Séminaire de probabilités (Strasbourg)

François Bronner

Sur les grandes déviations abstraites. Applications aux temps de séjours moyens d'un processus

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 82-90
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__82_0>

SUR LES GRANDES DEVIATIONS ABSTRAITES

APPLICATIONS AUX TEMPS DE SEJOURS MOYENS D'UN PROCESSUS.

F. BRONNER *

Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ un espace polonais ou lusinien muni de sa tribu des boréliens et $(P_\alpha)_{\alpha>0}$ une famille de probabilités sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ dont on étudie le comportement lorsque $\alpha\uparrow+\infty$. Classiquement, on obtient un théorème de "grandes déviations" donnant l'existence d'une fonctionnelle "d'action" I sur $\mathcal{X}$, telle que pour tout borélien A de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ $P_\alpha(A) \not\approx \exp(-\alpha I(A))$. Un résultat bien connu de Varadhan montre qu'alors pour toute fonction $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ continue bornée

(1) $\lim\limits_{\alpha\uparrow\infty} \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log} E_\alpha(e^{\alpha F}) = \sup(F(x)-I(x)\ ;\ x\in\mathcal{X})$. (cf. [5]).

En fait, comme on se propose de le montrer ici ; l'existence de la limite sous forme donnée par la formule (1) est équivalente au résultat de "grandes déviations". On en profitera ensuite pour reprendre l'exemple des temps de séjours moyens d'un processus dans un borélien de l'espace de ses états.

I - GRANDES DEVIATIONS ABSTRAITES

On munit l'ensemble des fonctions continues bornées $\mathcal{C}_b(\mathcal{X},\mathbb{R})$ sur $\mathcal{X}$ de la topologie de la convergence uniforme. On fait l'hypothèse suivante dans ce paragraphe

<u>Hypothèse</u> (H) <u>Il existe une fonctionnelle "d'action"</u> $I : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ <u>telle que pour tout</u> $a>0$ $\mathcal{I}_a = \{I\leq a\}$ <u>soit compact dans</u> $\mathcal{X}$.

On pose pour tout borélien A de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ $I(A) = \inf\{I(x)\ ;\ x\in A\}$.
On peut alors énoncer

<u>Proposition 1</u> : <u>Sous l'hypothèse</u> (H) <u>les deux propriétés suivantes sont équivalentes</u>

(i) <u>(Grandes déviations)</u>: <u>Pour tout ouvert</u> A <u>de</u> $\mathcal{X}$

$$\varliminf_{\alpha\uparrow\infty} \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log} P_\alpha(A) \geq -I(A),$$

<u>et, pour tout fermé</u> A <u>de</u> $\mathcal{X}$

$$\overline{\lim_{\alpha\uparrow\infty}} \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log} P_\alpha(A) \leq -I(A).$$

(ii) <u>Pour toute fonction</u> F <u>de</u> $\mathcal{C}_b(\mathcal{X},\mathbb{R})$ <u>la limite suivante existe et vérifie</u>

$$\lim_{\alpha\uparrow\infty} \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log} E_\alpha(e^{\alpha F}) = \sup(F(x)-I(x)\ ;\ x\in\mathcal{X}).$$

On pose $H(F) = \lim_{\alpha\uparrow\infty} \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log} E_\alpha(e^{\alpha F})$ lorsque cette limite existe.

<u>Démonstration</u> : <u>i $\Longrightarrow$ ii)</u> : résultat de Varadhan [5].

<u>ii) $\Longrightarrow$ i)</u> : démonstration de la majoration pour les fermés.

Posons $\overline{\lim_{\alpha\uparrow\infty}} \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log} P_\alpha(A) = -b$ avec $b \geq 0$. Si $b=+\infty$ il n'y a rien à démontrer on se limite donc à $b<+\infty$. Supposons d'abord $0 \leq b < 1$. Soit $a < I(A)$ alors $\mathcal{Y}_a \subset A^c$ et comme $\mathcal{X}$ est métrisable, $\mathcal{Y}_a$ compact et A fermé, il existe une fonction F, $0 \leq F \leq 1$, et $F_{|\mathcal{Y}_a} = 0$, $F_{|A} = 1$; alors $e^\alpha 1_A \leq e^{\alpha F}$. D'où

$$1-b = 1 + \overline{\lim_{\alpha\uparrow+\infty}} \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log} P_\alpha(A) \leq H(F).$$

Comme $0 \leq b < 1$, $H(F) > 0$ et donc d'après ii)

$$H(F) = \sup\{F(x) - I(x)\ ;\ x\notin \mathcal{Y}_a\} \leq 1-a$$

ce qui donne bien $-b \leq - I(A)$ en faisant tendre a vers $I(A)$. Si maintenant $b \geq 1$ soit $\gamma>b$, en remplaçant la famille $(P_\alpha)_{\alpha>0}$ par la famille $(P'_\alpha)_{\alpha>0}$ avec $P'_\alpha = P_{\frac{\alpha}{\gamma}}$ on obtient

$$\overline{\lim_{\alpha\uparrow\infty}} \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log} P'_\alpha(A) = \frac{-b}{\gamma}\ (>-1)$$

et

$$\lim_{\alpha\uparrow\infty} \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log} E'(e^{\alpha F}) = \frac{1}{\gamma} H(\gamma F) = \sup_{x\in\mathcal{X}} [F(x)-I'(x)].$$

La fonctionnelle $I' = \frac{1}{\gamma} I$ est donc la fonctionnelle d'action de la famille $(P'_\alpha)_{\alpha>0}$ et on a donc $\overline{\lim_{\alpha\uparrow\infty}} \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log} P'_\alpha(A) \leq - I'(A)$ mais en revenant à P_α et I on obtient la majoration cherchée.

Démonstration de la minoration pour les ouverts.

Supposons $I(A) < +\infty$ sinon il n'y a rien à démontrer, pour toute fonction F continue bornée, $0 \leq F \leq 1$ et vérifiant $F \leq 1_A$, on a $e^{\alpha F} \leq e^\alpha 1_A + 1_{A^c}$; d'où

$$\underline{\lim_{\alpha\uparrow\infty}} \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log}[P_\alpha(A^c) + e^\alpha P_\alpha(A)] \geq H(F).$$

Supposons d'abord qu'il existe une fonction $F_1 (0 \leq F_1 \leq 1_A,\ F_1 \in \mathcal{C}_b(\mathcal{X},\mathbb{R}))$ avec $H(F_1) > 0$. Cela impose $e^{\alpha} P_\alpha(A) \xrightarrow[\alpha\uparrow\infty]{} +\infty$ et donc pour <u>toute</u> fonction F, $0 \leq F \leq 1_A$, et F continue,

$$\varliminf_{\alpha\uparrow\infty} \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log} P_\alpha(A) \geq H(F) - 1.$$

Alors $\sup\{H(F)-1\ ;\ 0 \leq F \leq 1_A\ \ F \in \mathcal{C}_b(\mathcal{X},\mathbb{R})\} \geq - I(A)$. En effet, soit $x^{\varepsilon} \in A$ tel que $I(A) \leq I(x^{\varepsilon}) < I(A) + \varepsilon$, comme $\mathcal{X}$ est métrisable, il existe une fonction G continue bornée avec $G(x^{\varepsilon}) = 1$, $0 \leq G \leq 1_A$, alors

$$H(G)-1 \geq G(x^{\varepsilon}) - I(x^{\varepsilon}) - 1 = - I(x^{\varepsilon}) \geq - I(A)-\varepsilon.$$

D'où la minoration lorsqu'il existe au moins une fonction F, $0 \leq F \leq 1_A$, F continue avec $H(F) > 0$. Mais comme $I(A) < +\infty$ cela est toujours vérifiée pour la famille $(P'_\alpha)_{\alpha>0}$ avec $P'_\alpha = P_{\frac{\alpha}{\gamma}}$, $\gamma > I(A)$, et on se ramène au cas général comme pour la majoration.

En fait la démonstration de la minoration n'utilise pas la compacité des $\mathcal{J}_a$ mais uniquement le fait que $H(F) \geq \sup[F(x) - I(x)\ ;\ x \in \mathcal{X}]$. Ce qui fait que l'on a en fait démontré la proposition suivante <u>indépendante de l'hypothèse</u> (H).

<u>Proposition 2</u> : <u>Soit</u> $(P_\alpha)_{\alpha>0}$ <u>une famille de probabilité sur</u> $(\mathcal{X},\mathcal{B}(\mathcal{X}))$ <u>si pour toute fonction continue bornée</u> $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, $\lim_{\alpha\uparrow\infty} \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log} E\,(e^{\alpha F}) = H(F)$ <u>existe, on a pour tout ouvert</u> A <u>de</u> $\mathcal{X}$:

$$\varliminf_{\alpha\uparrow\infty} \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log} P_\alpha(A) \geq -I(A)$$

<u>où</u> $I(x) = \sup[F(x) - H(F)\ ;\ F \in \mathcal{C}_b(\mathcal{X},\mathbb{R})]$.

<u>Remarques et exemples</u> :

1). Pour les boréliens A de $\mathcal{X}$ pour lesquels $I(\bar{A}) = I(\overset{\circ}{A}) = I(A)$ on a $\lim_{\alpha\uparrow\infty} \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log} P_\alpha(A) = - I(A)$. La fonctionnelle I est donc unique.

2). En général et bien que cela ne soit pas nécessaire pour l'équivalence que l'on vient de démontrer le résultat de grande déviation est sous jacent à la convergence étroite des P_α vers une mesure de Dirac δ_{x_o}, avec $x_o \in \mathcal{X}$ et $I(x_o) = 0$.

Inversement, s'il existe un unique $x_o \in \mathcal{X}$ tel que $I(x_o) = 0$ alors P_α converge étroitement vers δ_{x_o}.

3). L'existence seule de la limite H n'entraîne pas en général la majoration pour les fermés sans hypothèses supplémentaires. De plus un résultat de grande déviation n'est utilisable que si I vérifie la condition de compacité pour les $\mathcal{S}_a$.

4). Exemple : Un exemple important est celui des petites perturbations des systèmes dynamiques introduites par Ventsel et Freidlin. Dans [3] Doss donne une démonstration dans ce cas particulier de l'implication ii) $\Longrightarrow$ i) en utilisant quelques propriétés particulières des diffusions. On s'est ici inspiré de sa démonstration, notamment pour la minoration.

5). Autre exemple, l'étude du comportement asymptotique des solutions x^ε du système $dx_t^\varepsilon = F(x_t, y_{t/\varepsilon})dt$, $x_o^\varepsilon = x$, où $F : \mathbb{R}^d \times E \to \mathbb{R}^d$ est lipschitzienne bornée et $(y_t)_{t \geq 0}$ un processus de Markov, par un résultat de grande déviation sur $\mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^d)$. (cf. [1]). Ceci est donc équivalent à trouver une fonctionnelle d'action Λ sur $\mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^d)$, avec $\{\Lambda \leq a\}$ compact, telle que pour toute $\Phi \in \mathcal{C}_b(\mathcal{C}((0,T), \mathbb{R}^d), \mathbb{R})$

$$\lim_{t \uparrow \infty} \frac{1}{t} \operatorname{Log} E(e^{t\Phi(x^\varepsilon)}) = \sup[\Phi(f) - \Lambda(f),\ f \in \mathcal{C}[0,T], \mathbb{R}^d)].$$

II. APPLICATION AUXTEMPS DE SEJOURS MOYENS D'UN PROCESSUS

Soit $(E, \mathcal{B}(E))$ un espace polonais ou lusinien muni de la tribu de ses boréliens, $X = (\Omega, \mathcal{A}, P, X_t, t \geq 0)$ un processus à valeurs dans E. Le temps de séjour moyen de X dans un borélien A de E est

$$L_t(\omega, A) = \frac{1}{t} \int_0^t 1_A(X_s(\omega))ds.$$

Pour tout ω, $L_t(\omega, .)$ est une probabilité sur E dont on étudie le comportement lorsque $t \uparrow +\infty$ par un résultat de grandes déviations pour les lois (P_{L_t}) des L_t sur l'espace $\mathcal{M}^1$ des probabilités sur $(E, \mathcal{B}(E))$. Un résultat de ce type est obtenu par Donsker Varadhan [5] sous des hypothèses markoviennes et ergodiques. D'un autre côté Gartner obtient un résultat analogue sans hypothèses markoviennes mais en supposant que la limite de $\frac{1}{t} \operatorname{Log} E(e^{\int_0^t f(X_s)ds})$ quand $t \uparrow \infty$ existe pour toute fonction f mesurable bornée et que l'on a des conditions importantes de régularités [4]. C'est dans cette dernière optique que nous présentons une approche de ce problème.

Les espaces $\mathcal{M}^1$ et $\mathcal{M}^b$ des probabilités et des mesures bornées sur $(E,\mathcal{B}(E))$ sont munis de la topologie de la convergence étroite. On fait l'hypothèse suivante :

Hypothèse (H') : Pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{C}_b(\mathcal{M}^1,\mathbb{R})$ la limite

$$H(\Phi) = \lim_{t\uparrow\infty} \frac{1}{t} \operatorname{Log} E(e^{t\Phi(L_t)})$$

existe.

En particulier, en considérant pour tout f de $\mathcal{C}_b(E,\mathbb{R})$ la fonction sur $\mathcal{M}^1$ $\Phi_f : \nu \to \nu(f)$ on voit que la limite

$$h(f) = \lim_{t\uparrow\infty} \frac{1}{t} \operatorname{Log} E(e^{\int_0^t f(X_s)ds})$$

existe aussi.

On pose alors pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}^b$,

$$(*) \qquad I(\mu) = \sup\{\mu(f) - h(f) \ ; \ f \in \mathcal{C}_b(E,\mathbb{R})\},$$

et comme d'habitude $I(A)=\inf\{I(\mu) \ ; \ \mu\in A\}$. On remarquera que I est la fonctionnelle d'action de Gartner et de Donsker Varadhan. On dira que les (L_t) vérifient la propriété de grandes déviations (G.D.) pour la fonctionnelle d'action I si :

Propriété (G.D.) i). Pour tout $a > 0$ $\mathcal{J}_a = \{I \leq a\}$ est étroitement compact.

ii). Pour tout ouvert A de $\mathcal{M}^1$ $\underline{\lim}_{t\uparrow\infty} \frac{1}{t} \operatorname{Log} P[L_t \in A] \geq -I(A)$

iii). Pour tout fermé A de $\mathcal{M}^1$ $\overline{\lim}_{t\uparrow\infty} \frac{1}{t} \operatorname{Log} P[L_t \in A] \leq -I(A)$.

Proposition 3 : Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

1). Les (L_t) vérifient la propriété (G.D.) avec I donnée par (*) comme fonctionnelle d'action.

2). L'hypothèse (H') est vérifiée et de plus :

a). Pour tout a $\mathcal{J}_a=\{I \leq a\}$ est compact

b). Pour tout $\Phi \in \mathcal{C}_b(\mathcal{M}^1,\mathbb{R})$ $H(\Phi) = \sup\{\Phi(\mu) \ I(\mu);\mu\in \mathcal{M}^1\}$

3). L'hypothèse (H') est vérifiée et de plus

a). Pour tout $\mu \in \mathcal{M}^1$

$$\sup\{\Phi(\mu)-H(\Phi) \ ; \ \Phi\in \mathcal{C}_b(\mathcal{M}^1,\mathbb{R})\} = \sup\{\mu(f)-h(f) \ ; \ f\in \mathcal{C}_b(E,\mathbb{R})\}$$

b). Pour tout $\varepsilon>0$ il existe un ouvert O_ε de $\mathcal{M}^1$, de

<u>complémentaire étroitement compact tel que</u>

$$\sup\{h(\tfrac{1}{\varepsilon} f) \ ; \ 0 \leq f \leq 1_{O_\varepsilon} \ ; \ f \in \mathcal{C}_b(E,\mathbb{R})\} \leq 1$$

L'équivalence 1) $\Longleftrightarrow$ 2) est simplement la proposition 1, l'hypothèse (H') et 3) a) permet d'appliquer la proposition 2. Le reste résulte des lemmes 1, 2, 3, ci-dessous. On revient sur des conditions suffisantes de compacité des $\mathcal{J}_a$ à la fin.

On remarque d'abord facilement que $I(\mu) = +\infty$ si $\mu \in \mathcal{M}^b \setminus \mathcal{M}^1$; I est convexe et s.c.i; $f \to h(f)$ continue (pour la convergence uniforme) par suite

$$h(f) = \sup\{\mu(f) - I(\mu) \ ; \ \mu \in \mathcal{M}^1\}.$$

<u>Lemme 1</u> : <u>Sous l'hypothèse (H') on a l'équivalence</u>

i). <u>Pour tout</u> $a > 0$ $\mathcal{J}_a = \{I \leq a\}$ <u>est étroitement compact</u>

ii). <u>Pour tout</u> $\varepsilon > 0$ <u>il existe un ouvert</u> O_ε <u>de</u> $\mathcal{M}^1$, <u>de complémentaire étroitement compact tel que</u>

$$\sup\{h(\tfrac{1}{\varepsilon} f) \ ; \ 0 \leq f \leq 1_{O_\varepsilon} \ , \ f \in \mathcal{C}_b(E,\mathbb{R})\} \leq 1.$$

<u>Démonstration</u> :

<u>i $\Longrightarrow$ ii)</u>. Pour tout $\varepsilon > 0$ $\mathcal{J}_{1/\varepsilon}$ est étroitement compact ; il existe donc un ouvert O_ε de complémentaire compact tel que $\sup\{\mu(O_\varepsilon) ; \mu \in \mathcal{J}_{1/\varepsilon}\} \leq \varepsilon$. Soit $f \in \mathcal{C}_b(E,\mathbb{R})$ telle que $0 \leq f \leq 1_{O_\varepsilon}$,

$$0 \leq h\,(\tfrac{1}{\varepsilon} f) = \sup\{\mu(\tfrac{1}{\varepsilon} f) - I(\mu) \ ; \ \mu \in \mathcal{M}^1\}.$$

Si $h(\frac{1}{\varepsilon} f) = 0$ il n'y a rien à démontrer, sinon

$$0 < h(\tfrac{1}{\varepsilon} f) = \sup\{\mu(\tfrac{1}{\varepsilon} f) - I(\mu) \ ; \ \mu \in \mathcal{J}_{1/\varepsilon}\} \leq \sup\{\mu(\tfrac{1}{\varepsilon} f), \ \mu \in \mathcal{J}_{1/\varepsilon}\} \leq 1.$$

<u>ii) $\Longrightarrow$ i)</u>. Pour tout $\varepsilon > 0$, si $f \in \mathcal{C}_b(E,\mathbb{R})$, $0 \leq f \leq 1_{O_\varepsilon}$ on a $\mu(f) \leq \varepsilon(a + h(\frac{1}{\varepsilon} f))$ pour tout $\mu \in \mathcal{J}_a$. Par suite $\mu(O_\varepsilon) \leq \varepsilon(a+1)$ ce qui montre que $\mathcal{J}_a$ est étroitement compact parce que tendu.

<u>Lemme 2</u> : <u>Si le résultat de grandes déviations pour les</u> (P_{L_t}) <u>avec</u> I <u>comme fonctionnelle d'action est vérifiée, on a</u> :

$$I(\mu) = \sup[\Phi(\mu) - H(\Phi) \ ; \ \Phi \in \mathcal{C}_b(\mathcal{M}^1,\mathbb{R})].$$

<u>Démonstration</u> :

D'après l'implication i) $\Longrightarrow$ ii) de la proposition 1 pour tout Φ de

$\mathcal{C}_b(\mathcal{M}^1,\mathbb{R})$

$$H(\Phi) = \sup\{\Phi(\mu) - I(\mu)\ ;\ \mu\in \mathcal{M}^1\}.$$

D'où

$$I(\mu) \geq \sup\{\Phi(\mu) - H(\Phi)\ ;\ \Phi\in \mathcal{C}_b(\mathcal{M}^1,\mathbb{R})\}$$

mais l'inégalité inverse est évidente.

Lemme 3 : Si pour tout $a > 0$ $\mathcal{J}_a = \{I \leq a\}$ est compact, ou a, sous l'hypothèse (H') pour tout fermé étroit de $\mathcal{M}^1$ A,

$$\overline{\lim_{t\uparrow\infty}} \frac{1}{t} \operatorname{Log} P[L_t\in A] \leq -I(A).$$

La démonstration de ce lemme repose sur le résultat élémentaire suivant, valable pour les vecteurs aléatoires sur $\mathbb{R}^n$, et l'introduction ci-dessous d'une fonctionnelle λ_n vérifiant les propriétés du lemme 4. On note $<,>$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Résultat sur $\mathbb{R}^n$: Soit $(Z^t,\ t > 0)$ une famille de vecteurs aléatoires de $(\Omega,\mathcal{A},P)$ dans $\mathbb{R}^n$, telle que pour tout $\beta\in\mathbb{R}^n$ $\lim\limits_{t\uparrow\infty} \frac{1}{t} \operatorname{Log} E(e^{t<Z^t,\beta>}) = h(\beta)$ existe alors, pour tout fermé A de $\mathbb{R}^n$

$$\overline{\lim_{t\uparrow\infty}} \frac{1}{t} \operatorname{Log} P[Z^\varepsilon\in A] \leq -\ell_Z(A)$$

où $\ell_Z(A) = \inf(\ell_Z(\beta),\ \beta\in A)$ avec $\ell_Z(\beta) = \sup(<\alpha,\beta> - h(\alpha)\ ;\ \alpha\in\mathbb{R}^n)$

(on trouvera une démonstration de ce résultat dans Gartner [4]).

On définit la fonctionnelle $\lambda_n : \mathbb{R}^n \times \mathcal{C}_b(E,\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ par

$$\lambda_n(\alpha,f) = \inf\{I(\mu)\ ;\ \int_E f\, d\mu = \alpha\}$$

et on pose $h_n(\alpha,f) = h(<\alpha,f>)$ pour $\alpha\in\mathbb{R}^n$ et $f\in \mathcal{C}_n(E,\mathbb{R}^n)$.

Il est facile de montrer que si les $\mathcal{J}_a = \{I \leq a\}$ sont étroitement compacts, λ_n est s.c.i. sur $\mathbb{R}^n \times \mathcal{C}_b(E,\mathbb{R}^n)$ pour tout n. De plus $\alpha \to \lambda_n(\alpha,f)$ est convexe.

Lemme 4 : Si pour tout $a > 0$ $\mathcal{J}_a = \{I \leq a\}$ est étroitement compact, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

(1) $\qquad \lambda_n(\alpha,f) = \sup\{<\beta\ \alpha> - h_n(\beta,f),\ \beta\in\mathbb{R}\}\quad (\forall\alpha\in\mathbb{R}^n, f\in \mathcal{C}_b(E,\mathbb{R}^n))$

(2) $$I(\mu) = \sup\{\lambda_n(\mu(f),f),\ f\in \mathcal{C}_b(\mathbb{E},\mathbb{R}^n)\}$$

(3) $$\inf\{\lambda_n(\alpha,f),\alpha\in F\} = \inf\{I(\mu)\ ;\ \int_E f\,d\mu \in F\}$$

pour tout borélien F de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration :

La transformée de Legendre $\lambda_n^*(.,f)$ de $\lambda_n(.,f)$ est

$$\begin{aligned}\lambda_n^*(\alpha,f) &= \sup_\beta\ (<\beta,\alpha>-\ h(\beta,f))\\ &= \sup_\beta \sup_\mu \left[\int_E <\alpha,f>d\mu\ -\ I(\mu);\int_E f\,d\mu = \beta\right] = h_n(\alpha,f)\end{aligned}$$

ce qui **donne** (1) comme λ_n est s.c.i. et positive. Les formules (2) et (3) s'en déduisent aussitôt.

Démonstration du lemme 3 :

On suppose d'abord $A = V(f,F) = \{\mu\in\mathcal{M}^1\ ;\ \int_E f\,d\mu\in F\}$, avec F fermé dans $\mathbb{R}^n$ et $f\in\mathcal{C}_b(E,\mathbb{R}^n)$, $f = (f_1,\ldots,f_n)$. On obtient un vecteur aléatoire de $(\Omega,\mathcal{A},P)$ dans $\mathbb{R}^n$ en posant

$$Z^t = \left(\frac{1}{t}\int_0^t f_1(X_s)ds,\ldots,\frac{1}{t}\int_0^t f_n(X_s)ds\right).$$

De plus $\{L_t\in V_n(f,F)\} = \{Z^t\in F\}$ et $\ell_z(\beta) = h_n(\beta,f)$ d'après (2) du lemme 4. D'où d'après (3) du lemme 4

$$\overline{\lim_{t\uparrow\infty}}\ \frac{1}{t}\ \mathrm{Log}\ P[x_t\in V_n(f,F)] \leq -\ I(V_n(f,F)).$$

Si maintenant A est un fermé étroit de $\mathcal{M}^1$ et $a < I(A)$ on peut recouvrir le compact $\mathcal{J}_a$ contenu dans A^c, par des voisinages ouverts de la forme $V_n(f,O)$; avec O ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Soit $V_{n_i}(f_i,O_i)$ $i=1,\ldots,k$ un recouvrement fini de $\mathcal{J}_a$. Comme $\bigcap_{i=1}^k (V_{n_i}(f_i,O_i))^c = V_n(f,F)$ avec $n = \sum_{i=1}^k n_i, f=(f_1,\ldots,f_k)$ et $F = \prod_{i=1}^k O_i^c$. Il vient alors

$$\overline{\lim_{t\uparrow\infty}}\ \frac{1}{t}\ \mathrm{Log}\ P[L_t\in A] \leq \overline{\lim_{t\uparrow\infty}}\ \frac{1}{t}\ \mathrm{Log}\ P[L_t\in V_n(f,F)] \leq -\ I(V_n(f,F)) \leq -\ a$$

puisque $V_n(f,F)\subset\mathcal{J}_a^c$.

La condition 2)b) de la proposition 3 qui assure la compacité des $\mathcal{J}_a$ est en particulier satisfaite si l'on a la propriété :

Il existe une suite (f_n) de $\mathcal{C}_b(E,\mathbb{R}_+)$ avec $\{f_n\leq n\}$ compact et $\sup h(f_n) < +\infty$.

En effet il suffit pour tout n de poser $O_n = \{f_n > n\}$ et $1_{O_n} \leq \frac{1}{n} f_n$.
En particulier si E est compact, $\mathcal{M}^1$ est étroitement compact et les $\mathcal{G}_a$ qui sont étroitement fermés puisque par définition I est s.c.i; le sont aussi.

Une condition de compacité des $\mathcal{G}_a$ s'écrit encore

- Pour toute fonction mesurable bornée $f, h(f) = \lim_t \frac{1}{t} \operatorname{Log} E\left[e^{\int_0^t f(X_s)ds}\right]$ existe

- Il existe une suite d'ouverts (O_n) de complémentaire compact tel que $\sup_n h(n\, 1_{O_n}) < +\infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRANCOVAN, BORNNER, PRIOURET : Grandes déviations pour certains systèmes différentiels aléatoires. Séminaire de Probabilités XVI, Lecture Notes n° 920, Springer 1980.

[2] DONSKER, VARADHAN : Asymptotic evaluation of certain Markov processes expectations for large time I. Comm. on Pure and Applied Math. 28, 1975.

[3] DOSS : Quelques formules asymptotiques pour les petites perturbations de systèmes dynamiques.Annales I.H.Poincaré XVI, 1, 1980.

[4] GARTNER : On large deviation from the invariant measure. Theory of Probability and its applications 22, 1, 1977.

[5] VARADHAN : Asymptotic probabilities and differential equations. Comm. on Pure and Applied Math 19, 1975.

* Université Paris XIII
Département de Mathématiques
C.S.P.
93430 VILLETANEUSE