SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DOMINIQUE BAKRY

Transformation de Riesz pour les semi-groupes symétriques. Première partie : étude de la dimension 1

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 19 (1985), p. 130-144

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__130_0>

TRANSFORMATIONS DE RIESZ POUR LES SEMI-GROUPES SYMETRIQUES
PREMIERE PARTIE : ETUDE DE LA DIMENSION 1

par D. Bakry

Depuis le travail fondamental de Stein [10] sur les inégalités de Littlewood-Paley pour les semi-groupes symétriques, on dispose d'une notion générale de transformation de Riesz, qui peut se décrire ainsi : soit (P_t) un semi-groupe markovien, de générateur L , symétrique par rapport à une mesure μ , et soit V l'opérateur intégral $(-L)^{-1/2}$ sur un domaine convenable. Alors une transformation de Riesz pour le semi-groupe est un opérateur linéaire de la forme HV , où H est linéaire et tel que $|Hf|^2 \leqq \Gamma(f,f)$ (Γ est l'opérateur carré du champ : $\Gamma(f,g)= \frac{1}{2}(L(fg)-fLg-gLf)$). Le problème posé est de savoir si HV est borné en norme L^p ($1<p<\infty$), et ce que l'on peut dire sur les cas limites ($p=1,\infty$) au moyen d'espaces du type H^1, BMO .

On dispose de nombreux résultats positifs, obtenus au début par les méthodes de Calderòn-Zygmund, plus tard grâce à l'axiomatisation des «espaces de type homogène » par Coifman et Weiss. Ces méthodes sont « extrinsèques » en théorie des semi-groupes, autrement dit font intervenir une structure spéciale sur l'espace où le semi-groupe opère. Par opposition, les méthodes probabilistes développées par Stein [10] et dans les travaux ultérieurs de Meyer [6],[7],[8] sont intrinsèques, i.e. ne font intervenir que le semi-groupe et les opérateurs de sa famille spectrale, et l'opérateur bilinéaire Γ . Comme exemple de résultats intrinsèques, on sait en principe (il y a encore à choisir un bon espace de fonctions-test sur lequel tous les opérateurs sont définis) que la transformation de Riesz HV opère dans L^p ($2\leq p<\infty$) si H commute avec le semi-groupe (pour $1<p<\infty$ dans le cas des semi-groupes de diffusion), et le contenu général de la démonstration de [8] semble être que, si (P_t) est un semi-groupe de diffusion et le commutateur $[L,H]$ est égal à H , on a le même résultat.

Pour tenter de comprendre la théorie intrinsèque, nous appliquons les méthodes probabilistes à certains semi-groupes pour lesquels les résultats analytiques sont connus d'avance, en recherchant soigneusement quelles sont les égalités ou inégalités qui « font marcher » la démonstration. C'est ce que nous avons déjà fait dans [1] pour les mouvements browniens sphériques et leur théorie de H^1. Dans la première partie de ce travail, nous avons projeté le mouvement brownien sphérique sur un diamètre, ce qui revient à étudier l'opérateur ultrasphérique sur]-1,1[

$$L_n f(x) = (1-x^2)f''(x) - (n-1)xf'(x)$$

et plus généralement les opérateurs associés aux polynômes de Jacobi

(1) $$L_{\alpha,\beta} f(x) = (1-x^2)f''(x) -[(\alpha+\beta+2)x+(\alpha-\beta)]f'(x)$$

la mesure $\mu(dx)$ étant alors $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$ ($\alpha,\beta \geq 0$). Les transformations de Riesz pour L_n ont été étudiées dans L^p par Muckenhoupt et Stein [9], la théorie H^1 pour $L_{\alpha,\beta}$ faite par Coifman-Weiss [2], et notre propre travail sur les sphères nous a guidés du point de vue probabiliste. Il s'agit donc d'un exercice de style, mais très instructif, car il fait apparaître la structure même des démonstrations. En particulier, il permet de comprendre pourquoi la théorie L^p de l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck est excellente, tandis que la théorie H^1 a résisté jusqu'à maintenant (et n'existe vraisemblablement pas). Notre étude achève donc pour l'essentiel le chapitre de Stein [10], p. 138-141 sur les transformations de Riesz pour les équations de Sturm-Liouville.

Les résultats que nous obtenons ainsi en dimension 1 permettent de dégager des conditions intrinsèques nouvelles, exprimées au moyen de gradients itérés, et que nous appliquerons à des semi-groupes généraux dans la seconde partie de ce travail. Les résultats que nous obtenons sont encore incomplets, mais la direction semble intéressante.

I. LE SEMI-GROUPE ASSOCIÉ AUX POLYNÔMES DE JACOBI

On désigne par L l'opérateur (1) ci-dessus, et par μ la loi de probabilité $c(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$ sur]-1,1[. Nous supposerons $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$, bien que les raisonnements marchent formellement pour $\alpha,\beta > -1/2$, afin d'éviter une discussion à la frontière étrangère à notre sujet principal (et pour laquelle, d'ailleurs, nous manquons de bonnes références).

Pour $\lambda_n=n(n+\alpha+\beta+1)$ l'équation $Lf+\lambda_n f=0$ admet une solution polynômiale J_n de degré n , que l'on normalise par la condition $<J_n,J_n>_\mu=1$, et que l'on appelle le n-ième <u>polynôme de Jacobi</u> . On peut montrer que les J_n forment une base orthonormale de $L^2(\mu)$.

On peut montrer que les opérateurs linéaires définis par

$$P_t J_n = e^{-t\lambda_n} J_n$$

forment un semi-groupe markovien sur]-1,1[, de générateur L . Il résulte alors de la théorie de la << subordination >> que les opérateurs

$$Q_t J_n = e^{-t\sqrt{\lambda_n}} J_n$$

constituent aussi un semi-groupe markovien (le semi-groupe de Cauchy associé à (P_t) : $Q_t = \int P_s\, \mu_t(ds)$, où (μ_t) est le s.g. stable d'ordre

1/2 sur $\mathbb{R}_+$). Son générateur sera noté $C=-(-L)^{1/2}$, et son potentiel V est défini sur les polynômes d'intégrale nulle à partir de la formule $VJ_n = J_n/\sqrt{\lambda_n}$ pour $n \geq 1$. L'algèbre des polynômes constitue pour nous l'algèbre des fonctions-test, stable par tous les opérateurs $P_t, Q_t, L, C, \Gamma(.,.)$...

Il peut être intéressant pour le lecteur probabiliste de rappeler (d'après Dynkin) comment on construit une diffusion admettant L comme générateur. La méthode classique consiste à résoudre l'équation différentielle stochastique suivante, où W_t est un mouvement brownien tel que $d\langle W,W\rangle_t = 2dt$

$$X_t = x + \int_0^t (1-X_s^2)^{1/2} dW_s - \int_0^t ((\alpha+\beta+2)X_s + \alpha-\beta) ds$$

et à vérifier que le temps de vie $\zeta = \inf\{ s : X_s \notin]-1,1[\}$ est p.s. infini. On introduit pour cela les fonctions (où x est arbitraire)

$$p(y) = \int_x^y q(v)dv \qquad \text{avec} \qquad q(v) = \exp \int_x^y \frac{(\alpha+\beta+2)u+\alpha-\beta}{1-u^2} du$$

et l'on vérifie que $Lp=0$, et que p admet les limites $\pm\infty$ en ± 1 . Le processus $p(X_t)$ est une martingale locale sur $[0,\zeta[$, et l'on sait qu'une martingale locale continue ne peut jamais avoir une limite égale à $+\infty$ ou $-\infty$: elle ne peut qu'osciller entre ces deux valeurs. Avant l'instant ζ , X doit donc effectuer une infinité de voyages aller-retour indépendants entre x et un autre point x' fixé, et donc $\zeta=+\infty$.

PROPRIETES FONDAMENTALES

Nous allons maintenant faire une liste des propriétés qui seront utilisées dans les raisonnements probabilistes.

a) Nous utiliserons abondamment l'existence de l'algèbre des polynômes comme fonctions-test, et le fait que les polynômes d'intégrale nulle sont denses dans L^p_0 , l'espace des $f \in L^p$ telles que $Q_t f \underset{t\to\infty}{\to} 0$ $(1<p<\infty)$.

2) Nous utiliserons le caractère régularisant des noyaux Q_t : d'après la p.158 de Szegö, Orthogonal polynomials, AMS Colloquium publications, New York 1939, on a

$$\|J_n\|_\infty \leq c(\alpha,\beta)n^{-k} \qquad , \quad k=\max(\alpha+1,\beta+1)$$

de sorte que l'on vérifie immédiatement que si $f \in L^2$, $f=\Sigma_n a_n J_n$ avec $\Sigma_n |a_n|^2 < \infty$, la série $\Sigma_n a_n e^{-t\sqrt{\lambda_n}} J_n$ converge uniformément et représente une fonction bornée (même continue sur $[-1,1]$); Q_t est continu de L^2 dans L^∞, par dualité de L^1 dans L^2, et par composition applique L^1 dans L^∞ (et même dans $C([-1,1])$).

3) L'opérateur carré du champ $\Gamma(f,g)=\frac{1}{2}(L(fg)-fLg-gLf)$ peut s'écrire

(2) $$\Gamma(f,g) = Hf\, Hg \qquad \text{avec} \quad Hf(x) = \sqrt{1-x^2}f'(x) .$$

et on a en fait

(3) $\qquad L = H^2 - aH \qquad$ avec $\qquad a(x) = \dfrac{(\alpha+\beta+1)x+\alpha-\beta}{\sqrt{1-x^2}}$

et nous notons que $a'(x)\geqq 0$, donc

(4) $\qquad$ la fonction $h=H(a)$ est positive

ce qui, conjointement à la formule immédiate

(5) $\qquad [L,H] = LH-HL = H(a)H = hH$

fera marcher toute la théorie L^p, $1<p<\infty$. Cette condition correspond à l'hypothèse $a'(x)\leqq 0$ introduite par Stein , [10], p. 138.

L'opérateur HV défini sur les polynômes d'intégrale nulle (et prolongé aux L^p_0 lorsqu'on aura établi sa continuité) est la transformation de Riesz associée au semi-groupe. On remarquera que H n'est pas n'importe quel opérateur linéaire tel que $|Hf|^2=\Gamma(f,f)$: si l'on multiplie H par une fonction de module 1, on perd la positivité du commutateur (5).

4) Pour faire marcher la théorie H^1 , il nous faut écrire explicitement la fonction h

$$h(x) = \frac{(\alpha-\beta)x+\alpha+\beta+1}{1-x^2}$$

et vérifier que

(6) $\qquad h \geqq \gamma a^2 \qquad$ avec $\qquad \gamma=1/(1+2\max(\alpha,\beta))$

Cela interviendra de manière cruciale dans la démonstration du lemme de sous-harmonicité.

A titre d'exemple, si l'on avait pris pour L l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck $Lf(x)=f''(x)-xf'(x)$, nous aurions eu $Hf(x)=f'(x)$, $a(x)=x$, $h=H(a)=1$, donc (4) mais non (6).

La proposition suivante résume les conséquences les plus utiles de (4),(5). On notera une autre hypothèse implicite (sous-entendue déjà dans (5)) : si f est un polynôme, Hf n'est pas un polynôme, mais est encore assez bonne pour que l'on puisse lui appliquer L .

PROPOSITION 1. Soit f un polynôme. Alors

1) $L(Hf)^2 \geqq 2(Hf)(HLf)$ ou $L\Gamma(f,f) \geqq 2\Gamma(f,Lf)$
2) $P_t(Hf)^2 \geqq (HP_tf)^2$ ou $P_t\Gamma(f,f) \geqq \Gamma(P_tf,P_tf)$
3) $Q_t(Hf)^2 \geqq (HQ_tf)^2$ ou $Q_t\Gamma(f,f) \geqq \Gamma(Q_tf,Q_tf)$

Preuve. Nous savons que l'on a toujours $L(g^2)\geqq 2gLg$ (positivité du Γ). Prenant $g=Hf$ on a $L(Hf)^2 \geqq 2Hf.LHf = 2Hf.HLf + 2Hf.[L,H]f = 2Hf.HLf + 2h.(Hf)^2 \geqq 2Hf.HLf$ puisque $h\geqq 0$.

2) Considérons la fonction $F_s=P_s(HP_{t-s}f)^2$ pour $0\leqq s\leqq t$. La relation

à établir s'écrit $F_0 \leqq F_t$, et il suffit de montrer que F est croissante. Si l'on se rappelle que $DP_s = P_s L$, on a

$$F'_s = P_s[\ L(HP_{t-s}f)^2 - 2HP_{t-s}f.HLP_{t-s}f\ ]$$

et le crochet est positif d'après 1). Enfin 3) se déduit de 2) en intégrant par rapport à la mesure $\mu_t(ds)$ du semi-groupe stable d'ordre 1/2

$$Q_t(Hf)^2 = \int P_s(Hf)^2\mu_t(ds) \geqq \int (HP_sf)^2\mu_t(ds) \geqq [H\int P_sf\ \mu_t(ds)]^2 = (HQ_tf)^2$$

On notera que les formes de droite des inégalités 1),2),3) sont intrinsèques.

Peut être la formule $H^*f = -Hf + af$ donnant l'adjoint de H mérite t'elle aussi d'être notée.

II. INEGALITES DE THEORIE DES MARTINGALES

Cette section est un rappel des inégalités utilisées dans les articles de Meyer [6],[7]. Son unique originalité consiste à travailler sur les martingales directement, sans jamais employer de fonctions de Littlewood-Paley. Comme très peu de structure est utilisée ici, nous écrivons E au lieu de]-1,1[, $\mathcal{D}$ pour les fonctions-test, et nous supposons seulement que (P_t) est un bon semi-groupe de diffusion à valeurs dans E (le mot diffusion signifie que toutes les martingales rencontrées sont continues), admettant μ comme loi invariante symétrique.

Nous désignons par Ω l'ensemble de toutes les applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $E\times\mathbb{R}$, par $Y_t=(X_t,B_t)$ l'application coordonnée d'indice t sur Ω, par P^a ($a\in]0,\infty[$) l'unique loi sur Ω pour laquelle

(X_t) est un processus de Markov de semi-groupe de transition (P_t), de mesure initiale μ ,

(B_t) est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}$, de générateur D^2 ($\langle B,B\rangle_t=2t$), de loi initiale ε_a ,

(X_t) et (B_t) sont indépendants .

L'espérance pour P^a est notée E^a, et l'on pose $\tau=\inf\{t : B_t=0\}$.

Soit f une fonction sur E , appartenant à un espace $L^p(\mu)$. On désigne par $\overline{f}(x,t)$ son "prolongement harmonique au demi-espace $E\times\mathbb{R}_+$" , $\overline{f}(x,t) = Q_t(x,f)$. On montre alors que

le processus $M_t(f) = \overline{f}(Y_{t\wedge\tau})$ est une martingale pour P^a

(c'est en fait la martingale $E^a[f(X_\tau)|\mathcal{F}_t]$). Nous omettrons souvent la mention de f . Cette martingale peut se décomposer en une projection orthogonale sur le sous-espace stable engendré par (B_t), dite « partie horizontale de M »

$$M^{\to}_t(f) = \int_0^{t\wedge\tau} D\overline{f}(Y_s)dB_s \qquad \left(\text{où } D\overline{f}(x,t) = \frac{\partial\overline{f}(x,t)}{\partial t} \right)$$

et la projection $M_t^{\uparrow}(f)$ (<< verticale >>) sur le sous-espace stable orthogonal. On peut montrer que

$$(7)\qquad \begin{aligned} <M^{\rightarrow},M^{\rightarrow}>_t &= 2\int_0^{t\wedge\tau}(D\bar{f}(Y_s))^2ds \\ <M^{\uparrow},M^{\uparrow}>_t &= 2\int_0^{t\wedge\tau}\Gamma(f_t,f_t)(Y_s)ds \qquad (f_t=\bar{f}(.,t)) \end{aligned}$$

Une propriété fondamentale, qui se déduit de la symétrie du semi-groupe, est l'égalité

$$(8)\qquad \begin{aligned} E^a[<M^{\rightarrow}(f),M^{\rightarrow}(g)>_{\infty}] &= E^a[<M^{\uparrow}(f),M^{\uparrow}(g)>_{\infty}] \\ &= \tfrac{1}{2}\int fg d\mu - \tfrac{1}{2}\int Q_af.Q_ag\, d\mu \end{aligned}$$

Nous définissons maintenant divers types de normes. Tout d'abord, la norme H^1 maximale de f :

$$(9)\qquad \|f\|_{H^1_{max}} = \sup_a E^a[\sup_s |M_s(f)|]$$

On peut montrer que ceci est en fait une fonction croissante de a , de sorte que l'on peut remplacer $\sup_a$ par $\lim_{a\to\infty}$. On a $\|f\|_{L^1} \leqq \|f\|_{H^1_{max}}$. En remplaçant $M(f)$ par $M^{\rightarrow}(f)$ ou $M^{\uparrow}(f)$, pour $f\in L^2$ par exemple, on définit des normes notées $\|f\|_{H^{1\rightarrow}_{max}}$, $\|f\|_{H^{1\uparrow}_{max}}$. Comme d'habitude, ces normes sont équivalentes à des normes quadratiques, que nous n'expliciterons pas. On définit de la même manière des normes BMO de la façon suivante : comme la martingale $M_t(f)$ est continue, elle appartient à BMO sous la loi P^a si et seulement s'il existe $\underline{c}$ tel que

$$E^a[|M_{\infty}-M_t||\mathcal{F}_t]\leqq c \text{ p.s.} , \text{ ou } \quad Q_s(x,|Q_sf-f|) \leqq c \quad \lambda_a^t\text{-p.p.}$$

où $\lambda_a^t(dx,ds)$ est la mesure $P^a\{X_t\in dx,B_t\in ds,I_{\{t<\tau\}}\}$. Ces mesures sont toutes équivalentes, et la norme BMO est donc indépendante de a (en s'appuyant sur la continuité des Q_t , on peut montrer que $f\in$BMO <=> $Q_t(|f-Q_tf|)$ est uniformément borné, mais nous n'aurons pas besoin de cela). Du point de vue quadratique, l'appartenance à BMO signifie que la fonction $(D\bar{f}(x,t))^2+\Gamma(f_t,f_t)$ a un potentiel de Green borné dans $E\times\mathbb{R}_+$; en séparant cette fonction en ses deux parties, on obtient les deux espaces $BMO^{\rightarrow}$ ($M^{\rightarrow}(f)\in BMO$) et $BMO^{\uparrow}$.

Nous établissons maintenant d'importantes inégalités. Soient f,g appartenant à deux espaces conjugués L^p,L^q avec $1<p<\infty$. Nous avons d'après (8) (les normes L^p sur Ω étant relatives à P^a)

$$(10)\qquad \begin{aligned} |\int fg\, d\mu| &\leqq |\int Q_af\, Q_ag\, d\mu| + 2E^a[|<M^{\rightarrow}(f),M^{\rightarrow}(g)>_{\infty}^{1/2}|] \\ &\leqq |\dots| + 2\|<M^{\rightarrow}(f),M^{\rightarrow}(f)>_{\infty}^{1/2}\|_p\|<M^{\rightarrow}(g),M^{\rightarrow}(g)>_{\infty}^{1/2}\|_q \\ &\qquad \text{(inégalité de Kunita-Watanabe)} \\ &\leqq |\int Q_af\, Q_ag\, d\mu| + c_p\|<M^{\rightarrow}(f),M^{\rightarrow}(f)>_{\infty}^{1/2}\|_p\|g\|_q \end{aligned}$$

(remplacer $M^{\rightarrow}$ par M dans le dernier terme, ce qui augmente le crochet, et appliquer les inégalités de Burkholder). On aurait des inégalités semblables en remplaçant $M^{\rightarrow}$ par $M^{\uparrow}$, M .

Lorsque $f=g$, remarquons explicitement l'équivalence de normes

(11) $\|\langle M^{\rightarrow}(f),M^{\rightarrow}(f)\rangle_{\infty}^{1/2}\|_p \leqq c_p\|f\|_p \leqq c_p(\|Q_af\|_p+\|\langle M^{\rightarrow}(f),M^{\rightarrow}(f)\rangle_{\infty}^{1/2}\|_p)$

où l'on peut également remplacer $M^{\rightarrow}$ par $M,M^{\uparrow}$.

Dans le cas limite $p=1$, on procède comme en (10), en utilisant l'inégalité de Fefferman au lieu de l'inégalité de Kunita-Watanabe :

(12) $|\int fg\, d\mu\,| \leqq |\int Q_af\; Q_ag\; d\mu| + c\|f\|_{H^{1\rightarrow}}\|g\|_{BMO^{\rightarrow}}$

où l'on peut utiliser aussi les normes sans $^{\rightarrow}$ (ou avec $^{\uparrow}$). Un cas particulier important est celui où f par exemple appartient à L^p_0 . On remplace alors $|\int Q_afQ_agd\mu|$ par $|\int Q_{2a}f\; gd\mu|$, que l'on majore par $\|Q_{2a}f\|_p\|g\|_q$, et l'on fait tendre a vers $+\infty$; ce terme tend vers 0, et les formules ne font plus intervenir du côté droit que les martingales.

III. APPLICATION AUX TRANSFORMATIONS DE RIESZ

Nous allons appliquer les résultats précédents au semigroupe de la section I. Soit f un polynôme d'intégrale nulle, et soit

$$\varphi(x,t) = HQ_tf(x) \quad , \quad \Phi_t = \varphi(Y_{t\wedge\tau})$$

φ n'est pas le prolongement harmonique Q_tHf de Hf, mais on a

$$\begin{aligned}(D_t^2+L_x)\varphi(x,t) &= -HLQ_tf + LHQ_tf \quad (\text{ puisque } D^2Q_t=-LQ_t\ )\\ &= H(a)HQ_tf = h(x)\varphi(x,t)\end{aligned}$$

d'où il résulte que $(D_t^2+\tilde{L}_x)\varphi = 0$ si l'on pose $\tilde{L}=L-hI$, générateur d'un semi-groupe sousmarkovien symétrique $(\tilde{P}_t)$: φ est donc un prolongement harmonique, mais relatif à un autre semi-groupe. Nous allons un peu préciser cela.

Comme φ est une fonction C^{∞} sur $E\times\mathbb{R}_+$, bornée d'après la prop.1, 3), (Φ_t) est une semimartingale bornée de décomposition canonique

(13) $$\Phi_t = \Phi_0 + N_t + A_t \quad , \quad A_t = \int_0^{t\wedge\tau}(D_t^2+L_x)\varphi\circ Y_sds = \int_0^{t\wedge\tau}h(X_s)\Phi_sds$$

Comme h est μ-intégrable, Φ borné, on voit que $\int_0^t|dA_s|$ est intégrable, donc $E^a[\,\sup_{s\leq t}|N_s|\,] < \infty$.

La relation $\Phi_t-\Phi_0-\int_0^{t\wedge\tau}h(X_s)\Phi_sds = N_t$ se résout explicitement en

(14) $$\Phi_t = \Phi_0U_t\int_0^t U_s^{-1}dN_s \quad \text{où} \quad U_t= \exp\int_0^{t\wedge\tau}h(X_s)ds \quad \text{est croissant .}$$

En particulier, $|\Phi_t|$ est le produit d'un processus croissant par la valeur absolue d'une (vraie) martingale : c'est une sousmartingale.

Nous allons calculer le processus croissant $<N,N>$. Nous avons d'abord

$$< N,N >_t \geqq < N^{\rightarrow},N^{\rightarrow} >_t$$

où $N^{\rightarrow}$ est la projection de N sur le sous-espace stable engendré par le mouvement brownien B , et vaut

$$\int_0^{t\wedge\tau} D\varphi(X_s,B_s)dB_s \qquad (D=\partial/\partial s)$$

Cette dérivée vaut $H\frac{\partial}{\partial t}Q_t f = HQ_t Cf$, et son carré vaut $\Gamma(Q_t Cf,Q_t Cf)$, autrement dit

(15) $$< N^{\rightarrow},N^{\rightarrow} >_t = < M^{\uparrow}(Cf),M^{\uparrow}(Cf) >_t$$

D'autre part, nous avons en appliquant la formule d'intégration par parties au processus $|\Phi_t|$, et en remarquant que $[|\Phi|,|\Phi|]=[\Phi,\Phi]=[N,N]$

$$\Phi_t^2 = \Phi_0^2 + \int_0^t 2|\Phi_s|d|\Phi_s| + <N,N>_t$$

et comme le second processus est une sousmartingale, nous avons pour tout couple (S,T) de temps d'arrêt bornés tels que $S\leqq T$

(16) $$E[<N,N>_T-<N,N>_S] \leqq E[\Phi_T^2-\Phi_S^2] \leqq E[\Phi_T^{*2}I_{\{S<T\}}]$$

d'après le lemme de Lenglart-Lepingle-Pratelli ([4], p.29, lemme 1.1) on en déduit que pour tout p, $0<p<\infty$, on a

(16') $$E[<N,N>_\infty^{p/2}] \leqq c_p E[\Phi_\infty^{*p}]$$

[Peut être est il intéressant de noter le résultat analogue pour le morceau manquant du processus croissant :

(16") $$E[(\int_0^\tau h(X_s)\varphi^2(Y_s)ds)^{p/2}] \leqq c_p E[\Phi_\infty^{*p}] \qquad]$$

Nous avons maintenant tous les ingrédients nécessaires pour montrer que la transformation de Riesz HV opère dans L_0^p . Comme les applications C et V sont des bijections réciproques de l'ensemble des polynômes d'intégrale nulle (dense dans L_0^p) sur lui même, il suffit en fait de savoir comparer les normes dans L^p de Hf et de Cf .

THEOREME 2. <u>Soit f un polynôme d'intégrale nulle. Il existe des constantes universelles telles que l'on ait, pour</u> $1<p<\infty$

(17) $$k_p\|Cf\|_p \leqq \|Hf\|_p \leqq K_p\|Cf\|_p$$

Par << universelles >>, nous voulons dire que ce sont en fait des constantes de théorie des martingales, ne dépendant pas de la nature particulière du semi-groupe. Il n'en sera plus de même pour p=1.

<u>Démonstration</u>. Nous reprenons les notations ci-dessus : puisque $(|\Phi_t|)$ est une sousmartingale positive avec $|\Phi_\infty|=|Hf(X_\tau)|$, nous avons d'après l'inégalité de Doob

$$\|\Phi_\infty^*\|_p \leqq c_p\|Hf\|_p$$

Nous appliquons ensuite (15) et (16) pour obtenir (avec un autre c_p)

$$\| < M^{\uparrow}(Cf), M^{\uparrow}(Cf) >_{\infty}^{1/2} \|_p \leqq c_p \|Hf\|_p$$

Ensuite, nous écrivons (11) pour $M^{\uparrow}$ au lieu de $M^{\rightarrow}$, en remarquant que la majoration précédente est indépendante du point initial a ; comme Cf est d'intégrale nulle, on peut choisir a assez grand pour que $\|Q_{2a}Cf\|_p$ soit très petit, et on obtient (sans avoir eu à supposer pour cette inégalité que $\int f d\mu = 0$)

(18) $$\|Cf\|_p \leqq c_p \|Hf\|_p \; .$$

Pour obtenir l'inégalité en sens inverse, on procède par dualité selon un chemin bien connu. On prend deux polynômes f,g et l'on écrit

$$< Hf, Hg >_{\mu} = \int \Gamma(f,g) d\mu = - \int Lf.g d\mu = < Cf, Cg >_{\mu}$$

et par conséquent, d'après (18)

$$| < Hf, Hg >_{\mu} | \leqq c_p \|Cf\|_p \|Hg\|_q$$

Pour établir que $\|Hf\|_p \leqq c_p \|Cf\|_p$, il suffit donc de vérifier que l'on peut « tester » la norme dans L^p d'une fonction de la forme Hf , au moyen de fonctions du même type de norme 1 dans L^q . Or l'ensemble des fonctions de la forme $Hg(x) = \sqrt{1-x^2}\, g'(x)$, où g est un polynôme, est dense dans L^q (tout polynôme est la dérivée d'un polynôme).

REMARQUE. Cette partie de la démonstration ne pourra pas s'étendre en dimension supérieure à 1 : l'inégalité (17) comporte deux moitiés, et nous démontrons celle qui se " dualise " le moins bien.

IV. LES TRANSFORMATIONS DE RIESZ POUR p=1

Nous passons au cas p=1 , qui va reposer sur l'inégalité $h \geqq \gamma a^2$ (6) . Dans tous les cas classiques, le théorie de l'espace H^1 utilise un « lemme de sous-harmonicité, et nous allons commencer par là, avec les notations suivantes. Nous prenons un polynôme f d'intégrale nulle. Nous posons

$$\varphi(x,t) = HVQ_t f(x) \;,\quad \Phi_t = \varphi(Y_{t\wedge\tau})$$

$$\psi(x,t) = Q_t f(x) = \overline{f}(x,t) \;,\quad \Psi_t = \psi(Y_{t\wedge\tau})$$

Nous avons vu au début de cette section que (Φ_t) est, sous toute loi P^a, une semimartingale de classe H^1, tandis que (Ψ_t) est une martingale bornée. Voici le lemme de sous-harmonicité :

LEMME 3. <u>Il existe un</u> $p \in]0,1[$ <u>tel que</u> $(\Phi^2+\Psi^2+\varepsilon)^{p/2}$ <u>soit une sous-martingale pour tout</u> $\varepsilon>0$, <u>sous toute loi</u> P^a.

<u>Preuve</u>. La formule d'Ito nous ramène à montrer qu'une partie à variation finie est croissante, ou encore à vérifier que $(D_t^2+L_x)[\varphi^2+\psi^2+\varepsilon]^{p/2} \geqq 0$. Il s'agit donc en principe d'un pur calcul analytique.

Ce calcul est assez lourd. Pour avoir de bonnes notations, nous écrirons φ_0, φ_1 au lieu de φ,ψ. Nous désignons par $\overline{L}$ l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial t^2}+L$, par $\overline{\Gamma}$ son carré du champ. Nous savons déjà

(i) $\quad \overline{L}\varphi_0 = 0 \quad , \quad \overline{L}\varphi_1 = h\varphi_1$

Posons ensuite $\frac{\partial}{\partial t}\varphi_0 = p_0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 = q_0$

$H\varphi_1 = p_1 \quad , \quad H\varphi_1 = q_1$

de sorte que

(ii) $\quad \overline{\Gamma}(\varphi_0,\varphi_0) = p_0^2+p_1^2 \quad , \quad \overline{\Gamma}(\varphi_0,\varphi_1) = p_0q_0+p_1q_1 \quad , \quad \overline{\Gamma}(\varphi_1,\varphi_1) = q_0^2+q_1^2$

Nous avons

$$\text{(iii)}\quad \begin{aligned} q_0 &= \tfrac{\partial}{\partial t}HQ_tVf = HQ_tCVf = -HQ_tf = -p_1 \\ q_1 &= H^2Q_tVf = (L+aH)Q_tVf = -CQ_tCVf+a\varphi_1 = p_0+a\varphi_1 \end{aligned}$$

L'étape suivante consiste à appliquer à la fonction $F=(x_0^2+x_1^2+\varepsilon)^{p/2}$ la << formule d'Ito >> (il s'agit plutôt de calcul de Malliavin !), donnant $\overline{L}F(\varphi_0,\varphi_1)$. Pour simplifier les notations, nous écrivons F, F'_0.. au lieu de $F(\varphi_0,\varphi_1)$, $F'_0(\varphi_0,\varphi_1)$...

(iv) $\quad \overline{L}F = F'_0\,\overline{L}\varphi_0 + F'_1\,\overline{L}\varphi_1 + F''_{00}\,\overline{\Gamma}(\varphi_0,\varphi_0) + 2F''_{01}\,\overline{\Gamma}(\varphi_0,\varphi_1) + F''_{11}\,\overline{\Gamma}(\varphi_1,\varphi_1)$

Il faut ensuite calculer les dérivées. En posant $r^2 = x_0^2+x_1^2$, on a

(v) $\quad F'_i = px_i(r^2+\varepsilon)^{-1}F \quad , \quad F''_{ij} = p[(p-2)x_ix_j+(r^2+\varepsilon)\delta_{ij}](r^2+\varepsilon)^{-2}F$

On reporte cela dans (iv), et l'on remplace les $\overline{L}$ et les $\overline{\Gamma}$ par leurs valeurs tirées de (i),(ii). Mettant en facteur $p(r^2+\varepsilon)^{-2}F$ (et désignant par r^2 cette fois $\varphi_0^2+\varphi_1^2$) on est ramené à montrer que l'expression suivante est positive pour certaines valeurs de $p \in]0,1[$

$$\text{(vi)}\quad h(r^2+\varepsilon)\varphi_1^2 + (p-2)[\,\varphi_0^2(p_0^2+q_0^2) + 2\varphi_0\varphi_1(p_0p_1+q_0q_1) + \varphi_1^2(p_1^2+q_1^2)] + (r^2+\varepsilon)[(p_0^2+q_0^2) + (p_1^2+q_1^2)]$$

Comme $h\geqq 0$, le coefficient de ε est positif, et nous pouvons oublier ε. Nous introduisons les vecteurs $U_0=\binom{p_0}{q_0}$ et $U_1=\binom{p_1}{q_1}$ et les nombres

$$T=|U_0|^2+|U_1|^2, \quad S=2U_0\wedge U_1=2(p_0q_1-p_1q_0)$$

de sorte que

(vii) $\quad T\geqq|S| \quad , \quad T-S = a^2\varphi_1^2$

le premier terme de la somme (vi) devient donc $\frac{h}{a^2}(T-S)r^2$, et notre hypothèse était $h/a^2 \geqq \gamma$. Le problème consiste donc à montrer que

(viii) $\quad \gamma(T-S) + T \geqq (2-p)\,\frac{1}{r^2}\,|\varphi_0U_0+\varphi_1U_1|^2$

Soit θ l'angle des deux vecteurs U_0,U_1 ; on a $S^2=4|U_0|^2|U_1|^2\sin^2\theta$, et l'on a $\sup_{x_0^2+x_1^2=1} |x_0U_0+x_1U_1|^2 = \frac{1}{2}(T+\sqrt{T^2-S^2})$. La relation

$$\gamma(T-S)+T \geq (1-\frac{p}{2})(T+\sqrt{T^2-S^2})$$

s'écrit en posant $x=S/T$, compris entre -1 et 1

$$\gamma(1-x)+1 \geqq (1-\frac{p}{2})[1+\sqrt{1-x^2}\ ]$$

et comme le maximum m de la fonction $(1+\sqrt{1-x^2})/2(1+\gamma(1-x))$ sur l'intervalle $[-1,1]$ est <1 strictement[1] pour tout $\gamma>0$, l'intervalle $[2-1/m,\infty[$ des valeurs de p pour lesquelles cette inégalité est satisfaite contient des valeurs <1, ce qui établit le lemme.

THEORIE DE L'ESPACE H^1. Nous avons défini en (9) et un peu plus bas les espaces H^1 « probabilistes » H^1_{max} et $H^{1\uparrow}_{max}$. Nous les modifierons légèrement ces définitions, en nous restreignant désormais aux fonctions d'<u>intégrale nulle</u>. Nous désirons comparer ces espaces à un espace H^1 « analytique » défini formellement par les conditions $f\in L^1_0$, $HVf\in L^1$. Cependant, cette définition n'est pas correcte, car HV n'est pas défini sur L^1_0. Nous utilisons alors les propriétés régularisantes des noyaux Q_t, qui appliquent L^1_0 dans L^2_0 (même dans L^∞) pour définir H^1_{an} comme l'ensemble des $f\in L^1_0$ tels que

(19) $$\|f\|_{H^1_{an}} = \|f\|_{L^1} + \sup_{t>0} \|HVQ_tf\|_{L^1} < \infty\ .$$

Nous préciserons un peu cela : nous avons signalé plus haut que, si g est un polynôme, on a $HQ_tg=\tilde{Q}_tHg$, où $(\tilde{Q}_t)$ est un semi-groupe sous-markovien symétrique par rapport à μ. Remplaçant g par Vf (f polynôme d'intégrale nulle) on voit que $HVQ_tf = \tilde{Q}_tHVf$, d'où il résulte que $\|HVQ_tf\|_1$ est fonction <u>décroissante de</u> t ; cela s'étend alors à $f\in L^1_0$, et l'on peut remplacer $\sup_{t>0}$ par $\lim_{t\downarrow 0}$.

Notre objectif est la démonstration de l'énoncé suivant. Soulignons un point non résolu : nous ne savons pas montrer que la transformation de Riesz HV est bornée de H^1 dans lui même.

THEOREME 4. <u>Les trois espaces</u> H^1_{max}, $H^{1\uparrow}_{max}$, H^1_{an} <u>sont égaux</u>, <u>avec des normes équivalentes</u> - <u>on les désignera tous trois par</u> H^1. <u>De plus</u>, <u>si</u> $f\in H^1$, <u>on peut définir</u> $HVf\in L^1$ <u>par la formule</u>

(20) $$HVf = \lim_{t\downarrow 0} HVQ_tf \quad (\text{ limite forte })$$

<u>et cet opérateur est borné de</u> H^1 <u>dans</u> L^1.

<u>Preuve</u>. Nous suivons le même schéma que dans le cas des sphères, mais avec des différences d'ordre technique.

1. En fait ce maximum est égal à $(1+\gamma)/1+2\gamma$, et la valeur limite de p est $1/1+\gamma < 1$.

<u>Première étape</u>. $H^{1\uparrow}_{max} \subset H^1_{an}$. Nous allons commencer par montrer que l'on a $\|k\|_{H^1_{an}} \leqq c\|k\|_{H^{1\uparrow}_{max}}$ lorsque $k\in L^2_0$. Alors HVk est bien défini, et il suffit de borner sa norme L^1. Celle ci peut être majorée par $2\sup_j|<k,j>|$, j parcourant l'ensemble des fonctions bornées par 1 en module et <u>d'intégrale nulle</u> (la boule unité de L^∞_0). D'autre part, toute fonction de L^1 orthogonale aux HVg (g polynôme d'intégrale nulle) est constante - cf. la fin de la démonstration du th.2 - donc l'adhérence faible des HVg dans L^∞ est L^∞_0. Finalement

$$\|HVk\|_1 \leqq 2\sup_g |< HVk,HVg >_\mu| \quad \text{où } g \text{ est un polynôme d'intégrale nulle et } \|HVg\|_\infty \leqq 1 .$$

Or on a $< HVk,HVg >_\mu = <k,g>_\mu$. Lorsque k est un polynôme d'intégrale nulle, cela résulte des égalités

$$< HVk,HVg >_\mu = \int\Gamma(Vk,Vg)d\mu = < CVk,CVg >_\mu = <k,g>_\mu$$

et le théorème 2 permet alors de passer à $k\in L^2_0$. Nous appliquons alors la forme de (10) relative aux martingales $M^\uparrow$, en y faisant tout de suite tendre a vers $+\infty$: le côté droit se trouve majoré par

$$2\sup_a E^a[|< M^\uparrow(k),M^\uparrow(g) >_\infty|] \leqq c\|k\|_{H^{1\uparrow}_{max}} \|M^\uparrow(g)\|_{BMO}$$

Reste à évaluer cette dernière norme par $c\|HVg\|_\infty$. Posons $Vg=f$ pour pouvoir utiliser les notations du théorème 2 : $\varphi(x,t)=HQ_tf(x)$, etc. On a

$$< M^\uparrow(g),M^\uparrow(g) >_t = \int_0^{t\wedge\tau} 2(HQ_.g(Y_s))^2ds$$

mais $HQ_tg = -HQ_tCf = -DHQ_tf$, donc $< M^\uparrow(g),M^\uparrow(g) > = < N^\to,N^\to>_t$ (cf. (15), où ce raisonnement a déjà été fait). Ainsi d'après (16)

$$E^a[< M^\uparrow(g),M^\uparrow(g) >^\infty_t |\mathcal{F}_t] \leqq E[\Phi^2_\infty - \Phi^2_t|\mathcal{F}_t]$$

et en particulier, si $\Phi_\infty=Hf=HVg$ est borné, on obtient le résultat cherché.

Maintenant, il nous faut lever l'hypothèse $k\in L^2_0$. Nous supposons seulement que $k\in L^1_0$ est tel que la martingale $M(k)$ ait une partie verticale $M^\uparrow(k)$ satisfaisant à

$$\sup_a E^a[M^\uparrow(k)^*] < \infty .$$

Soit $\varepsilon>0$, $\tau_\varepsilon=\inf\{t : B_t=\varepsilon\}$, et $k_\varepsilon=Q_\varepsilon k$. La loi de la martingale $M^\uparrow_{t\wedge\tau_\varepsilon}(k)$ sous P^a est la même que celle de $M^\uparrow_t$ sous $P^{a-\varepsilon}$, donc k_ε appartient à $H^{1\uparrow}_{max}$ avec une norme plus petite que celle de k. D'autre part, les propriétés régularisantes de Q_ε entraînent que $k_\varepsilon\in L^2_0$. On peut donc lui appliquer le raisonnement précédent, et en déduire que

$$\|HVQ_\varepsilon k\|_1 \leqq c\|k\|_{H^{1\uparrow}_{max}} \quad \text{pour tout } \varepsilon>0$$

Cela achève la première étape, par définition de H^1_{an} .

<u>Seconde étape</u>. $H^1_{an} \subset H^1_{max}$. Nous allons utiliser ici le lemme de sous-harmonicité (lemme 3). Soit d'abord f un polynôme d'intégrale nulle. En appliquant l'inégalité de Doob avec exposant $1/p > 1$ à la sous-martingale positive du lemme, nous obtenons

$$E^a[\Phi^*] \vee E^a[\Psi^*] \leqq E^a[((\Phi^2+\Psi^2)^{1/2})^*] \leqq cE^a[(\Phi^2_\infty+\Psi^2_\infty)^{1/2}]$$
$$\leqq c(\|f\|_1+\|HVf\|_1) .$$

Considérons ensuite le cas où $f \epsilon L^2_0$. Soit (f^n) une suite de polynômes d'intégrale nulle, telle que $\|f^n-f\|_2 \leqq 2^{-n}$. D'après le théorème 2, on a aussi $\|HV(f-f^n)\|_2 \leqq c2^{-n}$, et les processus correspondants (Φ^n_t) sont tels que $\Sigma_n \; E^a[|\Phi^n-\Phi^{n+1}|^*] < \infty$. Il en résulte sans peine que :

-L'ensemble des N des (x,t) tels que $\varphi^n(x,t)$ ne converge pas vers une limite finie $\varphi(x,t)$ est polaire pour le processus (Y_t) (i.e. la probabilité sous P^a que la trajectoire $Y_\cdot(\omega)$ tencontre N est nulle).
- Le processus $\Phi_t=\varphi(X_{t\wedge\tau},B_{t\wedge\tau})$ est continu, et l'on a encore l'inégalité précédente (application du lemme de Fatou).

Remarquons qu'en fait, on aurait pu appliquer l'inégalité de Doob avec un meilleur exposant - en utilisant le fait que $f \epsilon L^2_0$ pour obtenir que $E^a[(\Phi^{n*})^2]$ est borné, mais par une quantité qui bien sûr ne dépend pas seulement de $\|f\|_{H^1_{an}}$. Utilisant (14), nous pouvons écrire $\Phi^n_t=U_tM^n_t$, où (U_t) est un processus croissant $\geqq 1$, et (M^n_t) est une martingale ; notre majoration des Φ^{n*} passe aux M^{n*}, donc $M=\lim_n M^n$ est une martingale uniformément intégrable.

Nous supposons simplement $f \epsilon H^1_{an}$; alors pour tout $\varepsilon>0$, la théorie précédente s'applique à $f_\varepsilon=Q_\varepsilon f$, qui a une norme plus petite dans H^1_{an}, et nous en déduisons les propriétés suivantes :

i) On peut choisir pour chaque t une version de $\varphi(\cdot,t)=HVQ_tf$, de sorte que le processus Φ_t <u>défini sur</u> $[0,\tau[$ comme $\varphi(Y_t)$ soit continu, et que l'on ait
$$E^a[\ \sup_{t\leqq\tau_\varepsilon}|\Phi_t|\ ] \leqq c\|f\|_{H^1_{an}}$$
et de même en remplaçant φ_t par $\psi_t = Q_tf$.

ii) On peut écrire $\Phi_t=U_tM_t$, où (U_t) est le processus croissant $\geqq 1$ $\exp(\int_0^{t\wedge\tau}h(X_s)ds)$, et (M_t) est une martingale locale sur l'intervalle ouvert $[0,\tau[$.

Le résultat relatif à Ψ^* nous montre aussitôt que f appartient à H^1_{max} , et comme $H^1_{max} \subset H^{1\dagger}_{max}$, l'identité des trois espaces H^1.

Le résultat relatif à Φ^* entraîne que M^* est intégrable, donc M a une limite p.s. à l'instant τ ; donc Φ_t en a une aussi, et l'intégrabilité de Φ^* entraîne que l'on a aussi convergence dominée dans L^1. En particulier, la limite

$$\lim_{\eta\downarrow 0} \Phi(Y_{\tau_\eta}) = \lim_{\eta\downarrow 0} \varphi(X_{\tau_\eta},\eta)$$

existe p.s. et dans L^1. Mais le processus $(X_{\tau_\eta})_{\eta\geq 0}$ est un processus de Markov de semi-groupe de transition (Q_t), par rapport à sa filtration naturelle (que nous noterons $(\mathcal{G}_t)$) : il suffit de remarquer que le processus $(\tau_\eta)_{\eta\geq 0}$ est stable d'ordre 1/2 et indépendant de $(X_.)$. La limite ci-dessus appartenant à la tribu $\mathcal{G}_{0+}$, la loi 0-1 de Blumenthal entraîne que c'est une fonction de X_τ seulement, que l'on notera $\varphi(X_\tau,0)$. Si l'on se rappelle que $\varphi(.,t)$ est une version de HVQ_tf, il est naturel de poser $\varphi(.,0) = HVf$, et de l'appeler la <u>transformée de Riesz</u> de f.

La convergence dans L^1 entraîne que $E^a[|\varphi(X_{\tau_\eta},\eta)-\varphi(X_\tau,0)|]\rightarrow 0$. Conditionnant p.r. à X_{τ_η} , on voit que $\int|HVQ_\eta f-Q_\eta HVf|d\mu \rightarrow 0$. Mais par ailleurs, comme $HVf\in L^1$, $\int|Q_\eta HVf-HVf|d\mu \rightarrow 0$. D'où finalement l'assertion de l'énoncé : $HVQ_\eta f \rightarrow HVf$ dans L^1. Le fait que (Q_tf,HVQ_tf) tende vers (f,HVf) dans L^1 entraîne à son tour que Q_tf <u>tend fortement vers</u> f <u>dans</u> H^1_{an} <u>lorsque</u> $t\rightarrow 0$.

On en déduit diverses conséquences intéressantes : L^2_0 , ou les polynômes de moyenne nulle, sont denses dans H^1 . De même, la relation $HVQ_tf = \tilde{Q}_tHVf$, où $(\tilde{Q}_t)$ est le semi-groupe de Cauchy associé au semi-groupe (P_t) du début de la section III, passe des polynômes de moyenne nulle à H^1 tout entier. Il en résulte que HVQ_tf <u>converge en fait p.p.</u> vers HVf lorsque $t\rightarrow 0$.

REMARQUE. Il reste des points que nous ne sommes pas parvenus à éclaircir ; l'un d'eux a été déjà signalé avant l'énoncé. Un second point est le rôle de l'espace $H^{1\rightarrow}_{max}$: est il identique aux autres espaces H^1 et comment le montrer ? La clef se trouve sans doute dans une étude plus approfondie de la semi-martingale (Φ_t).

Enfin, nous ignorons si le dual de H^1 est BMO : la pièce manquante est ici la description du dual de H^1_{an} , du fait que la transformation de Riesz $R=HV$ a un adjoint peu maniable $R^*=V(aI-H)$.

REFERENCES

[1] BAKRY (D.). Etude probabiliste des transformées de Riesz et de l'espace H^1 sur les sphères. Sém. Prob. XVIII, Lecture Notes in M. 10 Springer-Verlag 1984.

[2] COIFMAN (R.) et WEISS (G.). Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. Bull. A.M.S. 83, 1977, p. 137-192.

[3] FEFFERMAN (C.) et STEIN (E.M.). H^p spaces of several variables. Acta Math. 129, 1972, p. 137-192.

[4] LENGLART (E.), LEPINGLE (D.), PRATELLI (M.). Présentation unifiée de certaines inégalités de la théorie des martingales. Sém. Prob. XIV, p. 26-48. Lecture Notes in M. 784 Springer 1980.
(version améliorée par Barlow-Yor dans leur article :

[5] MEYER (P.A.) . Démonstration probabiliste de certaines inégalités de Littlewood-Paley. Sém. Prob. X, p. 125-183, Lecture Notes 511

[6] MEYER (P.A.). Le dual de $H^1(\mathbb{R}^\nu)$: démonstrations probabilistes. Sém. Prob. XI, p. 135-195, Lecture Notes in M. 581, Springer 1977

[7] MEYER (P.A.). Note sur les processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Sém. Prob. XVI, p. 95-132, Lecture Notes in M. 920, Springer 1982.

[8] MEYER (P.A.). Transformations de Riesz pour les lois gaussiennes. Sém. Prob. XVIII, Lecture Notes in M. 10

[9] MUCKENHOUPT (B.) et STEIN (E.M.). Classical expansions and their relation to conjugate harmonic functions. Transactions AMS 118, 1965, p. 17-92.

[10] STEIN (E.M.). Topics in harmonic analysis related to the Littlewood Paley theory. Princeton University Press, 1970.