SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER
WEI-AN ZHENG

Construction de processus de Nelson réversibles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 19 (1985), p. 12-26
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__12_0>

CONSTRUCTION DE PROCESSUS DE NELSON REVERSIBLES[1]

par P.A. Meyer et W.A. Zheng

Dans ce travail, nous construisons rigoureusement les << processus de Nelson >> associés à certaines fonctions d'onde <u>réelles</u>[1](solutions stationnaires d'une équation de Schrödinger). Nous ne parlons pas de fonctions d'onde, excepté dans l'introduction : le problème est simplement celui de la construction, sous des hypothèses de régularité minimales, d'une diffusion à crochets browniens, admettant une mesure invariante symétrique de densité donnée. Ce problème a été traité par R. Carmona [2], sous des conditions de régularité plus forte, et notre méthode n'est pas loin de la sienne.

En fait, notre rédaction préliminaire cherchait à construire les diffusions par une méthode de convergence étroite. C'est le remarquable travail de E. Carlen [1] (dans le cas non stationnaire, beaucoup plus difficile) qui a attiré notre attention sur la nécessité de renoncer aux conditions de régularité du type << fort >>.

INTRODUCTION

Rappelons d'abord comment Nelson associe, à toute fonction d'onde $\psi(x,t)$ solution d'une équation de Schrödinger sur $\mathbb{R}^d\times[\alpha,\beta]$ et bien régulière, deux diffusions remarquables sur $[\alpha,\beta]$, associées par retournement du temps, et admettant comme loi à tout instant t la mesure $\rho_t\xi$, où $\rho_t=|\psi(.,t)|^2$ et ξ est la mesure de Lebesgue.

On pose d'abord (toutes les fonctions introduites dépendant de (x,t))

$$(1)\qquad \psi = e^{R+iS} \ , \quad \rho = e^{2R} = |\psi|^2 \ .$$

On supposera que pour tout t , $\rho(.,t)=\rho_t$ est une loi de probabilité. Soit ν un nombre >0 (si ψ est interprétée comme la fonction d'onde décrivant une particule de masse m , ν vaut $\hbar/m$). On introduit les champs de vecteurs suivants, dépendant du temps (grad opérant sur la variable x à t fixé)

$$(2)\qquad u = \nu\,\mathrm{grad}R \ , \ v = \nu\,\mathrm{grad}S \ (\text{ ainsi } \ u+iv = \nu\,\mathrm{grad}\psi/\psi \ )$$

$$(3)\qquad b = v+u \ , \ \hat{b} = v-u \ .$$

Le processus de Nelson << en avant >> est une diffusion (X_t) , solution faible d'une e.d.s.

1. En fait, nous avons traité le cas complexe (stationnaire non réversible) dans un paragraphe rajouté à la fin.

$$(4) \qquad X_t = X_\alpha + \int_\alpha^t b(X_s,s)ds + \sqrt{\nu}\, W_t$$

où X_α admet la loi $\rho_\alpha\xi$, et W est un mouvement brownien standard de la filtration naturelle de X , nul pour $t=\alpha$. Nelson montre que la loi de X_t est $\rho_t\xi$ pour tout t , et que le processus (X_t) regardé dans l'autre sens du temps est solution faible d'une équation analogue

$$(4') \qquad X_t = X_\beta + \int_\beta^t \hat{b}(X_s,s)ds + \sqrt{\nu}\, W'_t$$

où W' est un mouvement brownien standard << en arrière >> . Un cas particulier important est celui des fonctions d'onde de la forme $\psi(x)e^{i\lambda t}$; alors u,v,ρ ne dépendent pas du temps (cas stationnaire). Si de plus ψ est réelle, on a $v=0$, $b=-\hat{b}$, et la diffusion (X_t) est <u>réversible</u>.

Pour toutes sortes de raisons, la condition de régularité naturelle à imposer à la diffusion est

$$E[\int_\alpha^\beta (|b(X_s,s)|^2+|\hat{b}(X_s,s)|^2)ds\ ] = \tfrac{1}{2}E[\int_\alpha^\beta (|u(X_s,s)|^2+|v(X_s,s)|^2)ds\ ] < \infty$$

qui s'écrit analytiquement puisque $u+iv = \mathrm{grad}\psi/\psi$, $\rho_t=|\psi_t|^2$

$$(5) \qquad \int_\alpha^\beta ds \int |\mathrm{grad}\ \psi(x,s)|^2\xi(dx) < \infty$$

ou dans le cas stationnaire

$$(6) \qquad \int \frac{\mathrm{grad}^2\rho}{\rho}(x)\xi(dx) < \infty \quad \text{ou} \quad \int|\mathrm{grad}\psi(x)|^2\xi(dx) < \infty .$$

Le problème qui se pose si l'on veut passer des calculs formels de Nelson à une construction rigoureuse est le caractère singulier des champs $b,\hat{b}$ - même si ψ est très régulière, cela se produira aux points où $\psi=0$. Nous allons montrer que <u>dans le cas réversible</u>, la régularité (6) permet toujours de faire la construction. Nous nous efforçons aussi de ne pas trop utiliser la structure explicite du problème, de manière à pouvoir raisonner sur d'autres semi-groupes markoviens symétriques que celui du mouvement brownien. C'est pourquoi nous noterons (P_t) le semi-groupe brownien de paramètre ν , E l'espace $\mathbb{R}^d$, A (et non $\frac{\nu}{2}\Delta$) le générateur , $\Gamma(f,g)$ (et non $\nu\,\mathrm{grad}f.\mathrm{grad}g$) l'opérateur carré du champ $A(fg)-fAg-gAf$. Nous travaillerons sur le mouvement brownien, mais nous indiquerons à la fin de chaque paragraphe les modifications à faire pour traiter des cas plus généraux.

I. CONSTRUCTION DANS UN CAS TRES REGULIER

Ce paragraphe contient l'idée essentielle de la construction, dans un cas où les difficultés techniques sont réduites au minimum.

Nous désignons par Ω l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans E , pouvant admettre une durée de vie ζ finie. Cet ensemble est muni de ses coordonnées X_t , de ses tribus naturelles $\mathcal{F},\mathcal{F}_t$. Nous désignons par W_x l'unique loi sur Ω pour laquelle (X_t) est un mouvement brownien de paramètre ν ($d<X^i,X^j>_t = \nu\delta^{ij}dt$) issu du point x . On désigne par W_μ la mesure $\int_E W_x\mu(dx)$. Si f est une fonction sur Ω , on notera $W_x[f]$, $W_\mu[f]$ l'espérance de f pour W_x,W_μ .

L'opérateur de translation est noté θ_t ($X_s(\theta_t\omega)=X_{s+t}(\omega)$). Nous utiliserons aussi l'opérateur de retournement à t fixé : on désigne par Ω_t l'ensemble $\{t<\zeta\}$, et r_t est la bijection de Ω_t sur Ω_t définie par $X_s(r_t\omega)=X_{t-s}(\omega)$; r_t préserve la mesure W_ξ sur Ω_t .

Nous désignons par ψ une fonction strictement positive sur E , finement continue, appartenant au domaine du générateur infinitésimal étendu A . Cela signifie que pour toute loi W_x , le processus $\psi(X_t)-\psi(X_0)-\int_0^t A\psi(X_s)ds$ est une martingale locale continue, de processus croissant $\int_0^t\Gamma(\psi,\psi)\circ X_s ds$. Puisque la semimartingale $\psi(X_t)$ est >0 , $\log\psi(X_t)$ est une semimartingale continue, qui peut se calculer par la formule d'Ito : le processus

$$(7)\qquad L_t = \log\psi(X_t)-\log\psi(X_0) - \int_0^t\left(\frac{A\psi}{\psi} - \frac{\Gamma(\psi,\psi)}{2\psi^2}\right)\circ X_s\, ds$$

$$\left(= \int_0^t \frac{\mathrm{grad}\,\psi}{\psi}\circ X_s\cdot dX_s \quad \text{sous forme explicite} \right)$$

est une martingale locale fonctionnelle additive, nulle en 0, de crochet $\int_0^t \frac{\Gamma(\psi,\psi)}{\psi^2}(X_s)ds$. Son exponentielle de Doléans $\exp(L_t- \frac{1}{2}<L,L>_t)$ est une martingale locale fonctionnelle multiplicative du processus (X_t), telle que $W_x[M_t]\leqq 1$ pour tout x . Un calcul immédiat montre que

$$(8)\qquad M_t = \frac{\psi(X_t)}{\psi(X_0)} \exp\left(-\int_0^t \frac{A\psi}{\psi}(X_s)ds \right)$$

Cette remarque nous a été faite par M. Yor, mais figure déjà chez Carmona[1] [2]. On définit donc un semi-groupe sous-markovien (Q_t) en posant, pour toute fonction $h\geqq 0$ sur l'espace d'états E

$$(9)\qquad Q_t(x,h) = W_x[h(X_t)M_t]$$

(voir par ex. Dynkin [5], p. 282, th. 9.2). Un théorème classique sur les processus de Markov affirme que l'on peut réaliser ce semi-groupe sur l'espace Ω - c'est pour cela que nous y avons permis une durée de vie finie - par des mesures Q_x possédant la propriété

$$(10)\qquad Q_x[fI_{\{S<\zeta\}}] = W_x[fM_S I_{\{S<\infty\}}]$$

si S est un t. d'a., et f sur Ω est $\mathcal{F}_S$-mesurable positive. Voir

1. Voir aussi l'addition aux références.

Dynkin [5], p. 292, cor. au th. 9.8 , ou Meyer [10], chap. I n°21 (pour les u-processus, mais le cas général est identique). On peut montrer que ce semi-groupe est fortement markovien, mais nous n'insisterons pas.

Voici le point crucial de la démonstration. Pour les développements ultérieurs, nous le donnons explicitement en deux lemmes :

LEMME 1. a) Il existe sur Ω_t une v.a. H , invariante par retournement du temps, telle que $H=\psi^2(X_0)M_t$ W_ξ-p.s..

b) Le semi-groupe (Q_t) est symétrique par rapport à $\rho\xi$, $\rho=\psi^2$.

Démonstration. a) est évident d'après (8) : $H=\psi(X_0)\psi(X_t)\exp(-\int_0^t \frac{A}{\psi}\psi(X_s)ds)$, et il n'y a aucun ensemble de mesure nulle exceptionnel.

b) On a $\langle f,Q_tg\rangle_{\rho\xi} = W_\xi[\rho(X_0)f(X_0)M_tg(X_t)] = W_\xi[f(X_0)Hg(X_t)]$

Comme la mesure W_ξ est invariante par retournement du temps à t, cela est symétrique en (f,g).

LEMME 2. Sous la condition (qui se réduit à (6) dans le cas brownien)

(11) $$\int\Gamma(\psi,\psi)\xi < \infty$$

on peut affirmer que $Q_x\{\zeta<\infty\}=0$ pour $\rho\xi$-presque tout x.

Démonstration. Nous introduisons les t. d'a.

(12) $$\tau_n = \inf\{t : \int_0^t \frac{\Gamma(\psi,\psi)}{\psi^2}(X_s)ds \geqq n\} \quad , \quad \tau = \lim_n \tau_n$$

Sous la loi W_x , $\tau_n=\inf\{t : \langle L,L\rangle_t\geqq n\}$, donc la martingale $L_{t\wedge\tau_n}$ a un crochet borné, la martingale locale $M_{t\wedge\tau_n}$ est uniformément intégrable, et $W_x[M_{\tau_n\wedge n}]=1$ pour tout n. D'après (10), on a $n\wedge\tau_n<\zeta$ Q_x-p.s.. D'après le lemme 1, prenant $f\geqq 0$, on a $\langle (\rho\xi)Q_t,f\rangle = \langle 1,Q_tf\rangle_{\rho\xi} = \langle Q_t1,f\rangle_{\rho\xi} \leqq \langle \rho\xi,f\rangle$ puisque $Q_t1\leqq 1$. Donc la mesure $\rho\xi$ est excessive, et l'on a

$$Q_{\rho\xi}[\int_0^t \frac{\Gamma(\psi,\psi)}{\psi^2}(X_s)ds] \leqq t\int \frac{\Gamma(\psi,\psi)}{\psi^2}\rho\xi = t\int\Gamma(\psi,\psi)\xi < \infty$$

Donc $Q_{\rho\xi}\{\tau<t\}=0$ pour tout t, donc $\zeta=+\infty$ $Q_{\rho\xi}$-p.s..

L'essentiel de la démonstration est fini. La fonction $f=Q_\cdot\{\zeta<\infty\}$ est excessive pour le semi-groupe (Q_t). Soit N l'ensemble $\{f>0\}$; nous savons d'après le lemme 2 que N est négligeable pour $\rho\xi$ (donc pour ξ) . D'autre part, l'ensemble $N^c=\{f=0\}$ est absorbant pour $Q_\cdot$ (une surmartingale positive qui s'annule garde la valeur 0) et porte la mesure $\rho\xi$, donc il peut servir d'espace d'états pour le processus admettant cette mesure initiale. Comme les lois Q_x et W_x sont équivalentes sur $\mathcal{F}_t, t<\infty$, on peut voir en outre que N est polaire pour le mouvement brownien.

Il nous reste à identifier le processus (X_t), sous la loi Q_x , au processus de Nelson .

Soit f appartenant au domaine étendu de A , et soit $x\notin N$. Le processus

$$f(X_t)-f(X_0) - \int_0^t Af(X_s)ds = H_t$$

est une martingale locale sous la loi W_x . Sous la loi Q_x , absolument continue par rapport à W_x sur $\mathcal{F}_t$, le théorème de Girsanov nous dit que le processus $H_t-\langle H,L\rangle_t$ est une martingale locale. De plus, sous la loi Q_x , le crochet de H n'a pas changé.

Cela nous dit d'abord que f appartient au domaine du générateur étendu B de (Q_t), avec $Bf = Af+ \frac{1}{\psi}\Gamma(\psi,f)$.

Appliquant cela aux d fonctions coordonnées sur E , cela nous dit ensuite que le processus $X_t-X_0- \int_0^t b(X_s)ds$ (où $b^i= \frac{1}{\psi}\Gamma(\psi,x^i)=\nu D_i\psi/\psi$) est une martingale locale, de crochets $\nu\delta^{ij}t$ - autrement dit, de la forme $\sqrt{\nu}\, W_t$, où W_t est un mouvement brownien standard. C'est bien l'équation (4).

REMARQUE. La construction du processus nous a montré a priori que la loi de (X_t) est équivalente en temps fini à celle d'un mouvement brownien. Donc toute martingale locale (U_t) de la filtration naturelle du processus de Nelson est continue, et la relation $U_0=0$, $\langle U,X\rangle=0$ entraîne $U=0$. Il est alors immédiat que toute martingale locale orthogonale à W est nulle, donc W permet de représenter les martingales locales de la filtration de X par intégrales stochastiques (on ignore si W engendre la filtration naturelle de X).

Nous aurons besoin plus loin d'une estimation due à Nelson [11], que nous allons présenter maintenant. Soit f une fonction qui appartient au domaine étendu de A . Nous pouvons écrire sous la loi brownienne pour X

$$f(X_t)-f(X_0)-\int_0^t Af(X_s)ds = K_t \quad \text{(sur un intervalle } [0,u] \text{ fini)}$$

où K_t est un certain processus adapté à la filtration en avant . Mais le retournement du temps à l'instant u est un isomorphisme, et en appliquant la formule précédente au processus $\hat{X}_t=X_{u-t}$, on obtient

$$(13) \qquad 2(f(X_t)-f(X_0)) = K_t + \hat{K}_{u-t} - \hat{K}_u$$

où le processus $\hat{K}_s(\omega)=K_s(r_u\omega)$ est adapté à la filtration en arrière de X . Passons au sup sur $[0,u]$ (indiqué par la notation $()^*_u$ usuelle)

$$|f(X_.)-f(X_0)|^*_u \leq K^*_u(.)+K^*_u(r_u.)$$

Sous la loi brownienne, K_t vaut $\int_0^t \mathrm{grad}f(X_s)\cdot dX_s$, et on a le même résultat sous la loi Q_x , absolument continue par rapport à W_x . Nous utilisons la relation $dX_s= b(X_s)ds + \sqrt{\nu}\, dW_s$ pour écrire

$$Q_{\rho\xi}\{|f(X_.)-f(X_0)|_u^* >\lambda\} \leqq 2Q_{\rho\xi}\{K_u^*>\lambda/2\}$$

puisque $K_u^*(.)$ et $K_u^*(r_u.)$ ont même loi par symétrie. On décompose le processus K_u en sa partie martingale

$$K'_u = \int_0^u \sqrt{\nu}\ \mathrm{grad}f(X_s)\cdot dW_s$$

à laquelle on appliquera par exemple l'inégalité de Doob, et sa partie à variation finie

$$K''_u = \int_0^u (\mathrm{grad}f\cdot b)\circ X_s ds \quad .$$

Nous appliquons cela à $f=\log\psi$. Alors

$$Q_{\rho\xi}[(K')_u^{*2}] \leqq 2Q_{\rho\xi}[\int_0^u \nu\ \frac{\mathrm{grad}^2\psi}{\psi^2}(X_s)ds] = 2u\nu\int \mathrm{grad}^2\psi(x)\xi(dx)$$

$$Q_{\rho\xi}[(K'')_u^*] = Q_{\rho\xi}[\int_0^u \nu\ \frac{\mathrm{grad}^2\psi}{\psi^2}(X_s)ds\ ] = u\nu\int \mathrm{grad}^2\psi(x)\xi(dx)$$

Comme nous le verrons plus loin, $\nu\int(\mathrm{grad}^2\psi)\xi$ est l'<u>intégrale de Dirichlet</u> de ψ pour le processus initial (lois W_x) ; notons la $I(\psi)$. Nous voyons donc apparaître pour le processus transformé (lois Q_x) des bornes multiplicatives (qui font penser à des inégalités de Harnack)

(14) $$Q_{\rho\xi}\{\ \sup_{t\leqq u} \frac{\psi(X_t)}{\psi(X_0)}\vee\frac{\psi(X_0)}{\psi(X_t)} >e^\lambda\} \leqq CuI(\psi)/\lambda \ .$$

COMPLEMENTS

Dans cette fin de paragraphe, nous indiquons deux extensions des résultats précédents. L'une de nature purement technique, l'autre, au contraire, de nature générale - comment on pourrait traiter les diffusions symétriques quelconques. Nous ne reviendrons pas sur ces questions dans le paragraphe suivant.

a) Au lieu de supposer, dans la démonstration du lemme 2, que $\Gamma(\psi,\psi)$ est intégrable, supposons la seulement <u>localement</u> intégrable : il existe une fonction continue a partout >0, telle que $a\Gamma(\psi,\psi)$ soit intégrable . Cherchons alors à montrer que $\zeta=+\infty$ $Q_{\rho\xi}$-p.s.. L'essentiel de la démonstration du lemme 2 consiste à remarquer que, sur $\{\zeta<\infty\}$, on a $Q_{\rho\xi}$-p.s. $\int_0^t \frac{\Gamma(\psi,\psi)}{\psi^2}(X_s)ds \underset{t\uparrow\zeta}{\longrightarrow} \infty$. Or la même intégrale avec un poids $a(X_s)$ sous le signe $\int$ est finie pour t fini . Donc $a(X_s)$ ne peut être borné inférieurement en $\zeta-$, sur l'ensemble $\{\zeta<\infty\}$, donc $X_.$ <u>ne peut rester borné</u> au voisinage de $\zeta-$. Si l'on porte cela dans la relation

$$X_t-X_0-\int_0^t b(X_s)ds = \text{martingale locale sur } [0,\zeta[, \text{ de crochets browniens}$$

on voit que $\int_0^t |b(X_s)|ds$ ne peut rester borné à l'instant ζ. Il suffit donc en fait de montrer que $Q_{\rho\xi}[\int_0^t |b(X_s)|ds] < \infty$ pour tout t fini, et cela se ramène à $\int|\psi\mathrm{grad}\psi|\xi < \infty$.

b) Nous pouvons remplacer le mouvement brownien de départ par une diffusion symétrique X quelconque sur un espace d'états E , à durée de vie infinie. Seulement, dans ce cas, nous ne disposons plus de la formule d'Ito $f(X_t)-f(X_0)-\int_0^t Af(X_s)ds = \int_0^t \mathrm{grad} f(X_s)\cdot dX_s$. Par quoi la remplacer ?

Le mot << diffusion >> n'a pas de définition généralement admise, et nous n'essaierons pas d'en donner une. Parmi les qualités que nous exigerons de X, outre les propriétés habituelles d'un bon processus de Markov à durée de vie infinie, il y aura la <u>continuité</u> de toutes les martingales M de la filtration naturelle de X , et l'existence de l'opérateur Γ , i.e. la <u>continuité absolue</u> des crochets $d\langle M,M\rangle_t$ par rapport à dt (Kunita [7], Meyer [9]). Dans ces conditions, voici le substitut de l'opérateur gradient : on choisit (Kunita-Watanabe [8]) une base orthogonale $(\overset{n}{H}_t)$ de martingales locales fonctionnelles additives, i.e. un système maximal de telles martingales locales, nulles en 0, deux à deux fortement orthogonales ($\langle H^i,H^j\rangle=0$ pour $i\neq j$). On peut aussi les normaliser de sorte que $d\langle H^i,H^i\rangle_t/dt$ ne prenne que les valeurs 0 ou 1 . Toute martingale locale fonctionnelle additive M , nulle en 0, admet alors une représentation comme intégrale stochastique

$$M_t = \Sigma_n \int_0^t m_n(X_s)d\overset{n}{H}_s$$

où les fonctions m_n sur l'espace d'états E sont définies par

$$m_n(X_t) = \frac{d\langle M,\overset{n}{H}\rangle_t}{d\langle \overset{n}{H},\overset{n}{H}\rangle_t}$$

mais puisque $d\langle \overset{n}{H},\overset{n}{H}\rangle_t$ ne prend que les valeurs 0 ou 1, on peut plus simplement les définir par $d\langle M,\overset{n}{H}\rangle_t/dt = m_n(X_t)$. En particulier, si f appartient au domaine étendu de A , nous prendrons $M_t=f(X_t)-f(X_0)-\int_0^t Af(X_s)ds$ et nous désignerons par $\overset{n}{\nabla}f$ les fonctions sur E, définies p.p. par

$$\overset{n}{\nabla}f(X_t) = d\langle M,\overset{n}{H}\rangle_t/dt$$

Les opérateurs $\overset{n}{\nabla}$ sont des dérivations ($\overset{n}{\nabla}(fg)=f\overset{n}{\nabla}g+g\overset{n}{\nabla}f$), on a la formule d'Ito généralisée

$$(15)\qquad f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t Af(X_s)ds + \Sigma_n \int_0^t \overset{n}{\nabla}f(X_s)d\overset{n}{H}_s$$

et l'on a aussi $\Gamma(f,f) = \Sigma_n (\overset{n}{\nabla}f)^2$. Non seulement les $\overset{n}{\nabla}$ sont des dérivations, mais il résulte de la formule d'Ito usuelle qu'ils obéissent aux règles usuelles du calcul , **par ex.** $\overset{n}{\nabla}(\Phi\circ f)=\Phi'\circ f\ \overset{n}{\nabla}f$. Le principe de l'extension des résultats aux diffusions symétriques est alors simple : partout où nous utilisons le gradient dans le cas brownien, utiliser les opérateurs $\overset{n}{\nabla}$, et la formule (15).

Nous laisserons au lecteur, s'il en a envie, le soin d'examiner cette généralisation, et revenons au cas brownien.

II. UTILISATION DE L'ESPACE DE DIRICHLET

Dans ce paragraphe, nous allons affaiblir les deux hypothèses faites sur ψ au paragraphe précédent : l'appartenance de ψ au domaine étendu de A sera remplacée par une condition portant sur l'intégrale de Dirichlet $I(\psi) = \int \Gamma(\psi,\psi)\xi$, tandis que la positivité stricte disparaîtra complètement. Nous nous limiterons au cas brownien.

FONCTIONS BLD . L'étude probabiliste des <u>fonctions de Beppo Levi précisées</u> a été faite par Doob [4], après l'étude analytique de Deny-Lions [3]. La version générale de ces travaux peut être trouvée dans le livre [6] de Fukushima, mais nous n'en aurons pas besoin.

On dit qu'une fonction localement sommable f est une fonction BLD si ses dérivées au sens des distributions appartiennent à L^2 , et l'on pose alors $I(f)=\int \mathrm{grad}^2 f\ \xi$ (pour nous, $I(f)$ comporte en plus un facteur ν , mais peu importe ici). Les régularisées habituelles $f*\varphi_k=f_k$ convergent alors en mesure vers f , et $I(f-f_k)\to 0$. Mais on a mieux : si l'on extrait une sous-suite (sans changer de notation) de sorte que $I(f-f_k)\leqq 2^{-k}$, la suite (f_k) converge uniformément en dehors d'ouverts de capacité arbitrairement petite, et sa limite (égale à f p.p.) est <u>finement continue</u> dans le complémentaire d'un ensemble polaire. Une telle version de f sera dite <u>précisée</u>, et nous n'en considérerons pas d'autre.

L'espace des fonctions BLD contient les constantes, et possède une propriété remarquable : il est stable pour les opérations $\vee,\wedge$, et l'on a $I(|f|)\leq I(f)$. En fait, on a $\mathrm{grad} f = \mathrm{sgn}(f)\mathrm{grad}|f|$ p.p., donc pour l'étude qui nous intéresse, et où intervient seulement $\mathrm{grad}\psi/\psi$, on peut aussi bien supposer ψ positive. Nous le ferons dans toute la suite. On notera que dans ce cas les régularisées ψ_k considérées plus haut sont aussi positives.

L'<u>espace de Dirichlet</u> proprement dit est l'espace des fonctions BLD qui appartiennent à L^2 .

NOTATIONS. Nous désignons par ψ une fonction BLD précisée, positive , par ψ_k une suite de régularisées de ψ qui converge q.p. vers ψ (i.e. en dehors d'un ensemble polaire N), avec $I(\psi-\psi_k)\leqq 2^{-k}$. On pose $\psi^2=\rho$.

Nous définissons comme en (12) les temps d'arrêt

$$\tau_n = \inf\{t : \int_0^t \frac{\Gamma(\psi,\psi)}{\psi^2}(X_s)ds \geqq n \} \ , \ \tau=\lim_n \tau_n$$

τ est un temps terminal : sur $\{t<\tau\}$ on a identiquement $\tau(\theta_t\omega)=\tau(\omega)-t$. Sur l'intervalle $[0,\tau[$, on peut définir la martingale locale (cf. (7))

$$L_t = \int_0^t \frac{\mathrm{grad}\psi}{\psi}(X_s).dX_s$$

et par conséquent, sur $[0,\infty[$, la fonctionnelle multiplicative d'espérance $\leqq 1$ (cf. (8) : le facteur $I_{\{t<\tau\}}$ a été ajouté)

(16) $$M_t = \exp(L_t - \langle L,L\rangle_t) I_{\{t<\tau\}}$$

que nous ne pouvons plus écrire sous la forme (8). Comme dans le lemme 2, on a $W_x[M_{n\wedge\tau_n}]=1$ pour tout x tel que $W_x\{\tau>0\}\neq 0$ (ce qui équivaut à $W_x\{\tau>0\}=1$, puisque τ est un t. d'a.). Enfin, nous posons (cf. (9)

$$Q_t(x,f) = W_x[f(X_t)M_t]$$

qui forme toujours un semi-groupe sous-markovien, que nous pouvons réaliser sur Ω . Il y a cependant une petite différence : si x est tel que $\tau=0$ p.s., on a $Q_x\{\zeta=0\}=1$, et on n'a donc pas Q_x-p.s. $X_0=x$: ce semi-groupe n'est pas << normal >> dans la terminologie de Dynkin.

Notre but va consister à montrer que ce semi-groupe est symétrique par rapport à la mesure $\rho\xi$, et que $Q_{\rho\xi}$-p.s. la durée de vie est infinie. Nous allons montrer aussi, en adaptant un raisonnement de Nelson, que les trajectoires du processus associé ne rencontrent jamais l'ensemble $\{\psi=0\}$.

LE CAS MINORÉ

Nous supposons provisoirement que $\psi\geqq\varepsilon>0$. Cela vaut aussi pour les régularisées ψ_k . La condition $I(\psi)<\infty$ entraîne alors que $W_\xi\{\tau<\infty\}=0$. Nous établissons alors

LEMME 3. a) <u>Il existe sur</u> Ω_t <u>une fonction</u> H, <u>invariante par retournement du temps, telle que</u> $\psi^2(X_0)M_t=H$ W_ξ-<u>p.s.</u>.

b) <u>Le semi-groupe</u> (Q_t) <u>est symétrique par rapport à</u> $\rho\xi$, <u>et l'on a</u> $Q_{\rho\xi}\{\zeta<\infty\}=0$.

c) <u>On a</u> $Q_{\rho\xi}\{\ \inf_{t\leqq u}\psi(X_t)\leqq\psi(X_0)e^{-\lambda}\}\leqq uCI(\psi)/\lambda$.

<u>Démonstration</u>. a) Nous utilisons l'approximation ψ_k , et les processus L^k_t, M^k_t correspondants. D'après le paragraphe 1, nous savons que $\psi_k^2(X_0)M^k_t$ est une v.a. H^k invariante par r_t . Si nous pouvons montrer que $M^k_t\to M_t$ en mesure pour W_ξ , nous pourrons réextraire une sous-suite (sans changer de notation) de manière à avoir convergence p.s., et il suffira de poser

$$H = \liminf_k H^k .$$

Il nous suffit de montrer que $W_\xi[(L^k_t-L_t)^2]$ tend vers 0 , car cela entraîne la convergence en mesure de L^k_t vers L^k , et de $<L^k,L^k>_t$ vers $\langle L,L\rangle_t$. Or cela vaut

$$W_\xi[\int_0^t |\frac{\text{grad}\psi}{\psi} - \frac{\text{grad}\psi_k}{\psi_k}|^2(X_s)ds\ ]$$

Mais $\text{grad}\psi_k/\psi_k$ tend p.p. vers $\text{grad}\psi/\psi$, d'où pour W_x-presque tout ω le même résultat après composition avec $X_s(\omega)$, p.p. en s sur $[0,t]$. Il suffit donc d'établir une domination, qui résulte de l'inégalité

$$|\ldots.|^2 \leqq \varepsilon^2(\text{grad}^2\psi + \text{grad}^2\psi_k) \leqq 4\varepsilon^2(\ \text{grad}^2\psi + \text{grad}^2(\psi-\psi_k))$$

alors que la fonction $\mathrm{grad}^2\psi + \Sigma_k \mathrm{grad}^2(\psi-\psi_k) = h$ est ξ-intégrable, et donc $\int_0^t h(X_s)ds$ W_ξ-intégrable.

b) La démonstration est identique à celle des lemmes 1 et 2, compte tenu de a). Faisons quelques remarques supplémentaires

- Comme à la fin du lemme 2 , l'ensemble des x tels que $Q_x\{\zeta<\infty\}=0$ peut servir d'espace d'états au processus de Markov admettant (Q_t) comme semi-groupe de transition, $\rho\xi$ comme mesure initiale. Pour tout x possédant cette propriété, on a $\lim_n \tau_n=+\infty$ Q_x-p.s., et la loi Q_x est absolument continue par rapport à W_x en temps fini : en effet, la surmartingale $\geqq 0$ M_t satisfait à $W_x[M_t] = Q_x\{\zeta>t\} = 1 = W_x[M_0]$, donc c'est une vraie martingale.

- Posons comme d'habitude $b=\nu\mathrm{grad}\psi/\psi$; si $Q_x\{\zeta<\infty\}=0$, on vérifie comme après le lemme 2 que le processus

$$X_t - X_0 - \int_0^t b(X_s)ds \quad \text{sous la loi } Q_x$$

est une martingale locale nulle en 0, de crochets $\nu\delta^{ij}t$, donc de la forme $\sqrt{\nu}\, W_t$ (cf. (4)). Comme après le lemme 2, on vérifie que W permet de représenter les martingales de la filtration naturelle de X .

c) Par passage à la limite à partir des ψ_k, on établit la formule correspondant à (13) : pour $0\leqq t\leqq u$, sous la loi W_ξ

$$\log\psi(X_t)-\log\psi(X_0) = L_t + \hat{L}_{u-t}- \hat{L}_u \quad (\hat{L}_s(\omega)=L_s(r_u\omega))$$

(prendre dans (13) $f=\log\psi_k$). Raisonnant alors comme au § 1, on obtient la formule

$$Q_{\rho\xi}\{ \inf_{t\leqq u} \psi(X_t)\leqq \psi(X_0)e^{-\lambda}\} \leqq CuI(\psi)/\lambda \quad (\lambda>0) \tag{17}$$

PASSAGE AU CAS GENERAL

Nous considérons maintenant une fonction BLD $\psi\geqq 0$, mais non nécessairement >0 ; nous posons $\psi_\varepsilon = \psi\vee\varepsilon$, qui est encore une fonction BLD , avec $I(\psi_\varepsilon)\leqq I(\psi)$. Nous allons lui appliquer les résultats précédents, et passer à la limite (les éléments relatifs à cette fonction seront notés L_t^ε, M_t^ε, Q_t^ε). Nous utiliserons le résultat suivant, qui se démontre en approchant la fonction $x\mapsto x\vee\varepsilon$ sur $\mathbb{R}_+$ par des fonctions C^2 : on a $\mathrm{grad}\psi=\mathrm{grad}\psi_\varepsilon$ p.p. dans l'ouvert fin $\{\psi>\varepsilon\}$. Par conséquent, si l'on pose

$$S_\varepsilon = \inf\{t : \psi(X_t)\leqq\varepsilon\}$$

on a $L_\cdot^\varepsilon=L_\cdot$ sur $[0,S_\varepsilon[$, d'où le même résultat pour M^ε et M . Dans la suite du raisonnement, nous ferons tendre ε vers 0 le long d'une suite arbitraire, et nous désignerons par N la réunion des ensembles polaires exceptionnels pour les semi-groupes (Q_t^ε) , et de l'ensemble où ψ n'est pas finement continue.

Soit $x\notin N$, tel que $\psi(x)\neq 0$. On a $W_x[M^\varepsilon_{t\wedge S_\varepsilon}]=1$, $W_x\{\tau\leqq S_\varepsilon\}=0$, donc aussi $W_x[M_{t\wedge S_\varepsilon}]=1$, autrement dit $t\wedge S_\varepsilon<\zeta$ Q_x-p.s.. La relation $M^\varepsilon_{t\wedge S_\varepsilon}=M_{t\wedge S_\varepsilon}$ W_x-p.s. montre que le processus $(X_{t\wedge S_\varepsilon})$ a la même loi sous Q_x et sous Q^ε_x , et par intégration sous $Q_{\rho\xi}$ et sous $Q^\varepsilon_{\rho\xi}$.

Soit $a>0$; prenons $\varepsilon<a$. Nous avons (cf. (17)) en posant $\lambda=\log(a/\varepsilon)$

$$Q_{\rho\xi}\{\psi(X_0)\geqq a,\ S_\varepsilon<t\}= Q^\varepsilon_{\rho\xi}\{\psi(X_0)\geqq a,\ S_\varepsilon<t\}\ \leqq\ Q^\varepsilon_{\rho\xi}\{\inf_{s\leqq t}\psi(X_s)\leqq\psi(X_0)e^{-\lambda}\}$$
$$\leqq CtI(\psi_\varepsilon)/\log(a/\varepsilon)\ \leqq\ CtI(\psi)/\log(a/\varepsilon)$$

Lorsque $\varepsilon\to 0$, cela tend vers 0, donc $Q_{\rho\xi}\{\psi(X_0)\geqq a,\ \zeta<t\}=0$, et en faisant tendre a vers 0, comme $\rho\xi$ est portée par $\{\psi>0\}$, nous avons

$$(18)\qquad Q_{\rho\xi}\{\zeta<\infty\}=0$$

D'autre part, le même raisonnement montre que $Q_{\rho\xi}\{\lim_\varepsilon S_\varepsilon<+\infty\}=0$: le processus (X_t) sous $Q_{\rho\xi}$ ne rencontre jamais l'ensemble $\{\psi=0\}$.

Autre conséquence : sur $\{t<S_\varepsilon\}$ on a $M_t=M^\varepsilon_t$ p.s. , donc $\psi^2(X_0)M_t$ est invariant par retournement du temps à t . Faisant tendre ε vers 0, on établit pour M_t la conclusion a) du lemme 3, et par conséquent la conclusion b) aussi : le semi-groupe (Q_t) est symétrique par rapport à $\rho\xi$. La conclusion c) vient d'être établie et utilisée plus haut.

Il n'y a alors plus aucune difficulté à conclure, comme on l'a fait plus haut, que

- $Q_x\{\zeta<\infty\}=0$ dans $\{\psi>0\}$, privé d'un ensemble polaire N , tel aussi que
- pour $x\notin N$, sous la loi Q_x , $X_t-X_0-\int_0^t b(X_s)ds$ est de la forme $\sqrt{\nu}\,W_t$, où W est un mouvement brownien standard.

On voit donc que le processus de Nelson peut être construit, dans le cas réversible , pour toute fonction BLD ψ . Que cette hypothèse soit aussi naturelle du point de vue de la mécanique quantique, i.e. que les solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger associée à un potentiel raisonnable, soient effectivement des fonctions BLD, cela est établi dans le travail de Carlen [1]. La situation est donc plutôt satisfaisante.

III. APPENDICE : FONCTIONS D'ONDE COMPLEXES

Nous allons traiter maintenant la construction de diffusions stationnaires, mais non réversibles, associées à une fonction d'onde complexe BLD ψ . Nous poserons $\psi_o=|\psi|$, $\Theta=\psi/|\psi|$ (dans l'ouvert fin $\{\psi\neq 0\}$). Cependant, la construction exige une hypothèse supplémentaire sur ψ , qui n'est pas une condition de régularité mais une propriété algébrique, et pour faire comprendre cela nous reviendrons à la situation du début de l'exposé.

Pour commencer, et puisqu'il s'agit seulement de découvrir quelle est l'hypothèse à faire sur ψ , nous supposerons comme au début que ψ est de la forme e^{R+iS}, R et S étant de classe C^2. Les champs $u,v,b,\hat{b}$ étant définis comme au début de l'exposé (2),(3), nous avons l'équation de Fokker-Planck classique

$$\dot{\rho} = -\mathrm{div}(b\rho) + \frac{\nu}{2}\Delta\rho = -\mathrm{div}(\hat{b}\rho) - \frac{\nu}{2}\Delta\rho = -\mathrm{div}(\rho v)$$

La stationnarité ($\dot{\rho}=0$) exige donc $\mathrm{div}(\rho v)=0$, soit comme $\rho=e^{2R}$, $v=\nu\,\mathrm{grad}S$

(19) $$2e^{2R}\left(\frac{\nu}{2}\Delta S + \nu\,\mathrm{grad}R.\mathrm{grad}S \right) = 0$$

Introduisons maintenant la diffusion de semi-groupe (Q_t), associée dans la première partie à la fonction d'onde réelle $\psi_o=|\psi|$, symétrique par rapport à la mesure $\eta=\rho\xi$, de générateur $Bf = Af + \frac{1}{\psi_o}\Gamma(\psi_o,f)$ ($f\in\mathcal{D}(A)$; on rappelle que $A=\frac{\nu}{2}\Delta$, $\Gamma(f,g)=\nu\,\mathrm{grad}f.\mathrm{grad}g$). La condition (19) signifie exactement que $BS=0$, autrement dit que $S(X_t)$ <u>est une martingale locale</u> sous les lois Q_x.

Cependant, nous ne pouvons pas donner un sens clair à S lorsque ψ est seulement une fonction BLD : il faut exprimer la condition précédente en termes de $\Theta=\psi/|\psi|$, qui est une fonction de module 1 bien définie sur l'espace d'états $\{\psi\neq 0\}$ de la diffusion modifiée (nous avons vu que celle-ci ne rencontre pas les noeuds de ψ). Formellement, on a $\Theta=e^{iS}$, donc S est l'argument de Θ. Comme $\Theta(X_t)$ est un processus continu à valeurs dans le cercle unité, nous définissons une fonctionnelle additive réelle (Λ_t) en posant

(20) Λ_t = variation de l'argument de $\Theta\circ X_.$ entre 0 et t .

Cette quantité bien définie est la traduction en langage correct de l'expression formelle $S(X_t)-S(X_0)$, et <u>nous imposerons à</u> (Λ_t) <u>d'être une martingale locale</u>. D'après le théorème de Girsanov, nous savons a priori que $<\Lambda,\Lambda>_t$ est absolument continu. Développant $\Theta(X_t)=\Theta(X_0)e^{i\Lambda_t}$ par la formule d'Ito, nous obtenons

$$\Theta(X_t) = \Theta(X_0) + i\int_0^t \Theta(X_s)d\Lambda_s - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta(X_s)d<\Lambda,\Lambda>_s$$

d'où l'on tire que Θ appartient au domaine étendu de B , avec

$$B\Theta(X_s) = -\frac{1}{2}\Theta(X_s)\frac{d<\Lambda,\Lambda>_s}{ds}$$

Puis, en formant le crochet des deux semimartingales $<\Theta(X_t),f(X_t)>$ pour $f\in\mathcal{D}(B)$ (et en notant Γ l'opérateur carré du champ Γ_B, qui est une extension de Γ_A)

$$\Gamma(\Theta,f)(X_s)ds = i\Theta(X_s)d<\Lambda,f(X)>_s$$

Prenant $f=\Theta$, on en déduit sans peine

(21) $$B\Theta = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\Theta,\Theta)}{\Theta} \qquad d<\Lambda,f(X)>_s = -i\frac{\Gamma(\Theta,f)}{\Theta}(X_s)ds$$

et aussi $$d<\Lambda,\Lambda>_s = -\frac{\Gamma(\Theta,\Theta)}{\Theta^2}(X_s)ds$$

La première des conditions (21) peut être considérée comme exprimant de manière analytique notre hypothèse que (Λ_t) soit une martingale locale , ou encore (19).

Nous utilisons maintenant la martingale locale fonctionnelle additive (Λ_t) pour construire, par la formule exponentielle, deux martingales locales fonctionnelles multiplicatives

$$M_t = \exp(\Lambda_t - \tfrac{1}{2}<\Lambda,\Lambda>_t) \quad , \quad \hat{M}_t = \exp(-\Lambda_t - \tfrac{1}{2}<\Lambda,\Lambda>_t)$$

et les deux semi-groupes sousmarkoviens correspondants

(22) $$K_t(x,f) = Q_x[f(X_t)M_t] \quad , \quad \hat{K}_t(x,f) = Q_x[f(X_t)\hat{M}_t] \quad .$$

Disons tout de suite que ce sont les deux semi-groupes des processus de Nelson en avant et en arrière, le point délicat étant, comme dans la première partie, de démontrer que la durée de vie est p.s. infinie (toutefois, l'essentiel du travail a déjà été fait dans le cas réel). Admettant pour un instant ce point, on déduit en effet du théorème de Girsanov que si $f\in\mathcal{D}(B)$ (en particulier si $f\in\mathcal{D}(A)$), f appartient au domaine étendu des générateurs C et $\hat{C}$ des deux semi-groupes, avec

$$Cf = Bf - i\,\frac{1}{\Theta}\Gamma(\Theta,f) \qquad , \qquad \hat{C}f = Bf + i\,\frac{1}{\Theta}\Gamma(\Theta,f)$$

et si l'on se rappelle que $Bf = Af + \frac{1}{\psi_0}\Gamma(\psi_0,f)$, on voit bien apparaître des expressions qui s'écrivent formellement $\Gamma(R\pm S,f)=\nu\,\mathrm{grad}(R\pm S)\cdot\mathrm{grad}f$, les termes du premier ordre des générateurs de Nelson.

Passons à l'étude des semi-groupes (22). Nous commençons par démontrer

LEMME 4. a) <u>Les semi-groupes</u> (K_t) <u>et</u> $(\hat{K}_t)$ <u>sont en dualité par rapport à la mesure</u> $\eta=\rho\xi$.

b) <u>La mesure</u> η <u>est excessive par rapport à</u> (K_t) <u>et</u> $(\hat{K}_t)$.

<u>Démonstration</u>. b) est une conséquence immédiate de a). En effet, si f est une fonction positive

$$<\eta K_t,f> = <\eta,K_tf> = <1,K_tf>_\eta = <\hat{K}_t1,f>_\eta \leqq <1,f>_\eta = <\eta,f> .$$

Démontrons donc a). Soient f et g deux fonctions bornées. On a

$$<f,K_tg>_\eta = Q_\eta[f(X_0)g(X_t)M_t] = Q_\eta[f(X_0)\exp\Lambda_t\exp(-\tfrac{1}{2}<\Lambda,\Lambda>_t)g(X_t)]$$

La mesure Q_η est invariante par retournement du temps à t ; par retournement du temps, $f(X_0)$ devient $f(X_t)$, $g(X_t)$ devient $g(X_0)$; $<\Lambda,\Lambda>_t$ est une intégrale de 0 à t d'une certaine fonction le long de la trajectoire, et ne change pas. Quant à Λ_t , la variation d'argument étant prise en sens contraire il est remplacé par $-\Lambda_t$. On peut donc poursuivre la chaîne d'égalités

$= Q_\eta[f(X_t)g(X_0)\hat{M}_t] = < g,\hat{K}_t f >_\eta$. □

Nous démontrons maintenant que la durée de vie de (K_t), par exemple, est p.s. infinie sous la mesure initiale η . La démonstration est exactement la même que celle du lemme 2 : la mesure η étant excessive, il s'agit de démontrer que $< \Lambda,\Lambda >_t$ a une espérance finie sous K_η , pour tout t fini, et cela se ramène à vérifier que $\Gamma(\Theta,\Theta)/\Theta^2$ est η-intégrable. Mais ici Θ est de module 1, et cela se ramène à vérifier que $\Gamma(\Theta,\Theta)$ est η-intégrable.

Nous allons utiliser le fait que ψ est une fonction BLD complexe . Bien que l'on puisse tout exprimer en termes d'opérateurs Γ, la démonstration est si simple au moyen des gradients que nous ne voudrions pas la cacher. Formellement, elle s'écrit (en prenant $\nu=1$ pour simplifier)

$$\operatorname{grad}\psi = \operatorname{grad}(\psi_o\Theta) = \Theta\operatorname{grad}\psi_o+\psi_o\operatorname{grad}\Theta$$

$\operatorname{grad}\psi$ est un vecteur de carré intégrable par rapport à ξ , et on a le même résultat pour $\operatorname{grad}\psi_o$ (ψ_o est aussi une fonction BLD) et pour $\Theta\operatorname{grad}\psi_o$ puisque Θ est de module 1. Donc le dernier vecteur $\psi_o\operatorname{grad}\Theta$ est aussi de carré intégrable. Mais cela signifie aussi que $\operatorname{grad}\Theta$ est de carré intégrable par rapport à $\psi_o^2\xi=\eta$, le résultat désiré.

Comment exprimer cela de manière probabiliste, en donnant un sens satisfaisant aux divers << gradients >> ? Les composantes a_i de $\operatorname{grad}\psi$ sont définies par le fait que, sous la loi W_ξ

$$\psi(X_t) = \psi(X_0) + \Sigma_i \int_0^t a_i(X_s)dX_s^i + A_t$$

où les X^i sont les composantes du mouvement brownien (une base de martingales orthogonales) et (A_t) est un processus à variation quadratique nulle. Sous la loi Q_ξ ou Q_η , le théorème de Girsanov nous dit que l'on a une formule analogue, mais avec les martingales X^i corrigées par le changement de loi en $Y^i = X^i - <X^i,L>$

$$\psi(X_t) = \psi(X_0) + \Sigma_i \int_0^t a_i(X_s)dY_s^i + A_t^1$$

de même

$$\psi_o(X_t) = \psi_o(X_0)+ \Sigma_i \int_0^t b_i(X_s)dY_s^i + A_t^2 \qquad (\psi_o \text{ est BLD })$$

$$\Theta(X_t) = \Theta(X_0) + \Sigma_i \int_0^t c_i(X_s)dY_s^i + A_t^3 \qquad (\Theta\in\mathcal{D}(B))$$

et l'on a $\Gamma(\psi,\psi)=\Sigma_i a_i^2$ puisque $\Sigma_i d<Y^i,Y^i>_t = dt$, et de même pour les autres. Dans ces conditions , Föllmer a montré que la partie martingale du processus $\psi(X_t)=\psi_o(X_t)\Theta(X_t)$ peut se calculer de deux manières, ce qui donne les égalités

$$a_i = b_i\Theta+\psi_o c_i$$

qui est la forme probabiliste de la relation $\operatorname{grad}\psi = \Theta\operatorname{grad}\psi_o+\psi_o\operatorname{grad}\Theta$, et justifie le raisonnement ci-dessus.

REFERENCES

[1]. CARLEN (E.). Conservative diffusions. Prepublication. Princeton University, Physics Department, Janvier 1984.

[2]. CARMONA (R.). Processus de diffusion gouverné par la forme de Dirichlet de l'opérateur de Schroedinger. Sém. Prob. XIII, LN.721, 1979.

[3]. DENY (J.) et LIONS (J.L.). Les espaces du type de Beppo Levi. Ann. Inst. Fourier 5, 1953/54, p. 305-370.

[4]. DOOB (J.L.). Boundary properties of functions with finite Dirichlet integrals. Ann. Inst. Fourier 12, 1962, p. 573-621.

[5]. DYNKIN (E.B.). Markov processes, vol. I. Springer 1965.

[6]. FUKUSHIMA (M.). Dirichlet forms and Markov processes. North-Holland/ Kodansha 1980.

[7]. KUNITA (H.). Absolute continuity of Markov processes and generators. Nagoya Math. J. 36, 1969, p. 1-26.

[8]. KUNITA (H.) et WATANABE (S.). On square integrable martingales. Nagoya Math. J. 30, 1967, p. 209-245.

[9]. MEYER (P.A.). L'opérateur carré du champ. Sém. Prob. X, LN 511, p. 142. Springer 1976.

[10]. MEYER (P.A.). Processus de Markov : la frontière de Martin. LN 77, Springer 1968.

[11]. NELSON (E.). Quantum Fluctuations. Princeton, 1984 (à paraître) . Version préliminaire : cours de 3e cycle de Physique, Lausanne 1983.

ADDITION. Nous nous sommes aperçus qu'une démonstration très voisine (y compris le point essentiel qu'est le caractère markovien du semi-groupe) figure dans un travail de M. FUKUSHIMA et M. TAKEDA : A transformation of a symmetric Markov process and the Donsker-Varadhan theory, dont nous reconnaissons bien volontiers la priorité. Cet article est à paraître en 1984 dans Osaka J. of Mathematics.

I.R.M.A. et East China Normal University
7 rue René Descartes — Shanghai
F-67084 Strasbourg-Cedex, France — People's Republic of China