Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Paul-André Meyer

Sur la théorie de Littlewood-Paley-Stein, d'après Coifman-Rochberg-Weiss et Cowling

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 19 (1985), p. 113-129

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__113_0>

SUR LA THEORIE DE LITTLEWOOD-PALEY-STEIN

(d'après Coifman-Rochberg-Weiss et Cowling)

par P.A. Meyer

Cet exposé présente des démonstrations récentes des inégalités de Littlewood-Paley-Stein, utilisant le << procédé de transfert >> de Coifman et Weiss. Ces démonstrations permettent d'aller plus loin que les méthodes de Stein (et que les méthodes de martingales, qui sont de toute façon moins puissantes), en permettant surtout d'atteindre le cas <u>sous-markovien</u>, qui est tout à fait important dans les applications. J'ai essayé de mettre l'accent sur certains aspects de ces travaux que leurs auteurs, pressés d'accumuler beaucoup de résultats en peu de place, ont traités de manière assez rapide.

Voici le problème : soit μ une <u>distribution tempérée</u> sur $\mathbb{R}_+$, c'est à dire un élément du dual de l'espace des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ (y compris en 0), à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées de tous ordres. Une telle distribution admet une transformée de Laplace holomorphe dans le demi-plan $\mathcal{R}z>0$

(1) $$m(z) = \int e^{-zs}\mu(ds)$$

(en notant la valeur de μ sur une fonction-test comme s'il s'agissait d'une mesure). Nous considérons ensuite un semi-groupe (P_t) comme on en rencontre en probabilités, sur un espace E, sous-markovien avec une mesure excessive η . Nous voulons donner un sens à l'expression

(2) $$P_\mu = \int_0^\infty P_s\mu(ds)$$

en tant qu'opérateur borné sur $L^p(\eta)$ pour certaines valeurs de p . Symboliquement, si l'on pose $P_t=e^{-tL}$, P_μ est l'opérateur $m(L)$. La méthode de transfert permet de faire cela pour des semi-groupes généraux. Ensuite, la méthode d'interpolation complexe permet d'atteindre des classes beaucoup plus larges de distributions μ dans le cas des semi-groupes sousmarkoviens <u>symétriques</u>. Quant à la théorie de Littlewood-Paley-Stein proprement dite, elle s'interprête comme un problème analogue, mais où la distribution μ est à valeurs dans un espace de Hilbert au lieu d'être réelle.

Comme les résultats anciens de Stein n'ont jamais été exposés dans ce séminaire, nous commençons par les présenter rapidement.

I. RAPPELS SUR LA THEORIE DE L-P-S .

La théorie de Stein suppose dès le début que le semi-groupe (P_t) est symétrique. Alors on a sur L^2 une représentation spectrale du semi-groupe

(3) $$P_t = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dE_\lambda$$

et l'opérateur P_μ est borné sur L^2 dès que la fonction $m(z)$ est bornée sur l'axe réel, car on a simplement

(4) $$m(L) = P_\mu = \int_0^\infty m(\lambda) dE_\lambda$$

(noter en passant une petite difficulté : la fonction 1 n'est pas une fonction-test, donc $m(0)$ n'est pas définie, et 0 doit être exclu de l'intervalle d'intégration). Nous allons donner des exemples d'opérateurs de ce type, bornés sur les L^p pour $1<p<\infty$.

i) <u>La décomposition de Littlewood-Paley</u>. Pour k entier $\geqq 1$ (en fait, on pourrait prendre k réel > 0), on considère l'opérateur borné sur L^2

(5) $$U_t^{(k)} = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^\infty \lambda^k t^k e^{-\lambda t} dE_\lambda$$

Pour k entier, c'est simplement $\frac{(-t)^k}{\Gamma(k)} D^k P_t$, où D représente d/dt. Il est immédiat de calculer sur (5)

(6) $$\int_0^\infty U_t^{(k)} \frac{dt}{t} = \int_{]0,\infty[} dE_\lambda = I - E_0$$

Notons L_0^2 le noyau de E_0 . La formule

(7) $$f = \int_0^\infty U_t^{(k)} f \frac{dt}{t} \quad \text{pour } f \in L_0^2$$

est appelée une <u>décomposition de Littlewood-Paley</u> de f . J'ai trouvé cette terminologie chez Y. Meyer, du moins pour $k=1$; Y. Meyer fait remarquer que c'est un substitut pour la formule d'inversion de Fourier, tandis que la formule suivante remplace le théorème de Plancherel

(8) $$< f,g > = c_k \int_0^\infty < U_t^{(k)} f, U_t^{(k)} g > \frac{dt}{t} \quad \text{pour } f,g \in L_0^2 \quad .$$

La seule valeur de c_k méritant d'être retenue est $c_1=4$. Définissons maintenant les opérateurs de Stein : nous prenons une fonction $r(t)$ appartenant à L^∞ et nous posons

(9) $$T(k,r) = \int_0^\infty r(t) U_t^{(k)} \frac{dt}{t}$$

La fonction $m(z)$ correspondante est

(10) $$m(z) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^\infty r(t) z^k t^k e^{-zt} \frac{dt}{t}$$

et la distribution μ vaut $\frac{1}{\Gamma(k)}(-D)^k[t^{k-1}r(t)]$. Elle est donc localement d'ordre arbitrairement élevé.

ii). Inégalités de Littlewood-Paley. Pour établir que les $T(k,r)$ sont bornés sur L^p, $1<p<\infty$, Stein introduit les fonctions de L-P : pour k entier ≥ 1

(11) $$g_k(f) = \left(\int_0^\infty |U_t^{(k)}f(.)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} = \left(\int_0^\infty |t^k D^k P_t f(.)|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}$$

Le théorème de Littlewood-Paley-Stein est alors l'équivalence de normes

(12) $$c\|g_k(f)\|_p \leq \|f\|_p \leq c\|g_k(f)\|_p$$

l'inégalité de gauche étant vraie sur L^p, l'inégalité de droite seulement sur L_0^p , i.e. l'espace des éléments de L^p sans partie invariante au sens de la théorie ergodique. Montrons rapidement comment ces inégalités entraînent que les opérateurs $T(k,r)$ sont bornés :

LEMME. Si $f\in L_0^2$, $u=T(k,r)f$, on a $g_1(u)\leq cg_{k+1}(f)$.

Ici c désigne une constante pouvant dépendre seulement de $p,k,\|r\|_\infty$. On écrit alors $\|u\|_p \leq c\|g_1(u)\|_p \overset{(12)}{\leq} c\|g_{k+1}(f)\|_p \leq c\|f\|_p$, et on a fini.

Démonstration du lemme. On écrit successivement, en supposant $|r|\leq 1$ pour fixer les idées

$$\begin{aligned}
u &= c\int s^k D^k P_s f\, r(s)\frac{ds}{s} \\
P_t u &= c\int s^k D^k P_{t+s} f\, r(s)\frac{ds}{s} \\
\frac{d}{dt} P_t u &= c\int s^k D^{k+1} P_{t+s} f\, r(s)\frac{ds}{s} \\
t\left|\frac{d}{dt}P_t u\right|^2 &\leq ct\left(\int s^k |D^{k+1}P_{t+s}f|\frac{ds}{s}\right)^2 \leq ct\left(\int_t^\infty s^k|D^{k+1}P_s f|\frac{ds}{s}\right)^2 \\
&\leq ct\left(\int_t^\infty s^{2k+1}|D^{k+1}P_s f|^2\frac{ds}{s}\right)\left(\int_t^\infty s^{-1}\frac{ds}{s}\right) \quad \text{(Schwarz)}
\end{aligned}$$

Le dernier facteur vaut $1/t$ et disparaît avec t en tête, et il reste après intégration en t

$$g_1(u)^2 \leq c\int_0^\infty dt \int_t^\infty (\ldots)\frac{ds}{s} = c\int_0^\infty (\ldots)\frac{ds}{s}\int_0^s dt = cg_{k+1}(f)^2 \; . \; \square$$

iii) Un exemple important. La fonction

$$r(t) = t^{-i\alpha}/\Gamma(1-i\alpha)$$

appartient à L^∞, et sa transformée de Laplace vaut $z^{i\alpha-1}$. La distribution $\mu=-Dr = \text{v.p. } t^{-i\alpha-1}/\Gamma(-i\alpha)$ est du type précédent, avec $k=1$, et sa transformée de Laplace est $z^{i\alpha}$ (sa transformée de Fourier $(-iu)^{i\alpha}$). Construire l'opérateur P_μ revient à définir symboliquement l'opérateur $L^{i\alpha}$. D'après le th. de Stein, celui-ci est borné sur L^p, $1<p<\infty$.

v) Indications sur la méthode de Stein. Le point crucial est la démonstration des inégalités (12). Pour cela, Stein introduit pour une fonction h de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}_+$ l'opérateur d'intégration fractionnaire

$$I^{\alpha}h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds$$

que l'on peut aussi considérer comme distribution à valeurs vectorielles : $\mu(h)$ est la fonction $t \longmapsto I^{\alpha}h(t)$. On la définit d'abord pour $\mathcal{R}(\alpha)>0$, puis pour tout α complexe par prolongement analytique. On a $I^{\alpha}I^{\beta}=I^{\alpha+\beta}$ pour $\mathcal{R}(\beta)\geqq 0$, I^0 est l'identité , I^1h est la primitive de h nulle en 0, $I^{-k}h = D^kh$ pour k entier $\geqq 1$. On pose encore $M^{\alpha}h(t) = t^{-\alpha}I^{\alpha}h(t)$, et l'on introduit des << fonctions de Littlewood-Paley >>

$$m_{\alpha}(f) = \left(\int_0^{\infty} t|DM^{\alpha}P_tf|^2 \, dt \right)^{1/2} \qquad (\alpha \text{ complexe })$$

Pour $\alpha=0,-1,-2...$ ces fonctions sont liées aux $g_k(f)$, et l'on vérifie aisément que $\|m_{\alpha}(f)\|_2 \leqq c_{\alpha}\|f\|_2$. Pour $\alpha=1$, Stein établit que $\|m_{\alpha}(f)\|_p \leqq c_p\|f\|_p$. Après quoi, il étend ces inégalités aux valeurs complexes $\alpha=-k+iu$, (dans L^2) et $\alpha=1+iu$ (dans L^p), et utilise la méthode d'interpolation complexe : si k est pris assez loin, on obtient que pour $\mathcal{R}(\alpha) \leqq 1$ arbitraire on a $\|m_{\alpha}(f)\|_p \leqq c_{\alpha,p}\|f\|_p$, et en particulier, pour $\alpha=0,-1$, etc. on obtient les moitiés gauches des inégalités (12). Les moitiés droites s'établissent alors par dualité.

vi) Indications sur la méthode de Cowling. Le travail de Cowling étudie directement les opérateurs $T(k,r)$ à partir de la propriété suivante des distributions μ considérées : la transformée de Laplace $m(z)$ est bornée sur tout angle $|\arg z|\leq\omega$ avec $\omega<\pi/2$. Dans un tel angle, nous avons en effet $z=\lambda+iu$, $\lambda>0$ et $|u|\leqq C\lambda$. Or en utilisant (10) nous avons

$$|m(\lambda+iu)| = \left|\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^{\infty} r(t)(\lambda+iu)^k t^k e^{-\lambda t} \frac{dt}{t}\right| \leqq (1+C)^k\|r\|_{\infty} \quad .$$

La méthode de Cowling va permettre de dire qu'une distribution μ dont la transformée de Laplace est bornée dans tout angle d'ouverture $<\Theta$ définit un opérateur P_{μ} borné sur L^p

- Pour tout p, $1<p<\infty$ si $\Theta=\pi/2$ (cas de Stein), avec deux faits nouveaux :

si $\Theta=\pi/2$, on n'a plus besoin que (P_t) soit markovien et η invariante : Θ peut être sous-markovien et η excessive ;

si $\Theta>\pi/2$, (P_t) n'a plus besoin d'être symétrique.

- Si $\Theta < \pi/2$, pour certaines valeurs de p (d'autant plus serrées autour de p=2 que Θ est plus petit).

II. LA METHODE DE TRANSFERT

La méthode de transfert est une généralisation, due à Coifman et Weiss [3], [4], [2], d'un procédé de Calderòn [1] utilisé pour l'étude de la << transformation de Hilbert ergodique >> (introduite elle même par Cotlar). Coifman et Weiss en ont fait un outil pour l'étude des représentations des groupes. Nous reprenons leur démonstration en la rédigeant dans un langage plus proche de la théorie des semi-groupes.

LE THEOREME PRINCIPAL

On considère un semi-groupe G , polonais par exemple, avec une opération notée + mais qui n'est pas nécessairement commutative ($(x,y)\to x+y$ est supposée continue). On munit G d'une mesure positive σ-finie ν , sous-invariante à droite

(13) $$\int\nu(ds)f(s+t) \leqq \int\nu(s)f(s) \quad (t\in G,\ f\geqq 0) .$$

Lorsque G est un groupe, ν est invariante, mais nous appliquerons cela aussi avec $G=\mathbb{R}_+$, ν étant la mesure dt .

On fait l'hypothèse suivante :

(14) $\forall C$ compact, $\forall\varepsilon>0$, il existe M de mesure finie tel que $\frac{\nu(M+C)}{\nu(M)} \leqq 1+\varepsilon$

Dans le cas des groupes, C-W imposent à M d'être un voisinage de l'élément neutre, et signalent que cette propriété (condition de Følner) caractérise les groupes moyennables .

On se donne une mesure bornée μ , de masse totale $\|\mu\|$, et l'on définit une convolution

(15) $$f*\mu(s) = \int_G f(s+t)\mu(dt)$$

On a alors en désignant par $\|\ \|_p$ la norme dans $L^p(\nu)$, et en supposant pour commencer que $\|\mu\|\leqq 1$

$$\begin{aligned}\|f*\mu\|_p^p &= \int\nu(ds)|\int f(s+t)\mu(dt)|^p \leqq \int\nu(ds)(\int|f(s+t)|\,|\mu(dt)|)^p \\ &\leqq \int\nu(ds)\int|f(s+t)|^p|\mu(dt)| \quad (\text{Jensen}) \leqq \|f\|_p^p\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la propriété (13) à la fin. Cela signifie que la convolution avec μ définit un opérateur borné sur L^p, de norme au plus $\|\mu\|$ (par homogénéité). Nous désignerons cette norme par $N_p(\mu)$.

On considère ensuite une représentation de G par des opérateurs bornés P_t d'un espace $L^p(E,\underline{\underline{E}},\eta)$ (on pourra supposer que $\underline{\underline{E}}$ est une tribu séparable). Représentation signifie que $P_sP_t=P_{s+t}$, et que $t\mapsto P_t$ est fortement continue. On suppose aussi que

(16) $$\|P_tf\|_p \leqq c\|f\|_p \quad (\text{normes dans } L^p(\eta))$$

ce qui est tout à fait normal, mais aussi

(17) $\qquad \|f\|_p \leqq c\|P_t f\|_p$

ce qui est une conséquence immédiate de (16) dans le cas où G est un groupe, mais semble tout à fait anormal dans le cas des semi-groupes. Cependant, lorsque $G=\mathbb{R}_+$, une très belle astuce de Coifman-Weiss permettra de se débarrasser de cette hypothèse gênante, dans le cas des semi-groupes (P_t) vraiment intéressants.

THEOREME 1. <u>La norme d'opérateur dans</u> L^p <u>de l'opérateur linéaire</u>

$$P_\mu = \int_G P_s\mu(ds)$$

<u>est au plus</u> $c^2N_p(\mu)$.

<u>Démonstration</u>. 1) On se ramène au cas des mesures à support compact, en décomposant μ en $\mu'+\mu''$ (μ' à support compact, $\|\mu''\|<\varepsilon$) ; on utilise ici le minimum de régularité imposé à G. Alors $N_p(\mu')\leqq N_p(\mu)+\varepsilon$, donc si l'on a établi le résultat pour μ' on a $\|P_\mu\|_p\leqq c^2(N_p(\mu)+\varepsilon)+c\varepsilon$, et il ne reste qu'à faire tendre ε vers 0.

2) On suppose désormais que le support de μ est un compact C. Soit $f\in L^p$.

On choisit une version bimesurable $h(s,x)$ de $P_s f(x)$ (possible en raison de la continuité forte), et on montre que (en mettant x en indice pour plus de clarté)

$$P_\mu f(x) = \int h_x(s)\mu(ds) \quad \text{pour presque tout } x$$

$$P_tP_\mu f(x) = \int h_x(t+s)\mu(dx) \quad \text{pour presque tout } x \text{ (} t \text{ fixé)}$$

cette fonction étant bimesurable en (t,x). Pour voir cela, faire le produit scalaire avec $g\in L^q$. On prend alors le M de l'hypothèse du début et on écrit

$$I_M(t)P_tP_\mu f(x) = I_M(t)\int h_x(t+s)I_C(s)\mu(ds) \quad (\mu \text{ portée par } C)$$

$$= I_M(t)\int h_x(t+s)I_{M+C}(t+s)I_C(s)\mu(ds)$$

et le dernier I_C peut être supprimé : reste donc $I_M(t)(hI_{M+C}*\mu)(t)$. On élève à la puissance p et on intègre en x

$$I_M(t)\| P_tP_\mu f\|_p^p = I_M(t)\int_E |h_xI_{M+C}*\mu|^p(t)\eta(dx)$$

On intègre en t . A gauche, d'après (17) le résultat majore $c^{-p}\nu(M)\|P_\mu f\|_p^p$. A droite en enlevant le I_M on obtient au plus

$$\begin{aligned} N_p(\mu)^p\int\eta(dx)\|h_xI_{M+C}\|_p^p &= N_p^p(\mu)\int\eta(dx)\int|P_tf(x)|^pI_{M+C}(t)dt \\ &= N_p^p(\mu)\int dt I_{M+C}(t)\int\eta(dx)|P_tf(x)|^p \\ &\leqq c^pN_p^p(\mu)\nu(M+C)\|f\|_p^p \end{aligned}$$

et comme $\nu(M+C)/\nu(M) \leq 1+\varepsilon$ le théorème est établi.

COMMENTAIRES. a) Coifman et Weiss indiquent comment on peut transférer des propriétés de type faible (p,p). Nous laissons cela de côté.

b) On aura remarqué les hypothèses relativement faibles imposées à la mesure ν (sous-invariance, et (14)), de sorte que l'on pourra en général choisir ν de bien des manières. A vrai dire, la sous-invariance de ν ne nous a pas servi à grand chose : seulement à ramener les mesures bornées aux mesures à support compact. De quelle façon le résultat dépend t'il du choix de ν ?

Supposons que G soit un sous-semi-groupe d'un groupe E , avec une mesure de Haar à droite η . Nous définissons une représentation de G dans $L^p(\eta)$ en posant pour $t\in G$

$$P_t f(x) = f(x+t)$$

et comme η est invariante à droite, cette représentation satisfait à (16) et (17) avec c=1 . Donc, d'après le théorème lui même, on a $\|P_\mu\|_{L^p(\eta)} \leq N_p(\mu)$. Or P_μ est l'opérateur de convolution défini par μ sur E . Autrement dit, la norme de convolution de μ sur le groupe est au plus égale à la norme $N_p(\mu)$, calculée sur le semi-groupe par rapport à une mesure sous-invariante ν satisfaisant à (14).

Supposons ensuite que G soit de mesure non nulle dans H, et soit $\bar{\nu}$ la trace de la mesure de Haar η ; $\bar{\nu}$ est sous-invariante. Il est clair que la norme de convolution de μ calculée dans $L^p(\bar{\nu})$ est au plus la norme de convolution de μ calculée dans $L^p(\eta)$ sur le groupe entier. Donc cette norme est au plus égale à $N^p(\mu)$.

Supposons enfin que $\bar{\nu}$ satisfasse à (14). Alors nous obtenons deux résultats. 1) Il ne sert à rien de travailler avec d'autres mesures ν que la trace $\bar{\nu}$ de la mesure de Haar, car celle-ci donne la plus petite norme $N_p(\mu)$ possible. 2) La norme de convolution de μ pour $\bar{\nu}$ sur le semi-groupe et pour η sur le groupe entier sont les mêmes. Cela clarifie peut être la note en bas de la page 22 de Coifman et Weiss [3].

c) Soulignons les deux difficultés d'application de ce théorème, que nous lèverons l'une après l'autre : l'hypothèse (17) (triviale dans le cas des groupes, mais non dans celui des semi-groupes), et le passage des <u>mesures bornées</u> aux distributions, lorsque $G=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$.

En outre, nous aurons besoin de passer du cas où μ est réelle, au cas où μ est à valeurs hilbertiennes. Nous le ferons tout à la fin du paragraphe.

SUPPRESSION DE L'HYPOTHESE (17) LORSQUE $G=\mathbb{R}_+$

Lorsque l'on suppose que (P_t) est un semi-groupe de <u>contractions positives</u> d'un espace L^p, on peut se passer de l'hypothèse 17. Coifman et Weiss établissent cela, en s'appuyant sur des résultats délicats dus à

Akcoglu (cf. Canadian J. M. 27, 1975, p. 1075-1082 : A pointwise ergodic theorem in L^p spaces) et Akcoglu-Sucheston (Dilations of positive contractions in L^p spaces, Canadian Math. Bulletin , 19 , p.). En fait, Coifman-Rochberg-Weiss peuvent même atteindre certaines contractions complexes " presque" positives. Nous n'essaierons pas de présenter cette théorie générale, mais nous nous restreindrons à la situation intéressante pour les probabilistes.

Nous supposons désormais que (P_t) est un semi-groupe sous-markovien de noyaux sur E , admettant η comme mesure excessive, suffisamment bon pour que l'on puisse lui appliquer la théorie usuelle des processus de Markov (semi-groupe ≪ droit ≫). Nous supposerons aussi que le semi-groupe adjoint (P_t^*) de (P_t) relativement à η possède les mêmes propriétés.

Du point de vue de la théorie de la mesure, il n'y a pas là de perte sérieuse de généralité : tout semi-groupe de contractions positives de L^1 et L^∞ peut être ramené, par un changement d'espace et une compactification, à une situation du type précédent.

a) Supposons d'abord que le semi-groupe (P_t) soit markovien ($P_t 1=1$) et la mesure η invariante. Désignons par Ω l'ensemble des applications continues à droite et pourvues de limites à gauche de $\mathbb{R}$ dans E (muni d'une topologie convenable...), par X_t l'application coordonnée d'indice t , par $\underline{\underline{F}}$ la tribu engendrée par les coordonnées, par Θ_t la translation ($X_s(\Theta_t\omega)=X_{s+t}(\omega)$; $t\in\mathbb{R}$), par $\overline{\eta}$ l'unique mesure sur Ω pour laquelle (X_t) est un processus de Markov, admettant (P_t) comme semi-groupe de transition et η pour loi à chaque instant t . Alors les Θ_t forment un groupe de transformations préservant la mesure $\overline{\eta}$, et le théorème 1 s'applique, l'hypothèse (17) étant automatiquement satisfaite avec c=1, et l'on voit que l'opérateur Θ_μ est borné sur $L^p(\overline{\eta})$, avec une norme $\leqq N_p(\mu)$.

Mais soit $f\in L^p(\eta)$; nous lui associons la fonction sur Ω $\overline{f}=f\circ X_0$, telle que $\|\overline{f}\|_{L^p(\overline{\eta})} = \|f\|_{L^p(\eta)}$. Puis nous remarquons que $P_t f(X_0)$ est l'espérance conditionnelle $E[f\circ X_t|X_0] = E[\overline{f}\circ\Theta_t|X_0]$. Comme l'espérance conditionnelle diminue la norme L^p, on a bien établi que

$$(18)\qquad \left\| \int_0^\infty P_t f\ \mu(dt) \right\|_p \leqq N_p(\mu)\|f\|_p \quad .$$

Or il n'y a aucune raison de s'arrêter en si bon chemin : soit μ une mesure bornée sur $\mathbb{R}$; construisons l'opérateur Θ_μ , et conditionnons par X_0 comme ci-dessus . Nous obtenons le résultat bien plus surprenant

$$(19)\qquad \left\| \int_{-\infty}^0 P_{-t}^* f\ \mu(dt) + \int_0^\infty P_t f\ \mu(dt) \right\|_p \leqq N_p(\mu)\|f\|_p$$

où (P_t^*) est le semi-groupe adjoint de (P_t). Autrement dit, P_t et P_t^* sont suffisamment proches pour que l'on ait une certaine << cancellation >> de ces deux intégrales. C'est un résultat inattendu, inaccessible aux méthodes du paragraphe I, qui sont très liées à la théorie spectrale des semi-groupes symétriques.

b) Lorsque (P_t) est sous-markovien, et la mesure η excessive au lieu d'être invariante, on a une construction analogue, mais bien moins évidente, due à J. Mitro (Dual Markov processes : construction of a useful auxiliary process ; ZW 47, 1979, p. 139-156). Ici Ω est l'espace des applications continues à droite à limites à gauche définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans E , à <u>instant de naissance</u> α <u>et de mort</u> β <u>aléatoires</u>. Ainsi on a $X_t(\omega)\in E$ pour $\alpha\leq t<\beta$, $X_t(\omega)=\partial$ (un point supplémentaire) pour $t<\alpha$ et $t\geq\beta$. Si l'on rend markovien le semi-groupe (P_t) en posant $P_t(x,\{\partial\})=1-P_t(x,E)$, et si f est une fonction nulle au point ∂ , on peut construire sur Ω une mesure $\overline{\eta}$ <u>invariante par les</u> θ_t et possédant les propriétés suivantes

1) $\int_\Omega f(X_t)\overline{\eta} = < \eta,f >$ pour tout t

2) Sur l'ensemble $\{X_t\in E\}$, le processus $(X_{t+s})_{s\geq 0}$ est markovien, de semi-groupe de transition (P_t) et de mesure initiale η (de durée de vie $(\beta-t)^+$), et le processus $(X_{t-s})_{s\geq 0}$ markovien, de semi-groupe de transition (P_t^*) , mesure initiale η , et durée de vie $(t-\alpha)^+$.

On peut alors reproduire sur ce processus le raisonnement fait en a), avec les mêmes conclusions.

Du point de vue des résultats concrets, cette extension aux semi-groupes sousmarkoviens me semble être une amélioration très importante.

PASSAGE DES MESURES BORNEES AUX DISTRIBUTIONS. I .

Les questions que nous allons présenter ici ne sont mentionnées ni chez Cowling, ni dans l'article principal [3] de Coifman-Weiss. Elles sont traitées dans un autre article [4] de Coifman-Weiss. La rédaction m'a donné du mal, et une première version (qui a circulé) était complètement fausse.

Voici la situation : μ est une distribution sur $\mathbb{R}_+$, qui est un convoluteur de L^p ($\|f*\mu\|_p \leq N_p(\mu)\|f\|_p$ pour les fonctions-test). Il est exclu d'approcher μ par des mesures bornées en norme $N_p(\cdot)$, mais on va réussir à l'approcher par des mesures bornées μ_n , <u>au sens des distributions</u>, de telle sorte que $N_p(\mu_n)\leq N_p(\mu)$. On sait alors que $\|P_{\mu_n}f\|_p$ reste majoré par $N_p(\mu)\|f\|_p$ pour $f\in L^p(\eta)$, et il reste à trouver suffisamment de fonctions f sur lesquelles $P_{\mu_n}f$ converge pour $n\to\infty$, au moins au sens faible dans L^p, pour pouvoir définir l'opérateur P_μ .

Qu'il y ait une difficulté se voit immédiatement sur le fait que, si f est une fonction invariante pour (P_t), $P_\mu f$ ne saurait avoir d'autre sens que $f\mu(1)$, alors que 1 n'est pas une fonction-test et que $\mu(1)$ n'est pas définie a priori. L'opérateur P_μ ne sera donc défini en général que sur L^p_0 , l'espace des $f\in L^p$ sans partie invariante.

Dans cette section, nous allons seulement décrire l'approximation de μ par les mesures bornées μ_n . Le transfert proprement dit sera fait dans la section suivante.

D'après les commentaires suivant le th.1, la mesure ν sur $\mathbb{R}_+$ peut être (et sera toujours) la mesure dx .

a) Soit μ_t la distribution définie par $\mu_t(f)=\int f(t+s)\mu(ds)$; on a $f*\mu_t(s) = f*\mu(t+s)$, donc $N_p(\mu_t) \leqq N_p(\mu)$. Si Θ est une mesure positive de masse 1 sur $\mathbb{R}_+$, la distribution $\int \mu_t\Theta(dt)$ est donc un convoluteur de L^p de norme $\leqq N_p(\mu)$. Prenons $\Theta(dt)= a_n(t)dt$, où a_n est une cloche positive C^∞ d'intégrale 1, nulle hors de l'intervalle $[0,1/n]$. Alors $\mu^n= \int a_n(t)\mu_t dt$ tend vers μ au sens des distributions.

Mais la distribution μ sur $\mathbb{R}_+$ peut être considérée comme une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$, et μ^n (comme distribution sur $\mathbb{R}$) est une régularisée de μ : elle a une densité C^∞ à croissance polynômiale, nulle sur $]-\infty,0]$. En tant que distribution sur $\mathbb{R}_+$, μ^n a la même densité.

b) La distribution $m_u(dt) = e^{iut}\mu(dt)$ est telle que

$$f*m_u(s) = \int f(s+t)e^{iut}\mu(dt) = e^{-ius}((fe^{iu\cdot})*\mu)(s)$$

Donc m_u est un convoluteur de L^p de même norme que μ. Par conséquent, si Θ est une mesure de masse 1 sur $\mathbb{R}$, $(\int e^{iut}\Theta(du))\mu(dt)$ est un convoluteur de L^p de norme au plus $N_p(\mu)$.

Si l'on prend pour $\Theta(du)$ un noyau de Féjer $c\sin^2 nu du/u$, le convoluteur obtenu est à support compact. Mais nous n'aurons pas besoin de cela, et nous prendrons pour Θ une loi de Cauchy, de sorte que $\int\Theta(du)e^{iut}= e^{-c|t|}$. Ainsi, pour tout convoluteur $\mu(dt)$ de $L^p(\mathbb{R}_+)$, la distribution $e^{-ct}\mu(dt)$ sur $\mathbb{R}_+$ est un convoluteur de norme plus petite (d'où aussi le même résultat pour $e^{-zt}\mu(dt)$, $\Re(z)\geq 0$).

c) La distribution μ dont on est parti est donc limite, au sens des distributions, des <u>mesures bornées</u> $e^{-ct}\mu_n(dt)$ (les μ_n en a) étant à croissance polynômiale) lorsque $n\to\infty$ et $c\to 0$. Ce sont des convoluteurs de $L^p(\mathbb{R}_+)$ de norme au plus $N_p(\mu)$, et on peut leur appliquer le théorème 1. On peut en déduire quelques conséquences, qui n'étaient pas évidentes a priori :

- μ est un convoluteur de $L^p(\mathbb{R})$, de même norme $N_p(\mu)$.
- Si p et q sont conjugués, on a $N_p(\mu)=N_q(\mu)$.

Exemples. a) Les distributions que nous avons considérées au paragraphe I (transformées de Laplace en (10)) ne sont pas des convoluteurs de $L^p(\mathbb{R}_+)$, bien qu'elles opèrent sur les semi-groupes symétriques. En effet, soit μ un convoluteur de $L^p(\mathbb{R}_+)$; la fonction e^{-zt} ($\Re(z)>0$) étant une fonction-test, on a $\|e^{-z\cdot}*\mu\|_p \leqq N_p(\mu)\|e^{-z\cdot}\|_p$, d'où $|m(z)|\leqq N_p(\mu)$. Or les distributions considérées ont une transformée de Laplace non bornée dans le demi-plan de droite.

b) L'exemple le plus classique de multiplicateurs de Fourier pour L^p est fourni par le théorème de Marcinkiewicz en dimension 1 : si m(u) est une fonction bornée en module par M, dérivable pour $u\neq 0$ avec $|m'(u)|\leqq M/|u|$, alors m(u) est transformée de Fourier d'un convoluteur de $L^p(\mathbb{R})$, de norme majorée par c_pM (cf. Stein [8], p. 96). En fait, avec nos notations, m(z) désigne la transformée de Laplace de μ , et la transformée de Fourier est m(-iu), ce qui revient à un simple changement d'écriture.

Cela s'applique à $m(z)=z^{i\alpha}$ (l'<< exemple important >> du § I) : le transfert permettra donc de définir $L^{i\alpha}$ pour tout semi-groupe sous-markovien, symétrique ou non.

Cowling a fait remarquer aussi que cela s'applique à toute distribution μ sur $\mathbb{R}_+$, dont la transformée de Laplace m(z) peut être prolongée en une fonction holomorphe dans un angle $\Gamma_\Theta=\{|\arg(z)|<\Theta\}$ d'ouverture $\Theta=\frac{\pi}{2}+\varepsilon$, où elle est bornée par une constante M. En effet, la formule de Cauchy permet de calculer m'(iu) en un point de l'axe imaginaire, et de vérifier que $|m'(iu)|\leq cM/|u|\sin\varepsilon$, qui est une majoration du type précédent. Nous ferons au paragraphe suivant de l'interpolation complexe à partir de ce résultat.

PASSAGE DES MESURES BORNEES AUX DISTRIBUTIONS. II.

Soit g une fonction bornée sur E, nulle hors d'un ensemble de mesure finie ; g appartient à tous les L^r, $1\leqq r\leqq\infty$, et il en est de même de la fonction

$$f = \int_0^\infty a(s)P_sg\, ds \tag{20}$$

où a(s) est une fonction C^∞ à support compact dans $]0,\infty[$. Les fonctions de ce type engendrent un sous-espace dense dans tous les L^p ($1\leqq p<\infty$), et l'on a

$$\frac{d^n}{dt^n}P_tf = (-1)^n \int_0^\infty P_sg\, D^na(s-t)ds \tag{21}$$

aussi bien ponctuellement qu'au sens L^p . Pour tout x et tout c>0 la fonction $t\mapsto e^{-ct}P_tf(x)$ est une fonction-test sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc définir en tout point x la valeur de la fonction

$$(22)\qquad P^c_\mu f(x) = \int_0^\infty e^{-ct} P_t f(x)\mu(dx)$$

qui est aussi limite simple (les mesures μ^n étant les régularisées de μ considérées dans la section précédente) des fonctions $P^c_{\mu^n} f = \int_0^\infty e^{-ct} P_t f(x)\mu^n(dx)$. Le théorème 1 et une application du lemme de Fatou nous donnent alors

$$(23)\qquad \|P^c_\mu f\|_p \leqq N_p(\mu)\|f\|_p$$

pour les fonctions f du type (20), d'où un prolongement par densité à tout L^p .

D'autre part, si $h \in L^q$ la fonction $e^{-ct} < P_t f, h >$ est elle aussi une fonction-test, donc $P^c_{\mu^n} f$ (qui reste borné dans L^p) a une limite faible lorsque $n \to \infty$. Une suite faiblement convergente dans L^p qui converge en mesure converge fortement vers sa limite en mesure, donc en fait pour f du type (20), $P^c_{\mu^n} f$ converge fortement dans L^p vers $P_\mu f$. A nouveau, on étend ce résultat par densité à tout $f \in L^p$.

Le problème plus délicat consiste à faire tendre c vers 0. Nous réglons d'abord un cas facile.

Cas des semi-groupes symétriques. Soit d'abord $f \in L^2_0$, à spectre dans $[\varepsilon, \infty[$, $\varepsilon > 0$: alors pour $h \in L^2$

$$< P_t f, h > = \int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t} d < E_\lambda f, h >$$

est une fonction-test, d'où il résulte sans peine que $P^c_\mu f$ converge faiblement dans L^2 vers $P_\mu f = \int_0^\infty m(\lambda) dE_\lambda f$. Comme les opérateurs sont uniformément bornés en norme L^2, on étend cette convergence à L^2_0 tout entier. On vérifie aisément que $\|P_\mu f\|_p \leqq N_p \|f\|_p$ pour $f \in L^2_0$.

Soit ensuite L^p_0 l'ensemble des éléments de L^p sans partie invariante. Soit $f \in L^p_0$, et soit (h_n) une suite d'éléments de $L^2 \cap L^p$ qui converge vers f fortement dans L^p . Alors les parties invariantes $i(h_n)$ appartiennent à $L^2 \cap L^p$ et convergent vers 0 dans L^p. Donc on peut appliquer le résultat précédent aux $h_n - i(h_n) \in L^2_0$, et en déduire que $\|P_\mu f\| \leqq N_p(\mu)\|f\|_p$ pour $f \in L^p_0$: le transfert est achevé.

Cas non symétrique. Nous allons revenir à la méthode qui nous a permis d'établir le théorème pour les semi-groupes, en les ramenant à un groupe de transformations Θ_t préservant la mesure, puis à une projection.

Nous utilisons le théorème de représentation de Stone pour le groupe à un paramètre Θ_t d'opérateurs unitaires (en écrivant $\Theta_t h$ pour $h \circ \Theta_t$)

$$(24)\qquad \Theta_t h = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iut} dE_u h$$

après quoi il est facile de calculer $\Theta^c_\mu h = \int_0^\infty e^{-ct} \Theta_t h \, \mu(dt)$

$$\Theta_\mu^c h = \int_{-\infty}^{+\infty} m(c+iu)\, dE_u h \qquad (h\in L^2(\Omega),\ c>0)$$

et le problème de la convergence dans L^2 lorsque $c\to 0$ se ramène à examiner si $m(c+iu)\to m(iu)$ p.p. pour la mesure $d\langle E_u h,h\rangle$. En fait, on s'intéresse seulement au cas où $h=f\circ X_0$ ($f\in L^2(\eta)$), l'existence de $\Theta_\mu h$ donnant alors l'existence de $P_\mu f$.

Ici Coifman et Weiss n'entrent plus dans les détails : ils supposent ([4], p. 295, lemme 3.5) que la fonction m est << normalisée >>, ce qui revient à peu près à dire que $m(c+iu)$ a une limite pour tout u lorsque $c\to 0$. Certainement, cette condition est trop forte ! Par exemple, dans l'exemple donné à la fin de la section précédente où m est holomorphe dans un angle d'ouverture $> \pi/2$, on sait que $m(c+iu)\to m(iu)$ pour $u\neq 0$, et cela suffit à établir le résultat pour $f\in L^2_0$, car la mesure spectrale $d\langle E_u h,h\rangle$ admet comme transformée de Fourier $t\mapsto \langle P_{|t|}f,f\rangle$, qui tend vers 0 à l'infini, et elle ne charge donc pas 0 .

Il est vraisemblable qu'en fait aucune condition n'est nécessaire, comme le suggère le cas particulier suivant. Supposons que (P_t) soit markovien et admette η comme mesure invariante. Soit $\underline{\underline{F}}_t$ pour $t\in\mathbb{R}$ la tribu engendrée par les X_s, $s\leq t$, et soit $\underline{\underline{F}}_{-\infty} = \cap_t \underline{\underline{F}}_t$. Alors la v.a. $h=f\circ X_0$ admet une représentation de la forme

$$h = E[h|\underline{\underline{F}}_{-\infty}] + \Sigma_i \int_{-\infty}^{0} c_i(s)dZ_s^i$$

(cf. Sém. Prob. IX, Lecture Notes in M. 465, p. 55) où les Z^i sont des hélices du flot en quantité au plus dénombrable. Il en résulte que si le premier terme est nul, la mesure spectrale $d\langle E_u h,h\rangle$ est absolument continue (même réf., bas de la p.56), et comme $m(c+iu)\to m(iu)$ p.p. (valeur au bord d'une fonction holomorphe bornée : th. de Fatou) on a bien convergence de $\Theta_\mu^c h$ dans L^2 lorsque $c\to 0$. Mais pour $h=f(X_0)$ on a $E[h|\underline{\underline{F}}_{-t}] = P_t f\circ X_{-t}$, qui tend vers 0 dans L^2 pour $f\in L^2_0$, et donc $E[h|\underline{\underline{F}}_{-\infty}]$ est nulle.

Le pasage de L^2_0 à L^p_0 se fait comme dans le cas symétrique.

TRANSFERT POUR CERTAINES DISTRIBUTIONS HILBERTIENNES

Soit $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_j)$ un système fini de distributions, dont chacune est un convoluteur de L^p. Nous définirons $f*\mu$ comme le vecteur des $f*\mu_i$, $P_\mu h$ comme le vecteur des $P_{\mu_i}h$, et leurs normes comme

(25) $\qquad \|f*\mu\|_p = \|(\Sigma_i |f*\mu_i|^2)^{1/2}\|_p\ ,\quad \|P_\mu h\|_p = \|(\Sigma_i |P_{\mu_i}h|^2)^{1/2}\|_p$

et $N_p(\mu)$ est $\sup_{\|f\|_p\leq 1} \|f*\mu\|_p$. On a l'extension suivante du théorème de transfert

(26) $$\|P_\mu f\|_p \leqq N_p(\mu)\|f\|_p \qquad f\in L^p(\eta)$$

(f est scalaire, $P_\mu f$ est un vecteur), sous les mêmes conditions que dans le cas scalaire : sans restriction lorsque les μ_i sont des mesures bornées ; pour $f\in L_0^p$ si les μ_i sont des distributions et le semi-groupe (P_t) est symétrique ; avec un point d'interrogation pour de << mauvais >> multiplicateurs dans le cas non symétrique.

La démonstration recopie celle du cas scalaire.

Bien entendu, lorsqu'on a traité le cas d'un nombre fini de distributions, le passage au cas dénombrable est immédiat. Autrement dit, on a étendu le théorème de transfert aux distributions sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$. La seule différence est que la transformée de Laplace $m(z) = \int e^{-zs}\mu(ds)$ (et sa valeur au bord $m(-iu)$, la transformée de Fourier) sont maintenant à valeurs dans $\mathcal{H}$.

Ajoutons que le théorème de multiplicateurs de Marcinkiewicz mentionné plus haut, et la conséquence qu'en tire Cowling, s'appliquent au cas hilbertien[1]: si $m(z)$ est holomorphe bornée dans un cône d'ouverture $> \pi/2$, $P_\mu f$ appartient à $L^p_{\mathcal{H}}(E,\eta)$ pour toute fonction $f\in L^p_{\mathbb{C}}(\eta)$.

III. LA THEORIE DE LITTLEWOOD-PALEY

a) Nous commençons par interpréter les fonctions de Littlewood-Paley introduites au paragraphe I . Nous introduisons la distribution μ_k sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans l'espace hilbertien $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+, dt/t)$, qui associe à la fonction-test h l'élément de $\mathcal{H}$

(27) $$\mu_k(h) = (t \mapsto t^kD^kh(t))$$

Alors l'inégalité de L-P-S (12) (moitié gauche) $\|g_k(f)\|_p \leqq c_p\|f\|_p$ signifie simplement que l'opérateur P_{μ_k} est borné de $L^p(\eta)$ dans $L^p_{\mathcal{H}}(\eta)$.

La méthode que nous avons présentée consiste à regarder la transformée de Laplace $m_k(z)$ de μ_k , qui vaut

(28) $$m_k(z) = (t \mapsto (-1)^kt^kz^ke^{-zt})$$

et nous avons pour $z=\lambda+iu$ $\|m_k(z)\|_{\mathcal{H}} = c_k|z|^k/\lambda^k$: la transformée de Laplace est donc bornée sur les cônes $\Gamma_\theta = \{|\arg(z)|\leqq\theta\}$ pour $\theta<\pi/2$.

Cette propriété ne permet pas d'établir directement les inégalités (12), mais elle a une conséquence très intéressante : en fait, la fonction de L-P-S la plus importante en pratique est la fonction $g_k(f)$ relative, non au semi-groupe (P_t) lui même, mais au semi-groupe

1. La démonstration de Stein ([8],p.96) repose sur les inégalités de L-P classiques (pour le semi-groupe de Poisson) et celles-ci sont vraies dans le cas hilbertien. Il y a là un amusant va et vient entre les divers théorèmes, dû aux hasards pédagogiques.

(29) $$Q_t = \int \rho_t(ds)P_s$$

où (ρ_t) est le semi-groupe stable sur $\mathbb{R}_+$, de transformée de Laplace $\int \rho_t(ds)e^{-zs} = e^{-t\sqrt{z}}$. Calculer l'opérateur Q_{μ_k} revient à calculer P_{ν_k}, où ν_k est la distribution à valeurs dans $\mathcal{H}$ de transformée de Laplace $m_k(\sqrt{z})$. Mais celle-ci est holomorphe bornée sur tout cône d'ouverture $< \pi$, et le transfert s'applique, même dans le cas (sous-markovien et) non-symétrique. Ajoutons que l'inégalité est vraie dans L^p et non seulement dans L^p_0 .

[Cependant, pour passer des inégalités de gauche en (12) aux inégalités de droite, on a besoin de la dualité fournie par la symétrie du semi-groupe ; les inégalités dans le cas non-symétrique semblent donc dépourvues d'intérêt].

b) Nous allons maintenant rappeler les ingrédients analytiques dont nous aurons besoin. Le premier est le théorème d'interpolation de Stein (Stein [7], p. 69). On considère une famille (U_w) d'opérateurs linéaires, indexée par la bande $S_1=\{w : 0\leq\Re w\leq 1\}$, holomorphe au sens suivant : si f et g sont des fonctions simples (combinaisons linéaires finies d'indicatrices d'ensembles), la fonction $< U_w f,g >$ est continue bornée dans S_1 , holomorphe dans S_1° .

THEOREME 2 (Stein). Supposons que pour $\Re(w)=0$ on ait $\|U_w\|_{p_0}\leq M_0$, et pour $\Re(w)=1$ $\|U_w\|_{p_1}\leq M_1$. Alors pour $\Re(w)=t$ on a $\|U_w\|_{p_t}\leq M_0^{1-t}M_1^t$, où $\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}$.

Ce théorème est à la base de la méthode de démonstration de Stein, rappelée sommairement au § I, v). Il est aussi à la base de la modification proposée par Coifman-Rochberg et Weiss : dans celle-ci, au lieu d'interpoler comme Stein entre les valeurs $\Re(\alpha)=-k$; L^2 et $\Re(\alpha)=1$, L^p , on va un peu plus loin vers la droite ($\Re(\alpha)>1$), ce qui permet d'utiliser le transfert au lieu des inégalités de martingales employées par Stein : d'où un gain appréciable en généralité.

c) Nous considérons une fonction $m(\lambda)$ sur l'axe réel, et nous supposons qu'elle est prolongeable analytiquement en une fonction $m(z)$ holomorphe, bornée par une constante M , dans un cône $\Gamma_\psi = \{|\arg(z)|<\psi\}$. Nous voulons montrer que l'opérateur $m(L)$ - bien défini sur L^2_0 par représentation spectrale, puisque (P_t) est supposé symétrique - est borné sur L^p pour $|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|<\frac{\psi}{\pi}$. Si $\psi>\pi/2$, le transfert résout la question, et il n'y a pas besoin de symétrie. Nous supposons donc $\psi\leq\pi/2$.

On choisit un angle $\Theta>\pi/2$, un paramètre $\delta<1$, assez près de 1 pour que $\delta\Theta+(1-\delta)\psi>\pi/2$, et on utilise le lemme suivant

LEMME. Il existe une famille de fonctions $m_w(\lambda)$ sur $]0,\infty[$, indexées par la bande $0\leqq\mathcal{R}(w)\leqq\Theta$, et possédant les propriétés suivantes

1) Pour tout λ , $m_{\cdot}(\lambda)$ est holomorphe dans la bande ouverte, continue bornée sur la bande fermée, avec borne uniforme indépendante de λ .

2) Pour $\mathcal{R}(w)=\varphi$, $m_w(.)$ est prolongeable analytiquement en une fonction holomorphe dans l'angle $\Gamma_{\delta\varphi+(1-\delta)\psi}$, bornée (indépendamment de Im(w)) dans tout angle un peu plus petit.

3) $m_{\psi+i0}(\lambda)=m(\lambda)$.

Il est alors clair que l'on peut appliquer le théorème d'interpolation de Stein en prenant pour $0\leqq\mathcal{R}(w)\leqq 1$ $U_w=m_{w\Theta}(L)$: pour $\mathcal{R}(w)=0$ on a une borne uniforme dans L^2 obtenue par théorie spectrale, pour $\mathcal{R}(w)=1$ une borne uniforme dans L^p obtenue par transfert ($(1-\delta)\psi+\delta\Theta>\pi/2$). D'où par interpolation un résultat pour $\mathcal{R}(w)=\psi/\Theta$ qui s'applique à $m_\psi=m$. Prenant Θ près de $\pi/2$, δ près de 1, on obtient les bornes indiquées.

Le même raisonnement devrait, je suppose, s'appliquer à un multiplicateur à valeurs dans $\mathcal{H}$, donnant ainsi les inégalités de L-P-S. Mais le cas réel est déjà assez compliqué.

d) Démonstration du lemme (?). Cette démonstration est très sommairement indiquée par Cowling, ce qui m'a mis en rage contre les referees de Ann. of Math..

D'abord, il est plus facile, au lieu de travailler sur un angle Γ_ψ à élargir en un angle Γ_Θ , de travailler sur une bande $\{|Im(z)|<a\}$, à élargir en une bande $\{|Im(z)|<b\}$. On se donne donc une fonction $p(x)$ ($p(x)=m(e^x)$) bornée sur l'axe réel, prolongeable en une fonction holomorphe bornée $p(x+iy)$ pour $|y|\leqq a$ (et même si l'on veut, quitte à diminuer a, dans une bande plus large). Soit M sa borne.

La transformée de Fourier de la fonction bornée $p(x+iy)$ est $e^{-yu}\hat{p}(u)$ ($\hat{p}$ est ici une distribution). Le résultat est classique (Paley-Wiener : Fourier transforms in the complex domain, chap. I) lorsque $p(.+iy)$ est borné dans L^2. Pour passer au cas général, multiplier p par $e^{-\varepsilon z^2}$, puis faire tendre ε vers 0.

Donc $\hat{p}(u)Ch(yu)$ est transformée de Fourier d'une fonction bornée pour $|y|\leqq a$. L'idée de la démonstration consiste à définir $p_w(x)$ par quelque chose du genre

$$p_w(.) = \mathcal{F}^{-1}(\ \hat{p}(u)Ch(\delta u)^{a-w}) \qquad (\delta<1) .$$

Il est d'abord clair que $p_a=p$. Pour vérifier la condition de borne sur l'axe réel, on écrit la fonction

$$(\hat{p}(u)/\mathrm{Ch}(au)).\ (\mathrm{Ch}^{a-w}(\delta u)/\mathrm{Ch}(au))$$

Le premier facteur est la transformée de Fourier d'une fonction bornée $q(x)$, le second appartient à $\underline{\underline{S}}$, donc est la transformée de Fourier d'une fonction $h_w(x)\in\underline{\underline{S}}$, et l'on a $p_w = q*h_w$. Pour obtenir des normes uniformes, il faut majorer la norme de h_w dans L^1, et une méthode pour faire cela consiste à majorer les normes dans L^2 de $h_w(x)$ et de $xh_w(x)$, ce qui revient à majorer les normes dans L^2 de $\hat{h}_w(u)$ et de sa dérivée. J'espère que ça marche. Après tout, ce n'est pas mon affaire.

Ensuite, le prolongement analytique : on a formellement

$$p_w(x+iy) = \mathcal{F}^{-1}(\ \hat{p}(u)\mathrm{Ch}(\delta u)^{a-w}e^{-yu}\ )$$

et tout revient, comme ci-dessus, à voir si $\mathrm{Ch}(\delta u)^{a-w}e^{-yu}/\mathrm{Ch}(au)$ est dans $\underline{\underline{S}}$ et à estimer sa norme L^1. Lorsque $\Re(w)=v$, on voit apparaître la condition $|y|<(1-\delta)a+\delta v$.

En fait, Cowling utilise une fonction un peu plus subtile, qui lui évite le paramètre δ . Mais comme il dit simplement << by Fourier analysis, one sees that... >>, le lecteur ira regarder s'il en a envie.

REFERENCES

[1]. CALDERÓN (A.P.). Ergodic theory and translation invariant operators. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 59, 1968, p. 349-353.

[2]. COIFMAN (R.R.), ROCHBERG (R.), WEISS (G.). Applications of transference : the L^p version of von Neumann's inequality and the Littlewood-Paley-Stein theory. Linear spaces and approximation p. 53-67. Birkhaueser 1978.

[3]. COIFMAN (R.R.) et WEISS (G.). Transference methods in analysis. CBMS regional conference series n°31. Amer. Math. Soc. 1977.

[4]. COIFMAN(R.R.) et WEISS (G.). Operators associated with amenable groups, singular integrals induced by ergodic flows, the rotation method and multipliers. Studia Math. 47, 1973, p. 285-303.

[5]. COWLING (M.G.). Harmonic analysis on semigroups. Ann. of M. 117, 1983.

[6]. COWLING (M.G.). On Littlewood-Paley-Stein theory. Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, 1, 1981, p. 21-55.

[7]. STEIN (E.M.). Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory. Ann. Math. Studies 63, Princeton 1970.

[8]. STEIN (E.M.). Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton Univ. Press.