

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

RICHARD F. GUNDY

## **Temps locaux et l'intégrale d'aire de Lusin**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 18 (1984), p. 77-81

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1984\\_\\_18\\_\\_77\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__77_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# Temps locaux et l'intégrale d'aire de Lusin.

R. F. Gundy

Dans les comptes rendus de la semaine d'analyse harmonique dédiée à A. Zygmund, à Chicago [4], nous montrons qu'un joli théorème récent de Martin Barlow et Marc Yor peut être utilisé à démontrer des inégalités de normes pour une nouvelle fonctionnelle définie sur les fonctions harmoniques

$u(x,y)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y > 0$ :

$$D(u)(x_0) = \sup_r D(u;r)(x_0)$$

où

$$D(u;r)(x_0) = \int_{\Gamma(x_0)} |\nabla u| d\sigma_r$$

avec  $\Gamma(x_0) = \{(x,y) : |x_0 - x| < y\}$ , le cône basé en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , et  $d\sigma_r$

la mesure de Lebesgue sur la ligne de niveau  $r$  (c'est à dire sur  $\{(x,y) :$

$u(x,y) = r\}$ ). On montre que

$$(1) \quad \|D\|_p \simeq \|A\|_p, \quad 0 < p < \infty$$

où

$$A^2(u)(x_0) = \iint_{\Gamma(x_0)} |\nabla u|^2(x,y) dx dy.$$

Il s'en suit que  $D$  caractérise les classes  $H^p_+$  de Stein-Weiss [8] dans  $\mathbb{R}^{n+1}_+$ .

La démonstration des inégalités (1) dans [4] reposait sur le théorème de Barlow-Yor et l'invariance conforme de la fonction de Green dans  $\mathbb{R}^2$ .

Cette invariance est en défaut dans  $\mathbb{R}^{n+1}_+$ ; ainsi la démonstration ne s'étend pas à plusieurs dimensions. Or, cette démonstration n'est pas très révélatrice en ce qui concerne la signification géométrique-analytique de la fonctionnelle  $D$ .

En effet, on peut démontrer les mêmes inégalités en toute généralité toujours à l'aide du théorème de Barlow-Yor mais d'une façon plus facile qu'on ne le croyait. (Il est même possible de libérer la démonstration du mouvement brownien pour faire plaisir aux analystes; cette démonstration qui repose sur la théorie des intégrales singulières va paraître ailleurs [5].)

1. L'intégrale d'aire et le mouvement brownien dans  $\mathbb{R}_+^{n+1}$ .

Posons  $(X_t, Y_t)_{t < 0}$  le processus "bruit de fond" dans [6]. Ce processus est obtenu par retournement du temps du processus  $(\hat{X}_t, \hat{Y}_t)_{t < 0}$  où  $\hat{X}_t$  est le mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^n$ , partant de  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , et  $\hat{Y}_t$  est le processus de Bessel d'indice 3, partant de  $y = 0$ . La mesure initiale est celle de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ . Le retourné  $(X_t, Y_t)$  se comporte comme le mouvement brownien "venant de l'infini": soit  $\tau_a = \inf \{t < 0: Y_t = a > 0\}$ ; alors  $(X_{\tau_a + s}, Y_{\tau_a + s})$ ,  $0 < s < -\tau_a$ , est le mouvement brownien issu du hyperplan  $(\mathbb{R}^n, a)$  avec mesure initiale celle de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ . (Voir [7] appendice) Ainsi le processus  $(\hat{X}_t, \hat{Y}_t)$  se présente comme le retourné du mouvement brownien conditionné à aboutir en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Il est facile à calculer le potentiel associé à  $(\hat{X}_t, \hat{Y}_t)$ . Soit

$$P_t(dx \parallel x_0) = c_n t^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x_0 - x|^2}{2t}\right) dx$$

et

$$Q_t(dy) = c_n t^{-3/2} y^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dy \quad (\text{Bes (3)})$$

Alors,

$$P_t(dx dy \parallel x_0) = P_t(dx \parallel x_0) Q_t(dy)$$

et le noyau potentiel

$$\begin{aligned} G(x_0, 0; x, y) &= c_n y^2 \int_0^\infty t^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \exp\left(-\frac{|x_0 - x|^2 + y^2}{2t}\right) \frac{dt}{t} \\ &= c_n Y K_Y(x_0 - x) \end{aligned}$$

où  $K_y(x_0 - x) = c_n y(|x_0 - x|^2 + y^2)^{-\frac{n+1}{2}}$ , le noyau de Poisson dans  $\mathbb{R}_+^{n+1}$ .

Définition. L'intégrale d'aire de Lusin dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

$$A(u)(x_0) = \left( \iint_{\Gamma(x_0)} y^{1-n} |\nabla u|^2(x, y) dx dy \right)^{1/2}$$

où  $\Gamma(x_0) = \{(x, y) : |x_0 - x| < y, x_0 \in \mathbb{R}^n\}$ .

Pour une fonction  $F$  holomorphe dans  $C_+ = \{z > 0\} (= \mathbb{R}_+^2)$ ,  $A^2(u)(x_0)$  est l'aire de l'image de  $\Gamma(x_0)$  sur l'application  $F$ . Dans  $\mathbb{R}_+^{n+1}$  il n'en est pas de même; néanmoins il y a une interprétation brownienne. Il se trouve que  $A^2(u)(x_0)$  est proportionnel à l'espérance conditionnelle du temps intrinsèque d'occupation du cône  $\Gamma(x_0)$  pour le processus  $u(x_t, y_t)$ . C'est à dire

$$A^2(u)(x_0) \simeq E \left( \int_0^\infty I_{\Gamma(x_0)} |\nabla u|^2(x_t, y_t) dt \mid x_0 \right)$$

En effet, cette espérance se calcule facilement, compte tenu de la forme du noyau potentiel ci-dessus.

$$\begin{aligned} & E \left( \int_0^\infty I_{\Gamma(x_0)} |\nabla u|^2(x_t, y_t) dt \mid x_0 \right) \\ &= \iiint_{\Gamma(x_0)} |\nabla u|^2(x, y) P_t(dx dy \mid x_0) \\ &= \iint_{\Gamma(x_0)} |\nabla u|^2(x, y) y K_y(x_0 - x) dx dy \\ &\simeq \iint y^{1-n} |\nabla u|^2 I_{\Gamma(x_0)}(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

(Sur le cône  $\Gamma(x_0)$ ,  $K_y(x_0 - x) \simeq y^{-n}$ .)

Evidemment cette équivalence est plus générale. Si on prend une bande

$\{(x, y) : r - \varepsilon < u(x, y) < r + \varepsilon\} = L(\varepsilon, r)$  alors

$$\begin{aligned} & E \left( \int_0^\infty I_{\Gamma(x_0) \cap L(\varepsilon, r)} |\nabla u|^2(x_t, y_t) dt \mid x_0 \right) \\ &\simeq \iint y^{1-n} I_{\Gamma(x_0) \cap L(\varepsilon, r)} |\nabla u|^2(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

En divisant par  $(2\varepsilon)$  de chaque côté, on peut passer à la limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. A gauche, on obtient l'espérance conditionnelle du temps local en  $r$  ( $L(u;r)(x_0)$ ) du processus  $u(x_t, y_t)$  restreint au cône  $\Gamma(x_0)$ . D'autre part, on désintègre l'intégrale d'aire à l'aide de la formule de co-aire (voir Federer [3]). Ainsi il se trouve que

$$E(L(u;r)(x_0) | x_0) = D(u;r)(x_0).$$

et

$$\begin{aligned} D(u)(x_0) &= \sup_r D(u;r)(x_0) \\ &< E(\sup_r L(u;r)(x_0) | x_0). \end{aligned}$$

A ce moment là, on invoque les inégalités de Barlow-Yor. Leur fonctionnelle

$$L^*(u) = \sup_r L(u;r),$$

est une fonction maximale associée aux temps locaux  $L(u;r)$ . (On a supprimé la restriction au cône. Evidemment,  $L(u;r)(x_0) < L(u;r)$ .) Pour  $1 < p < \infty$  on a

$$\begin{aligned} \int |D(u)(x_0)|^p dx_0 &< \int |E(L^*(u) | x_0)|^p dx_0 \\ &< \int E(L^{*p}(u) | x_0) dx_0 \\ &= E((L^*)^p) \\ &< C_p \|u\|_{H^p} \end{aligned}$$

par les inégalités de Barlow-Yor et l'équivalence de  $H^p$ -analytique et  $H^p$ -probabilité [2].

On peut aussi démontrer la réciproque ( $\|u\|_{H^p} < C_p \|D\|_p$ ) et l'équivalence des normes pour  $0 < p < 1$ : voir [4] pour ces arguments. Ils n'ont rien à voir avec la restriction de dimension imposée.

## Références

1. Barlow, M.T. et Yor, M., Semi-martingale Inequalities via the Garsia-Rodemich-Rumsey Lemma, and Applications to Local Times, J. Functional Anal., 49, 2, 198-229 (1982).
2. Burkholder, D.L. et Gundy, R.F., Boundary Behavior of Harmonic Functions in a Half-Space and Brownian Motion, Ann. de l'Institut Fourier, 23, 4 (1973).
3. Federer, H. Geometric measure theory, Springer-Verlag, New York, (1969).
4. Gundy, R.F. The Density of the Area Integral, Conference on Harmonic Analysis - in Honor of A. Zygmund, Wadsworth, Vol. 1, 138-149 (1983).
5. Gundy, R.F. et Silverstein, M., The Density of the Area Integral in  $\mathbb{R}_+^{n+1}$ , à paraître.
6. Gundy, R.F. et Varopoulos, N. Th., Les Transformations de Riesz et les Intégrales Stochastiques, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 289 (2 juillet, 1979).
7. Meyer, P.A., Le Dual de  $H^1(\mathbb{R}^V)$ : Démonstrations Probabilistes Exposé II, Appendice 2, pp. 176-195 Sem de Probab XI, Lecture Notes in Math, #581, Springer-Verlag, New York.
8. Stein, E.M. et Weiss, G. On the Theory of Harmonic Functions of Several Variables I, The Theory of  $H^p$  Spaces, Acta Math, 103,25-62 (1960).