j)}fQ_t^{(k)}g)|\leq c\varepsilon^{-2}(Q_t^{(j)}fQ_t^{(k)}g)^*$$

On remplace à droite $(\dots)^*$ par sa valeur $\sup_s P_s(|Q_t^{(j)}fQ_t^{(k)}g|)\leq c\sup_s P_s(t^{-k-j}f^*g^*) = ct^{-k-j}(f^*g^*)^*$, qui est bornée et dans tout L^p.

Nous savons que la fonction $Q_t\Gamma(Q_tf,Q_tf)$ est bornée, mais on peut en donner une majoration explicite, en écrivant

$$|\Gamma(Q_tf,Q_tf)|\leq 2\Gamma(f)+2\Gamma(Q_tf-f) \quad ,\ Q_tf-f=\int_0^t Q_uCf\,du$$

Appliquer Q_t au premier terme fait apparaître un $\Gamma(f)^*$. Pour le second, posons $Cf=g$. On a - au sens L^1, donc p.p., puis partout

$$Q_t\Gamma(Q_tf,Q_tf) = \iint_{u,v\leq t} Q_t\Gamma\ (Q_ug,Q_vg)dudv$$

Après quoi on majore comme plus haut : $|Q_t\Gamma(Q_u g,Q_v g)| \leq ct^{-2}(Q_u g Q_v g)^*$ $\leq ct^{-2}(g^{*2})^*$. Si $g \in L^p$, $p>2$, $(g^{*2})^*$ appartient à $L^{p/2}$.

JUSTIFICATION DES RESULTATS RELATIFS A Γ_2

7. <u>Soit</u> $f\in\mathcal{D}$. D'après (3.6), nous avons partout

$$\Gamma(Q_t f,Q_t f) \leq (\int\mu_t(du)\sqrt{\Gamma(P_u f)})^2 \leq \int\mu_t(du)\Gamma(P_u f)$$

Si la première des inégalités (4) ou (5) a lieu, on en déduit la seconde.

Nous avons vu en 4 que $\Gamma(P_t f)$ est continue et dérivable. La continuité en 0 entraîne que la fonction $P_t\Gamma(f)-\Gamma(P_t f)$ est nulle en 0 : si elle est positive, sa dérivée est aussi positive, d'où la positivité du Γ_2 . Le même raisonnement montrera que (5') entraîne (6).

Pour montrer que la positivité du Γ_2 entraîne (4), nous avons fait en 4 presque tout le travail : $g_s = P_s\Gamma(P_{t-s}f)$ est dérivable sur $]0,t]$ avec dérivée positive, donc croissante sur $]0,t]$. Comme $g_s \to g_0$ au sens L^1 en 0, on a $g_0 \leq g_t$ p.p., donc partout.

<u>Proposition</u> 1. La formule d'Ito nous permet de calculer l'effet d'une fonction de classe C^2 sur les opérateurs L et Γ, dans le cas des diffusions : le point à remarquer ici est que les égalités p.p. fournies par cette formule ont lieu entre éléments de $\mathcal{D}$, donc <u>partout</u>. De même, la positivité de Γ_2 a lieu partout. C'est important pour le raisonnement.

8. Voici un catalogue des propriétés valables pour $f\in\mathcal{D}$, sous l'hypothèse (répétée parmi elles) que $\Gamma_2 \geq 0$ sur $\mathcal{D}$. Le problème consiste à les étendre à d'autres fonctions f - par exemple, à $f=Q_t g$, $g\in\mathcal{D}$ ou $g\in L^2$.

(3.9) $\Gamma(P_{t+s}f) \leq P_t\Gamma(P_s f)$, $\Gamma(Q_{t+s}f) \leq Q_t\Gamma(Q_s f)$

(3.10) $\sqrt{\varepsilon+\Gamma(P_{t+s}f)} \leq P_t\sqrt{\varepsilon+\Gamma(P_s f)}$ (diffusions seulement : résulte de la proposition 1).

(3.11) $L\Gamma(f,f) \geq 2\Gamma(f,Lf)$ (c'est la condition $\Gamma_2 \geq 0$)

(3.12) $4\Gamma_2(f)\Gamma(f) \geq \Gamma(\Gamma(f))$.

Nous savons que (3.9) a lieu sur $\mathcal{D}$ (la seconde, par intégration comme en (3.6)). Etendons les à $f\in L^2$ <u>en supposant</u> $s>0$. Par exemple la seconde : nous approchons f dans L^2 par des $f_n\in\mathcal{D}$. Alors $Q_s f_n \to Q_s f$ dans $D_2(L)$, donc $\Gamma(Q_s f_n) \to \Gamma(Q_s f)$ dans L^1, et $Q_t\Gamma(Q_s f_n)$ de même tend vers $Q_t\Gamma(Q_s f)$. Même raisonnement du côté gauche, et l'inégalité passe à la limite (avec un «p.p.»). Si $f\in D_2(L)$, $Q_s f$ tend vers f dans $D_2(L)$ pour $s\to 0$, et l'inégalité (p.p.) vaut aussi pour s=0. Même raisonnement pour la première inégalité, en se rappelant que P_s est régularisant pour $s>0$ (analyticité L^2).

Même raisonnement encore pour l'inégalité (3.10) : elle s'étend p.p. à $f\in L^2$ pour $s>0$, à $f\in D_2(L)$ pour $s\geq 0$.

En particulier, prenons $f=Q_r g$, $r>0$, $g\in\mathcal{D}$. Les inégalités (3.9) et (3.10) ont lieu partout avec $s=0$, et en dérivant à l'origine nous établissons (3.11) et (3.12) sans avoir supposé $\mathcal{D}$ stable par Q_t .

Pour des fonctions $f\in L^p$, $p>2$, on peut établir une version affaiblie de (3.11) (que le lecteur peut omettre)

(3.13) $$Q_\varepsilon L\Gamma(Q_t f) \geqq 2Q_\varepsilon \Gamma(Q_t, LQ_t f) \text{ p.p.} \quad \text{pour } \varepsilon>0$$

Pour voir cela, on écrit

$$|Q_\varepsilon L\Gamma(Q_t f)-Q_\varepsilon L\Gamma(Q_t g)| = |Q_\varepsilon L\Gamma(Q_t(f-g),Q_t(f+g)|$$
$$\leqq c(\varepsilon,t)((f-g)^*(f+g)^*)^* \qquad (\text{ cf. } (6))$$

Si $f-g$ est petit dans L^p $(p>2)$, f et g restant bornés dans L^p, le produit $(f-g)^*(f+g)^*$ est petit dans $L^{p/2}$, et cela subsiste après un nouveau *. De même

$$|Q_\varepsilon\Gamma(Q_t f,LQ_t f)-Q_\varepsilon\Gamma(Q_t g,LQ_t g)|\leqq|Q_\varepsilon\Gamma(Q_t(f-g),LQ_t(f+g))|$$
$$+|Q_\varepsilon\Gamma(LQ_t(f)g),Q_t(f+g))|$$

est petit dans $L^{p/2}$. Approchant $f\in L^p$ par des $f_n\in\mathcal{D}$, on voit que $Q_\varepsilon\Gamma_2(Q_t f)$ est limite dans $L^{p/2}$ des $Q_\varepsilon\Gamma_2(Q_t f_n)$, donc est positif p.p.. On remarquera qu'une fonction de la forme $Q_\varepsilon h$ est finement continue hors d'un ensemble polaire, donc le <<p.p.>> peut être amélioré.

DEMONSTRATION DU THEOREME 2

9. Pour vérifier qu'un processus de la forme $f(Y_t^\tau)$ est une sous-martingale, et calculer le processus croissant associé, nous disposons des lemmes techniques de Meyer [5] (1). Voici un énoncé précis.

LEMME. Soit $f(x,t)$ une fonction sur $E\times\mathbb{R}_+$, bornée, telle que :
- Pour tout t fixé, $L_x f(x,t) = a(x,t)$ existe (convergence simple bornée des $(P_t-I)/t$), soit finement continue en x, uniformément bornée en (x,t) .
- Pour tout x fixé, $D_t^2 f(x,t)=b(x,t)$ existe, soit finement continue en x, uniformément bornée en (x,t), et telle que $t\mapsto b_t$ soit continue au sens de la convergence uniforme (il suffit pour ce dernier point que $D_t^3 f(x,t)$ soit uniformément bornée en (x,t)).

Alors le processus $f(Y_t^\tau) - \int_0^{t\wedge\tau}(a+b)(Y_s)ds$ est une martingale sous toute loi $P^{x,u}$.

1. Cet énoncé fait la synthèse du lemme 7 p. 156 (sur $E\times\mathbb{R}$) et de l'argument du bas de la page 157. Signalons quelques erreurs matérielles : p. 157, lignes 5 et 9, les dh manquent, et il faut lire $a(y,r)$ au lieu de $a(x,r)$. Ligne 4 du bas, lire $\hat{A}u=r$.

Dans l'application au théorème 2, la fonction $f(x,t)$ à laquelle on applique le lemme est la première fois $\Gamma(Q_t f)$, et la seconde fois $\sqrt{\varepsilon+\Gamma(Q_t f)}$, avec $f\in\mathcal{D}$. La condition $\Gamma_2\geq 0$ entraîne que $\Gamma(Q_t f)\leq Q_t\Gamma(f)$ est uniformément bornée. Nous avons fait le nécessaire, dans les n^{os} précédents, pour montrer l'existence de $L\Gamma(Q_t f)$, le caractère borné en (x,t) de cette fonction (fin du n°5), étendre les inégalités de positivité sur Γ_2 (n°8)...

10. Peut on étendre le théorème 2 à des fonctions qui n'appartiennent pas à $\mathcal{D}$? Il est naturel de chercher à établir d'abord que

(3.14) pour $\varepsilon>0$, $f\in L^p$, $\|CP_\varepsilon f\|_p \leq c\|\sqrt{\Gamma(P_\varepsilon f)}\|_p$

puis de faire ensuite tendre ε vers 0. Nous distinguerons les cas $p\leq 2$ et $p>2$.

<u>Cas</u> $p\leq 2$. Nous approchons $f\in L^p$ par des $f_n\in\mathcal{D}$. Alors $g_n=P_\varepsilon f_n$ tend vers $g=P_\varepsilon f$ dans $D_p(L)$, et $\sqrt{\Gamma(g_n-g)}$ tend vers 0 dans L^p (n°3), d'où il résulte sans peine que $\sqrt{\Gamma(g_n)}$ tend vers $\sqrt{\Gamma(g)}$ dans L^p, tandis qu'il est à peu près évident que Cg_n tend vers Cg dans L^p (cf. (3.5)).

<u>Cas</u> $p>2$. Nous utiliserons ici le théorème 7 (étendu à $D_p(L)$) qui domine $\|\sqrt{\Gamma}\|_p$ par $\|C\|_p$, et a fortiori ((3.5)) par la norme dans $D_p(L)$: alors, avec les mêmes notations que ci-dessus, on sait que $\sqrt{\Gamma(g_n-g)}$ tend vers 0 dans L^p et on peut conclure de la même manière.

DOMINATION DE $\sqrt{\Gamma}$ PAR C ($p>2$)

11. Dans ce paragraphe, il s'agit d'établir une inégalité de la forme

(3.15) $\|\sqrt{\Gamma(f)}\|_p \leq c_p\|Cf\|_p$ pour $f\in D_p(L)$ [1] sans partie invariante

et notre première question va être : pour quelles « bonnes fonctions » $f\in D_p(C)$ suffit-il d'établir une telle inégalité ?

Rappelons d'abord que P_ε ($\varepsilon>0$) applique L^p dans $D_p(L)$. Il suffit en fait d'établir que, pour $\varepsilon>0$,

$$\|\sqrt{\Gamma(P_\varepsilon f)}\|_p \leq c_p\|CP_\varepsilon f\|_p \qquad (f\in L^p_0 : L^p \text{ sans partie invariante })$$

En effet, si $f\in D_p(L)$, $P_\varepsilon f \to f$ dans $D_p(L)$ pour $\varepsilon\to 0$, donc $CP_\varepsilon f\to Cf$ dans L^p (cf. n°5, formule (3.5)) tandis que $\sqrt{\Gamma(P_\varepsilon f)}$ tend en mesure vers $\sqrt{\Gamma(f)}$ (n°3), donc l'inégalité passe à la limite.

Ensuite, puisque f est sans partie invariante, $\lambda U_\lambda f$ tend vers 0 dans L^p lorsque $\lambda\to 0$, U_λ désignant la résolvante de (P_t). D'autre part on a $f-\lambda U_\lambda f = L(-U_\lambda f)$. Posant $g_\lambda=-U_\lambda f\in D_p(L)$ il nous suffit de montrer

1. On remarquera que $\Gamma(f)$ est défini pour $f\in D_p(L)$, mais non a priori sur $D_p(C)$: l'inégalité permettra ce prolongement.

que $$\|\sqrt{\Gamma(P_\varepsilon Lg_\lambda)}\|_p \leqq c_p\|CP_\varepsilon Lg_\lambda\|_p$$
et de faire ensuite tendre λ vers l'infini. Mais alors, approchons g_λ dans L^p par des $f_n \in \mathcal{D}$; si la formule a été établie pour les f_n , elle passe bien à la limite comme ci-dessus. D'autre part, $P_\varepsilon L$ laisse $\mathcal{D}$ stable. Finalement

(3.16) Il suffit d'établir le th. 7 lorsque $f \in L(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$

Ce sera là, pour toute la suite de la preuve, notre classe de << bonnes fonctions >>, pour laquelle nous allons justifier tous les calculs formels du texte.

CALCULS D'ESPERANCES CONDITIONNELLES

12. Nous avons à montrer (lemme 4 et lemme 5) que, si f est une << bonne fonction >> au sens qui vient d'être défini, les intégrales
$$\int_0^\infty s|Q'_s(f_sf'_s)|ds \quad , \quad \int_0^\infty s^2|Q'_s(f'^2_s)|ds$$
existent, et appartiennent en fait à tous les L^p ($p>1$). Rappelons que $f=Lg$, avec $g\in\mathcal{D}$.

Tout d'abord, on sait (cf. (3.4)) que $|sQ'_s(h)|\leqq ch^*$. Pour $s \leqq 1$, nous écrivons
$$|f_sf'_s|=|f_s(Cf)_s|\leqq f^*(Cf)^* \quad , \quad f'^2_s\leqq (Cf)^{*2}$$
$$s|Q'_s(f_sf'_s)| \leqq c[f^*(Cf)^*]^* \qquad s^2|Q'_s(f'^2_s)| \leqq c[(Cf)^{*2}]^*$$
qui appartient bien à tous les L^p, y compris L^∞ . Pour $s>1$, on écrit encore (3.4), mais
$$|f_s|=|Q''_sg|\leqq cs^{-2}g^* \quad , \quad \text{et de même} \quad |f'_s| < cs^{-3}g^*$$
$$|sQ'_s(f_sf'_s)| \leqq cs^{-5}(g^*)^* \qquad |s^2Q'_s(f'^2_s)|\leqq cs^{-5}(g^*)^*$$
et avec une décroissance à l'infini en s^{-5}, on a presque honte d'être si riche (prendre f de la forme Cg au lieu de Lg suffirait déjà largement à tout faire converger).

LEMME 5. Puisque nous suggérons (remarque suivant le lemme 8) une méthode pour éviter l'inégalité (D), nous ne croyons pas nécessaire d'alourdir ce texte avec les vérifications de détail. Cependant, le passage par (D) a l'avantage de ne rien utiliser d'étranger à la théorie des martingales.

LEMME 6. La première marque ▌ signale le mot << bonne fonction >> défini plus haut. En ce qui concerne la convergence des intégrales, on a
$$|Q_s(f_sf'_s)| \leqq cs^{-5}(g^*)^* \;,\; |Q'_s(f^2)|\leqq cs^{-5}g^* \;, \text{ etc.}$$
Une telle décroissance justifie largement toutes les intégrations par parties de la démonstration (dernier ▌ de la page). Quant au ▌ d'avant,

il signale le recours à la proposition suivante, due à Stein, qui justifie aussi le passage de la remarque muni d'un [] :

12. LEMME. Soit (g_t) une famille de fonctions positives, telle que $Q_t g_s \geqq g_{t+s}$. Alors les normes dans L^p des fonctions
$$U = \int s^k g_s ds \quad \text{et} \quad V = \int s^k Q_s g_s \, ds$$
sont équivalentes pour $1 \leqq p < \infty$.

(Dans la première application on prend $g_t = \Gamma(f_t)$, et dans la seconde $g_t = f_t''^{\,2}$) .

<u>Démonstration</u>. On a $Q_s g_s \geqq g_{2s}$, d'où l'on tire une inégalité ponctuelle du type $U \leqq cV$. C'est l'inégalité inverse qui est plus délicate.

Nous interprétons $\|U\|_p$ comme la norme dans $L^p(\mu)$ de l'application $x \mapsto g_.(x)$ à valeurs dans $L^1(\mathbb{R}_+, s^k ds)$, et de même pour $\|V\|_p$. Nous avons donc
$$\|V\|_p = \sup_h \int \mu(dx) \int_0^\infty s^k Q_s g_s(x) \; h_s(x) ds$$
h parcourant l'ensemble des fonctions boréliennes positives $h(x,s)$ telles que la v.a. $H(x) = \sup_s h(x,s)$ ait une norme $\leqq 1$ dans $L^q(\mu)$. On a donc
$$\|V\|_p = \sup_h \int_0^\infty s^k < Q_s g_s, h_s > ds = \sup_h \int_0^\infty s^k < g_s, Q_s h_s > ds$$
$$\leqq < \int_0^\infty s^k g_s \, ds, H^* > \leqq \|U\|_p \|H^*\|_q \; .$$
On utilise enfin le résultat $\|H^*\|_q \leqq c_q \|H\|_q$ (lemme maximal de Stein).

LES INEGALITES FONDAMENTALES

Comme plus haut pour les a_i, il faut vérifier que les intégrales définissant les A_i sont absolument convergentes, et que les fonctions en s qui y figurent décroissent assez vite pour justifier les intégrations par parties. On a d'après (3.8)
$$|Q_s \Gamma(f_s, f_s')| \leqq cs^{-3} f^{**}, \quad |sQ_s \Gamma(f_s', f_s')| \leqq cs^{-3} f^{**}$$
$$|sQ_s(f_s, f_s'')| \leqq cs^{-3} f^{**}, \quad |s^2 Q_s \Gamma(f_s', f_s'')| \leqq cs^{-3} f^{**}$$
de sorte que les quatre fonctions A_i ont un sens pour $f \in L^p$, $p>1$, sans qu'il soit nécessaire de la supposer de la forme $f = Lg$ (nos << bonnes fonctions >> précédentes.

La première ▌ de la page 14 a été traitée au n°11.

DEMONSTRATION DE (19_2). Cette sous-martingale a été étudiée au n°9. Comme on n'a pas ici la partie délicate relative à $Z^{1/2}$, on pourrait s'épargner une hypothèse en travaillant sur $Q_\varepsilon \Gamma(f_t)$ au lieu de $\Gamma(f_t)$: Il serait alors plus facile de vérifier que $L_x \varphi$ est uniformément borné (condition nécessaire à l'application du lemme du n°9). Le résultat sur les processus stochastiques utilisé est le suivant :

Soit (Z_t) une sous-martingale positive uniformément intégrable (sur un espace de mesure finie d'abord : on commencera par les mesures $P^{x,u}$, puis on intégrera par rapport à $\mu\times\varepsilon_a$, puis on fera tendre a vers $+\infty$), et soit $Z_t=Z_0+M_t+A_t$ sa décomposition canonique. On a alors

$$E[A_\infty - A_T | \underline{\underline{F}}_T] = E[Z_\infty - Z_T | \underline{\underline{F}}_T] \leqq E[Z_\infty | \underline{\underline{F}}_T]$$

et par conséquent (cf. Dellacherie-Meyer, chap.VI, n°99 ; on pourra aussi voir VI.22 pour le fait que Z appartient à la classe (D)), on a

$$E[A_\infty^p] \leqq c_p E[Z_\infty^p] \quad \text{pour } 1\leqq p<\infty .$$

DEMONSTRATION DE (19_5). Le calcul de $D_t\Gamma(Q_t f)$ a été fait en (3.7).

§ 4. REMARQUES ET RESULTATS ADDITIONNELS

1. DUALISATION DU THEOREME 7.

Nous avons établi en toute généralité (th. 7) la domination de $\sqrt{\Gamma}$ par C pour $p\geqq 2$. Par dualité, nous allons établir la domination de C par $\sqrt{\Gamma}$ si $p\leqq 2$: ce résultat a été établi pour les semi-groupes de diffusion (th.2), mais nous l'étendons ainsi à des semi-groupes quelconques.

Voir la remarque à la fin de cette section, au sujet de la dualisation analogue du théorème 2 et des difficultés qu'elle présente.

Si f appartient à l'algèbre $\mathcal{B}$, notons I(f) sa projection dans L^2 sur l'espace des fonctions invariantes. Soit $p\geqq 2$, et soit q l'exposant conjugué : f-I(f) <u>est limite dans</u> L^q <u>de fonctions de la forme</u> Cg , <u>avec</u> $g\in D_q(L)$. En effet, si V_λ est l'opérateur λ-potentiel du semi-groupe (Q_t), on a

$$f-\lambda V_\lambda f = C(-V_\lambda f) \text{ , et } V_\lambda f \text{ appartient à } D_q(C)$$

et d'autre part, lorsque $\lambda\to 0$, $\lambda V_\lambda f$ tend (dans L^2, dans L^q , et p.p.) vers I(f). Pour établir la phrase soulignée, il reste à montrer que $D_q(L)$ est dense dans $D_q(C)$, ce qui est clair : si U_λ est l'opérateur λ-potentiel de (P_t) et f appartient à $D_q(C)$, $\lambda U_\lambda f \in D_q(L)$ converge vers f dans $D_q(C)$.

Soit alors $f\in D_p(L)$, avec $1<p\leqq 2$; on a

$$\begin{aligned} \|Cf\|_p &= \sup_{g\in\mathcal{B},\ \|g\|_q\leqq 1} < Cf,g > = \sup_{\dots} < Cf,\ g-I(g) > \\ &= \sup_{h\in D_q(L),\ \|Ch\|_q\leqq 1} < Cf,Ch > \\ &= \sup_{\dots} \int\Gamma(f,h)d\mu \end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant l'inégalité $|\Gamma(f,h)|\leqq \Gamma(f,f)^{1/2}\Gamma(h,h)^{1/2}$, puis l'inégalité de Hölder, et enfin le théorème 7 qui nous majore $\|\sqrt{\Gamma(h,h)}\|_q$ par $c_q\|Ch\|_q \leqq c_q$; nous obtenons que

(4.1) $$\|Cf\|_p \leqq c_q \|\sqrt{\Gamma(f)}\|_p \ , \ 1<p\leqq 2$$

le résultat cherché.

REMARQUE. Si nous pouvions dualiser de même le théorème 2, nous obtiendrions l'<u>équivalence de norme</u> entre C et $\sqrt{\Gamma}$ (pour les fonctions sans partie invariante), <u>pour les diffusions</u>, et dans tout l'intervalle $]1,\infty[$, alors que nous ne l'avons établie plus haut (th.2 et th. 7) que dans l'intervalle $[2,\infty[$. Mais pour faire un tel raisonnement par dualité, il faudrait savoir que, pour f assez bonne

$$\|\sqrt{\Gamma(f)}\|_p \leqq c_p \sup_{\|\sqrt{\Gamma(g)}\|_q\leqq 1} \int\Gamma(f,g)d\mu$$

Cela pose des problèmes, même dans les cas les plus élémentaires : prenons par exemple une diffusion sur $\mathbb{R}^n$ de générateur $\frac{1}{2}\Delta f + \nabla\rho.\nabla f$, symétrique par rapport à la mesure $\mu(dx)=e^{2\rho(x)}dx$, et qui satisfait à l'hypothèse $\Gamma_2\geqq 0$ si ρ est <u>logconcave</u> . L'opérateur $\Gamma(f,g)$ vaut $\frac{1}{2}\mathrm{grad}f\cdot\mathrm{grad}g$. Quel est le dual de l'espace des fonctions dont le gradient est dans $L^p(\mu)$? C'est un problème d'espaces de Sobolev à poids dont nous ignorons la réponse.

Rappelons aussi que pour des semi-groupes <u>qui ne sont pas des diffusions</u>, on ne peut espérer établir l'équivalence de normes entre C et $\sqrt{\Gamma}$ dans tout l'intervalle $]1,\infty[$ (voir Stein, Singular Integrals..., p. 163, énoncé 6.13).

2. ITERATION DE LA METHODE DU TH. 7

Pour f,g appartenant à l'algèbre $\mathcal{A}$, nous itérons la construction de l'opérateur Γ_2 en définissant

(4.2) $$\Gamma_{n+1}(f,g) = \frac{1}{2}(L\Gamma_n(f,g) - \Gamma_n(Lf,g) - \Gamma_n(f,Lg))$$

On rencontre assez fréquemment des semi-groupes (semi-groupes de convolution sur $\mathbb{R}^n$, semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck) pour lesquels <u>toutes</u> les formes bilinéaires Γ_n sont positives. Une démonstration en tout point analogue à celle du théorème 7 permet de montrer que

(4.3) <u>Si tous les</u> Γ_p $(1\leqq p\leqq n+1)$ <u>sont positifs</u>, <u>on a pour</u> $p\geqq 2$

$$\|\sqrt{\Gamma_n(f,f)}\|_p \leqq c_{p,n} \|C^n f\|_p \qquad (f\in\mathcal{A})$$

Voici le principe de la méthode. On introduit les quantités suivantes (toutes les intégrales étant convergentes en vertu des arguments du § 3)

$$A_1^n(f) = -\int_0^\infty Q_s\Gamma_n(f_s,f_s')ds \qquad A_2^n(f) = \int_0^\infty sQ_s\Gamma_n(f_s',f_s')ds$$

$$A_3^n(f) = \int_0^\infty sQ_s\Gamma_n(f_s,f_s'')ds \qquad A_4^n(f) = -\int_0^\infty s^2Q_s\Gamma_n(f_s',f_s'')ds \ .$$

On fait l'hypothèse de récurrence

$$\|A_i^{n-1}(f)\|_{p/2} \leqq c_{p,n-1} \ \|(C^{n-1}f)^2\|_{p/2}$$

$$\|\Gamma_{n-1}(f)\|_{p/2} \leqq c_{p,n-1} \ \|(C^{n-1}f)^2\|_{p/2}$$

On établit alors, comme dans le th. 7, les résultats suivants

1) $\|A_2^n(f)\|_{p/2}$, $\|A_4^n(f)\|_{p/2} \leqq c_{p,n}\|(C^nf)^2\|_{p/2}$

2) $\|A_1^n(f)\|_{p/2} \leqq c_{p,n}\|\Gamma_n(f)\|_{p/2}$

3) $4A_1^n(f) \geqq \Gamma_n(f)$

4) $[4A_1^n(f)-\Gamma_n(f)][2A_4^n(f)-A_2^n(f)] \geqq 2(A_1^n(f)-2A_2^n(f)-2A_3^n(f))^2$

(cf. les formules (18) et (19) du second paragraphe . Comme dans la démonstration du th. 7, on montre alors que

$$\|\Gamma_n(f)\|_{p/2} \leqq c_{p,n}\|(C^nf)^2\|_{p/2}$$

ce qui permet de démontrer $\|A_i^n(f)\|_{p/2} \leqq c_{p,n} \|(C^nf)^2\|_{p/2}$, et l'on est prêt à remonter d'un nouveau cran dans la récurrence.

3. EQUIVALENCE DE NORMES POUR p>1, POUR CERTAINES DIFFUSIONS

Nous avons dit au n°1 qu'on ne savait pas établit l'équivalence de normes entre C et $\sqrt{\Gamma}$ pour $1<p<\infty$, dans le cas des diffusions.

Il y a pourtant des cas où cette équivalence est connue : d'une part, le cas des mouvements browniens de toutes dimensions, d'autre part, celui du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Or ces deux cas ont un trait commun : l'opérateur $\Gamma(f,f)$ s'écrit $\Sigma_i\ (H_if)^2$, les opérateurs H_i laissant stable $\mathcal{D}$, et satisfaisant à

$$[L,H_i] = h\ H_i \tag{4.4}$$

où h est une fonction positive, <u>la même pour tous les indices</u> i . Dans le cas des mouvements browniens, $h=0$, et pour Ornstein-Uhlenbeck $h=1$.

Or pour les diffusions possédant cette propriété, nous savons établir l'équivalence de norme pour $1<p<\infty$ par une méthode complètement différente de celle qui a été utilisée plus haut. Elle utilise la théorie de Littlewood Paley-Stein pour les semi-groupes <u>sousmarkoviens</u> symétriques, due à Cowling, et présentée dans ce volume par Meyer.

Nous remarquons que l'on a dans ce cas

$$H_iP_tf = \hat{P}_tH_if \tag{4.5}$$

où $\hat{P}_t$ est le semi-groupe sousmarkovien symétrique de générateur $\hat{L}=L-hI$ (semi-groupe qui se construit à partir de (P_t) par une << formule de Feynman-Kac >>). Soit $(\hat{Q}_t)$ le semi-groupe de Cauchy associé, et soit $g_1(f)$

la fonction de Littlewood-Paley

$$g_1(f) = \left(\int_0^{\infty} t(D_t\hat{Q}_t f)^2 dt\right)^{1/2}$$

La théorie de Littlewood-Paley sousmarkovienne permet d'affirmer que l'on a une équivalence de normes $\|f\|_p \sim \|g_1(f)\|_p$ pour les fonctions f sans partie $\hat{Q}_{\bullet}$-invariante, et une équivalence analogue pour les fonctions $f=(f_n)$ à valeurs dans un espace de Hilbert ($g_1(f)^2 = \Sigma_n \, g_1(f_n)^2$) .

On a alors pour $f\in\mathcal{D}$

$$\|\sqrt{\Gamma(f)}\|_p = \|(\Sigma_i \, (H_i f)^2)^{1/2}\|_p$$

$$\leqq c_p \|(\Sigma_i \int t(D_t\hat{Q}_t H_i f)^2 dt)^{1/2} \|_p \quad \text{(inégalité de L-P sousmarkovienne)}$$

On utilise la relation de commutation $\hat{Q}_t H_i = H_i Q_t$, puis $D_t Q_t f = Q_t Cf$, pour obtenir

$$\ldots \leqq c_p \|(\int t\Gamma(Q_t Cf, Q_t Cf)dt)^{1/2}\|_p$$

$$\leqq c_p \|Cf\|_p$$

cette dernièreinégalité étant une inégalités de martingales familière. On obtient donc sans peine l'inégalité désirée. On remarquera que c'est une inégalité du type de celle du th. 7 , qui se dualise bien (section 1) et nous donne l'équivalence de normes pour $1<p<\infty$.

Toutefois, le raisonnement précédent exige que l'on vérifie que chaque $H_i f$ est sans partie invariante pour $(\hat{P}_t)$. Or on a pour $f\in\mathcal{D}\subset L^2$

$$\|(\Sigma_i \, (\hat{P}_t H_i f)^2)^{1/2}\|_2^2 = \|\Gamma(P_t f, P_t f)^{1/2}\|_2^2 = - \langle LP_t f, P_t f \rangle$$

qui tend vers 0 pour $t\to\infty$. Cela entraîne que chaque $\hat{P}_t H_i f$ tend vers 0.