SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

FRANCESCO RUSSO

Étude de la propriété de Markov étroite en relation avec les processus planaires à accroissements indépendants

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 353-378

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__353_0>

ETUDE DE LA PROPRIETE DE MARKOV ETROITE EN RELATION

AVEC LES PROCESSUS PLANAIRES A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS.

par Francesco RUSSO

INTRODUCTION

Si E est un espace topologique et X est un processus indexé par E, on dit que X vérifie la propriété de Markov étroite (en anglais "sharp Markov property") relativement à un sous-ensemble A de E si les tribus engendrées par X restreint à A (passé) et à A^c (futur) sont indépendantes, étant donné la tribu engendrée par X restreint à la frontière de A (présent). Cette propriété a été suggérée par Paul Levy en 1945 ([11]) pour le cas du mouvement brownien et est à la base des nombreux travaux sur les processus markoviens à plusieurs paramètres parus ces dernières années. Il faut citer en premier lieu Mc Kean [12] qui a été le premier à avoir repris l'idée initiale de Paul Levy en la rendant cependant moins forte par l'introduction d'un présent plus riche: la tribu engendrée par X restreint à la frontière de A est remplacée par la tribu germe. Par la suite nous trouvons une série d'articles en relation avec le cas gaussien (par exemple Molchan ([14]), Pitt ([15]), Kallianpur-Mandrekar ([16])). Parmi les travaux les plus récents, il faut citer ceux de Walsh ([9], [10]), Mandrekar ([13]), Nualart ([17]), Lefort ([18]) et E.Carnal ([4], [1]).

Contrairement à la plupart des travaux que nous venons de citer, le nôtre traite de la propriété de Markov étroite telle qu'elle a été proposée par Paul Levy. Notre résultat principal (théorème 7.5) établit que tout processus planaire à accroissements indépendants est étroitement markovien relativement à toute réunion finie de pavés (rectangles de côtés parallèles aux axes comme dans (3.1)). Ce résultat ne pourra vraisemblablement pas être amélioré, étant donné que le drap brownien n'a pas la propriété de Markov étroite par rapport à un triangle (cf. Walsh [9], [10]). Comme corollaire (corollaire 7.6), nous obtenons que, sous les mêmes hypothèses, la propriété de Markov plus faible faisant intervenir la tribu germe est vérifiée pour tout sous-ensemble borné du plan.

Pour atteindre nos objectifs, aux paragraphes 2 et 3, nous présentons des compléments généraux; au paragraphe 4 nous prouvons qu'un processus planaire à accroissements indépendants a la propriété de Markov étroite par rapport à tout pavé. Ensuite, aux paragraphes 5 et 6, nous préparons les outils topologiques nécessaires pour traiter au paragraphe 7 la généralisation au cas d'une réunion finie de pavés.

Ajoutons pour terminer que notre travail a été stimulé par la lecture de l'article [1] de E. Carnal, où il est prouvé que si $\underline{\underline{F}}$ est la filtration naturelle d'un drap poissonien, alors $\underline{\underline{F}}$ a la propriété de Markov étroite relativement à tout ensemble de $\mathbb{R}^2_+$ qui est ouvert, borné et relativement convexe (c'est-à-dire tel que chaque coupe horizontale et verticale est connexe). Nous observerons (cf. proposition 2.1) que l'hypothèse que le sous-ensemble est ouvert est superflue. D'autre part E. Carnal conjecture que l'hypothèse "relativement convexe" n'est pas nécessaire. Or, notre théorème 7.5 fournit une classe suffisamment étendue de sous-ensembles non relativement convexes vérifiant la propriété de Markov étroite. Cependant, ayant pour objectif l'étude de processus planaires plus généraux que le drap poissonien, nous n'avons pas cherché à étendre cette classe davantage.

§1. NOTATIONS ET DEFINITIONS DE BASE

Soit (E,d) un espace métrique séparable et (Ω,Σ,P) un espace de probabilité complet. Supposons qu' à tout sous-ensemble A de E soit associée une sous-tribu $\underline{\underline{F}}(A)$ de Σ telle que, pour toute suite $A_1, A_2, \ldots$ de sous-ensembles de E,

$$\underline{\underline{F}}(\cup_n A_n) = \vee_n \underline{\underline{F}}(A_n),$$

où le second membre désigne la plus petite tribu contenant les tribus $\underline{\underline{F}}(A_n)$.

Pour $A \subset E$ nous posons

$$\underline{\underline{G}}(A) = \cap_{\varepsilon>0} \underline{\underline{F}}(A_\varepsilon),$$

où $A_\varepsilon = \{x \in E: d(x,A) < \varepsilon\}$; $\underline{\underline{G}}(A)$ est appelée la <u>tribu germe de A</u>.

Nous désignerons par $\underline{\underline{F}}$ la collection $(\underline{\underline{F}}(A))_{A\subset E}$; $\underline{\underline{F}}$ est appelée <u>filtration</u>. Dans la pluspart des cas $\underline{\underline{F}}$ est engendrée par un processus stochastique $X = (X_z)_{z\in E}$, c'est-à-dire $\underline{\underline{F}}(A)$ est la tribu $\sigma(X_z;\ z \in A)$ complétée par les ensembles negligeables de Σ . Suivant E. Carnal, nous appellerons alors $\underline{\underline{F}}$ la <u>filtration naturelle</u> de X.

Si A un sous-ensemble de E, nous désignerons par Fr A, Int A et $\bar{A}$ respectivement la frontière, l'intérieur et l'adhérence de A.

Soient $\underline{\underline{H}}_1$, $\underline{\underline{H}}_2$ et $\underline{\underline{H}}_3$ des sous-tribus de Σ ; si $\underline{\underline{H}}_1$ est conditionnellement indépendante par rapport à $\underline{\underline{H}}_2$ étant donné $\underline{\underline{H}}_3$, nous écrirons

$$\underline{\underline{H}}_1 \perp \underline{\underline{H}}_2 \mid \underline{\underline{H}}_3.$$

Nous dirons que $\underline{\underline{F}}$ a la <u>propriété de Markov étroite (PME)</u> (resp. <u>propriété de Markov</u> (PM)) par rapport ou relativement à A ou que la propriété de Markov étroite (resp. propriété de Markov) vaut pour A si

$$\underline{\underline{F}}(A) \perp \underline{\underline{F}}(A^c) \mid \underline{\underline{F}}(\mathrm{Fr}\ A) \text{ (resp. } \underline{\underline{G}}(\mathrm{Fr}\ A)).$$

§2. COMPLEMENTS D'ORDRE GENERAL CONCERNANT LA PROPRIETE DE MARKOV ETROITE (PME).

Ce paragraphe a pour fonction de compléter les premières pages de l'article de E. Carnal [1]: il est constitué de résultats généraux sur la PME que nous utiliserons par la suite. Nous allons reprendre les mêmes notations que dans l'introduction.

Dans ce qui suit, R désignera un sous-ensemble de E. Remarquons tout d'abord que de la définition de la PME, il résulte immédiatement que la filtration $\underline{\underline{F}}$ a la PME par rapport à R si et seulement si elle l'a par rapport à R^c.

La proposition suivante jouera un rôle important par la suite.

<u>Proposition 2.1</u> Si la filtration $\underline{\underline{F}}$ a la PME par rapport à Int R ou $\bar{R}$, alors elle l'a aussi par rapport à R.

<u>Démonstration.</u> Supposons la PME valable par rapport à Int R. Dans ce cas

$$\underline{\underline{F}}(\mathrm{Int}\ R) \perp\!\!\!\perp \underline{\underline{F}}((\mathrm{Int}\ R)^c) \mid \underline{\underline{F}}(\mathrm{Fr}\ \mathrm{Int}\ R)$$

Comme Fr Int R c Fr R, nous avons d'après le lemme 1.2 (ii) de [1] que

$$\underline{\underline{F}}(\mathrm{Int}\ R) \perp\!\!\!\perp \underline{\underline{F}}((\mathrm{Int}\ R)^c) \mid \underline{\underline{F}}(\mathrm{Fr}\ R).$$

Il est clair que

$$(2.1) \quad \mathrm{Int}\ R \cup \mathrm{Fr}\ R = \bar{R} \quad , \quad (\mathrm{Int}\ R)^c = \overline{R^c};$$

le lemme 1.2 (i) de [1] et (2.1) nous permettent alors d'écrire

$$\underline{\underline{F}}(\bar{R}) \ \underline{\qquad}\ \underline{\underline{F}}(\overline{R^c}) \mid \underline{\underline{F}}(\mathrm{Fr}\ R).$$

Grâce à la proposition 1.5 A de [1], la conclusion s'ensuit.

Si la PME vaut pour $\bar{R}$ alors elle vaut pour $(\bar{R})^c$; compte tenu de ce qui précède et du fait que $(\bar{R})^c = \mathrm{Int}\ R^c$, il en résulte qu'elle vaut pour R^c et donc pour R. QED

On peut remplacer la PME par la PM dans l'énoncé du lemme. Dans ce cas la preuve est analogue, mais un peu plus longue.

Comme conséquence de la proposition 2.1 nous avons le corollaire suivant.

<u>Corollaire 2.2</u>

a) Si Int $\bar{R}$ a la PME (resp. PM), alors R l'a aussi.

b) Si $(\bar{R})^c$ a la PME (resp. PM), alors R l'a aussi.

c) Si Int $\dot{R} = \phi$, alors R a la PME (resp. PM).

<u>Démonstration.</u> Seul le point c) demande une preuve. En vertu de la proposition

2.1, il suffit de s'assurer que la PME vaut pour ϕ; cela est évident car, $\underline{\underline{F}}(\phi)$ étant la tribu formée des ensembles négligeables de Σ, il est clair que

$$\underline{\underline{F}}(\phi) \perp \underline{\underline{F}}(E) \mid \underline{\underline{F}}(\phi).$$

La proposition 1.6 de [1] permet de régler le cas de la PM.

QED

Les résultats généraux que nous avons énoncés jusqu'à présent, de même que les propositions des premières pages de l'article de E.Carnal [1], valent si $E = \mathbb{R}^n$, puisque E est dans ce cas un espace métrique séparable, localement connexe. Le corollaire 2.2 c) s'applique, par exemple, au cas d'un segment de droite, ou d'une variété topologique de dimension $m < n$.

§3. NOTATIONS ET DEFINITIONS CONCERNANT LES PROCESSUS PLANAIRES

Dans ce paragraphe E désignera $\mathbb{R}^2$. Soient s_i,t_i, $i = 1,2$, des nombres réels de sorte que $z_i = (s_i,t_i)$ est un élément de E, pour $i = 1,2$. On dira que

$$z_1 < z_2 \text{ (resp. } z_1 \leq z_2)$$

si les relations réelles $s_1 < s_2$, $t_1 < t_2$ (resp. $s_1 \leq s_2$, $t_1 \leq t_2$) sont satisfaites. On notera

$$]z_1,z_2] \text{ (resp. } [z_1,z_2], [z_1,z_2[,]z_1,z_2[)$$

l'ensemble $\{z \in E : z_1 < z \leq z_2\}$ (resp. $\{z \in E : z_1 \leq z \leq z_2\}$ etc.). Nous appellerons <u>pavé</u> un sous-ensemble connexe P de E tel que

$$(3.1) \quad]z_1,z_2[\subset P \subset [z_1,z_2].$$

Signalons que n'importe quel P satisfaisant (3.1) et tel que Int $P \neq \phi$ est connexe; dans ce cas on a $\bar{P} = [z_1,z_2]$. Un pavé de la forme $]z_1,z_2]$ sera dit <u>pavé semi-ouvert</u>. Par <u>pavé généralisé</u> nous entendrons un sous-ensemble G de E tel que pour tout pavé ouvert P, $G \cap P$ est un pavé. (De cette manière on complète la famille des pavés par les "pavés non bornés"). G sera dit <u>dégénéré</u> si Int $G = \phi$. Nous pouvons remarquer que si G est non dégénéré, alors tout sous-ensemble F de E tel que $G \subset F \subset \bar{G}$ est un pavé généralisé (non dégénéré).

Soit $\underline{\underline{K}}$ un clan de parties d'un ensemble H, c.-à-d. une famille de parties de H qui est non vide et stable pour les opérations de réunion finie et soustraction. Nous appellerons <u>mesure aléatoire additive sur K</u> une application ν à valeurs réelles définie sur $\Omega \times \underline{\underline{K}}$ telle que pour $C \in \underline{\underline{K}}$ fixé, $\nu(.,C)$ (que nous noterons par $\nu(C)$), est une v.a. et telle que pour presque tout $w \in \Omega$ fixé, $\nu(w,.)$ est une mesure simplement additive sur $\underline{\underline{K}}$.

Notons $\underline{\underline{C}}$ la famille des réunions finies disjointes de pavés semi-ouverts. On vérifie aisément que $\underline{\underline{C}}$ est un clan de parties de E. Notons $\underline{\underline{A}}$ la famille des sous-ensembles A de E tels que

$$A \cap C \in \underline{\underline{C}} \quad , \forall \ C \in \underline{\underline{C}} \ .$$

Il est évident que $\underline{\underline{A}}$ est une algèbre de sous-ensembles de E, $\underline{\underline{C}}$ est contenu dans $\underline{\underline{A}}$, et que tout élément borné de $\underline{\underline{A}}$ appartient à $\underline{\underline{C}}$.

Soit $X = (X_z)_{z\in E}$, un processus indexé par E. Comme par hypothèse $E = \mathbb{R}^2$, on dit qu'il est <u>planaire</u> ou <u>à deux paramètres</u>. Pour chaque $w \in \Omega$, on appelle <u>trajectoire w</u> du processus X l'application $z \longmapsto X_z(w)$. Par <u>accroissement de X par rapport à $]z_1,z_2]$</u>, nous entendrons la variable aléatoire

(3.2) $\quad \Delta_{]z_1,z_2]}X = X_{z_2} - X_{(s_1,t_2)} - X_{(s_2,t_1)} + X_{z_1}$

Nous dirons que le processus X est à <u>accroissements indépendants</u> si pour toute famille finie de pavés semi-ouverts disjoints $(P_i)_{i\in I}$, les v.a. $\Delta_{P_i}X$, $i \in I$, sont indépendantes.

Remarquons qu'il existe une unique mesure aléatoire additive μ sur $\underline{\underline{C}}$, appelée <u>mesure élémentaire associée à X</u> telle que

(3.3) $\quad \mu(P) = \Delta_P X$

pour tout pavé semi-ouvert P.

Voici maintenant trois propriétés de μ qui nous seront utiles lors de l'étude de la PME pour un pavé. Soit $\underline{\underline{F}} = (\underline{\underline{F}}(A))_{A\subset E}$ la filtration naturelle de X.

<u>Proposition 3.1</u> Soient C_i, $i \in I$, et C des éléments de $\underline{\underline{C}}$ tels que les C_i sont disjoints deux à deux.

a) La v.a. $\mu(C)$ est $\underline{\underline{F}}(\bar{C})$-mesurables.

b) Si C est un pavé semi-ouvert, alors $\mu(C)$ est $\underline{\underline{F}}(\mathrm{Fr}\ C)$-mesurable.

c) Si X est à accroissements indépendants, les v.a. $\mu(C_i)$, $i \in I$, sont indépendantes.

<u>Demonstration.</u> Les conclusions b) et c) étant évidentes (par (3.2) et (3.3)), il nous reste à démontrer a). Pour tout $i \in I$, $\mu(C_i)$ est une somme de v.a. de la forme $\Delta_R X$, où R est un pavé. De b) découle que ces variables aléatoires sont $\underline{\underline{F}}(\bar{R})$-mesurables. Or, l'adhérence d'une réunion finie est égale à la réunion des adhérences, d'où la conclusion. QED

En général X sera supposé satisfaire l'hypothèse supplémentaire suivante:

(3.4) $\quad X_z = 0$ p.s. si $z \not> 0$.

Etant donné $A \in \underline{\underline{A}}$, nous définissons un processus X^A paramétré par E en posant

(3.5) $\quad (X^A)_z = \mu(\,]0,z] \cap A)$.

La proposition 3.1 nous fournit, par (3.5), trois propriétés de X^A.

Corollaire 3.2 Soient A_i, $i \in I$, et A des éléments de $\underline{\underline{A}}$ tels que les A_i sont disjoints deux à deux.

a) X^A est $\underline{\underline{F}}(\bar{A})$-mesurable.

b) Si A est un pavé généralisé, alors $(X^A)_z$ est $\underline{\underline{F}}(Fr(\,]0,z] \cap A))$-mesurable pour tout $z \in E$.

c) Si X est à accroissements indépendants, alors les processus X^{A_i}, $i \in I$, sont indépendants.

§4. PME DE LA FILTRATION NATURELLE D'UN PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS RELATIVEMENT A UN PAVE.

De même qu'au paragraphe précédent, E désignera $\mathbb{R}^2$. Considérons un processus planaire X à accroissements indépendants, possédant la propriété (3.4); $\underline{\underline{F}}$ sera la filtration naturelle de ce processus.

Théorème 4.1 $\underline{\underline{F}}$ a la PME par rapport à tout pavé généralisé dans E.

Avant d'aborder la démonstration, il convient de faire quelques remarques. Le lecteur sait que cet article a pour objectif d'établir que X a la PME pour toute réunion finie de pavés. Les raisons qui nous ont poussé à réserver une preuve séparée pour le cas d'un seul pavé sont de deux sortes: d'une part nous désirons montrer l'idée directrice de la démonstration du théorème principal du travail, d'autre part nous voulons signaler qu'avec relativement peu de moyens nous pouvons atteindre le théorème 4.1. Par exemple, la conclusion de la proposition 3.1 a) est triviale, cependant elle suffit largement pour établir la preuve du théorème énoncé ci-dessus. Par la suite nous verrons qu'un raffinement de cette même proposition nous sera nécessaire pour établir la preuve du théorème principal. Comme dans le cas d'un pavé, le fait que le bord d'une réunion finie de pavés est formé de segments verticaux et horizontaux est essentiel: nos méthodes ne seraient plus utilisables si le domaine était plus complexe, sa frontière incluant par exemple un segment oblique.

Démonstration. Nous donnerons la preuve valable pour le cas d'un pavé; le cas d'un pavé généralisé non borné se résout facilement en distinguant quelques cas. En outre, tout au long de cette démonstration, nous conviendrons que pour deux processus planaires Y et Z, l'écriture $Y = Z$ signifiera $Y_z = Z_z$ p.s. pour tout $z \in E$. Si $\underline{\underline{F}}$ est une sous-tribu de Σ, alors nous noterons par $\hat{\underline{\underline{F}}}$ la complétée de $\underline{\underline{F}}$ par les ensembles négligeables de Σ.

Il est clair, vu la propriété (3.4) de X, qu'il suffit de considérer le cas d'un pavé $A \subset \mathbb{R}^2_+$. En vertu de la proposition 2.1 et du corollaire 2.2 c), il suffit de se restreindre au cas d'un pavé ouvert

$$A =]z_1, z_2[\ , \ z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2_+ : z_1 < z_2.$$

Posons $A_1 =]z_1, z_2]$; $\underline{\underline{A}}$ étant une algèbre et A_1 étant un pavé semi-ouvert, il s'ensuit que A_1 et $(A_1)^c$ sont éléments de $\underline{\underline{A}}$. Notons Y^1 et Y^2 les processus X^{A_1}, $X^{(A_1)^c}$ respectivement ((3.5)).

Nous allons d'abord exprimer $\underline{\underline{F}}(\mathrm{Fr}\, A)$, $\underline{\underline{F}}(A)$, $\underline{\underline{F}}(A^c)$ par rapport aux filtrations naturelles de Y^1 et Y^2.

Il est manifeste que

(4.1) $X = Y^1 + Y^2$.

A la page suivante, nous prouverons que

(4.2) $Y^1|_{A^c}$ et $Y^2|_{\bar{A}}$ sont $\underline{\underline{F}}(\mathrm{Fr}\, A)$-mesurables.

En utilisant (4.1) et (4.2), il s'ensuit que

(4.3) $\underline{\underline{F}}(\mathrm{Fr}\, A) = \vee_{i=1,2}\ \hat{\sigma}(Y^i|_{\mathrm{Fr}\, A})$.

D'autre part

$$X|_A = Y^1|_A + Y^2|_A \ ;$$

vu que $Y^2|_A$ est $\underline{\underline{F}}(\mathrm{Fr}\, A)$-mesurable ((4.2)) et grâce au corollaire 3.2 a), il s'ensuit que

(4.4) $\underline{\underline{F}}(\bar{A}) = \underline{\underline{F}}(\mathrm{Fr}\, A) \vee \hat{\sigma}(Y^1|_A)$.

Pour terminer cette liste d'observations préliminaires ((4.1-5)), nous remarquons que

(4.5) $\underline{\underline{F}}(A^c) = \underline{\underline{F}}(\mathrm{Fr}\, A) \vee \hat{\sigma}(Y^2|_{A^c})$.

En effet l'inclusion du second membre dans le premier résulte du corollaire 3.2 a) (selon lequel $\hat{\sigma}(Y^2|_{A^c}) \subset \underline{\underline{F}}(A^c)$), et du fait que $\mathrm{Fr}\, A \subset A^c$; l'inclusion du premier membre dans le second est obtenue par le fait que

$$X|_{A^c} = Y^1|_{A^c} + Y^2|_{A^c} \quad \text{et} \quad Y^1|_{A^c} \text{ est } \underline{\underline{F}}(\mathrm{Fr}\, A)\text{-mesurable ((4.2)).}$$

Il est temps de tirer les conclusions. Le corollaire 3.2 c) montre que Y^1 et Y^2 sont indépendants; d'où par le lemme 1.2 (ii) de [1] et (4.3) nous déduisons que

(4.6) $\hat{\sigma}(Y^1) \perp\!\!\!\perp \hat{\sigma}(Y^2) \mid \underline{\underline{F}}(\mathrm{Fr}\, A)$.

Pour vérifier la validité de la PME par rapport à A, il suffit de s'assurer que (proposition 1.5 A de [1])

$$\underline{\underline{F}}(\bar{A}) \perp\!\!\!\perp \underline{\underline{F}}(A^c) \mid \underline{\underline{F}}(\mathrm{Fr}\, A) \ .$$

Par le lemme 1.1 (i) de [1], il s'agit de prouver que

(4.7) $P(\Lambda \mid \underline{\underline{F}}(A^c)) = P(\Lambda \mid \underline{\underline{F}}(\mathrm{Fr}\, A)) \quad \forall\ \Lambda \in \underline{\underline{F}}(\bar{A})$.

En se servant de l'expression (4.6) et du lemme 1.1 ii) de [1], nous pouvons écrire

(4.8) $\hat{\sigma}(Y^1|_A) \perp \hat{\sigma}(Y^2|_{A^c}) \mid \underline{\underline{F}}(\text{Fr } A)$.

Soit $\underline{\underline{K}}$ l'ensemble des $\Lambda = \Lambda_1 \cap \Lambda_2$ tels que $\Lambda_1 \in \underline{\underline{F}}(\text{Fr } A)$, $\Lambda_2 \in \hat{\sigma}(Y^1|_A)$. (4.5), (4.8) et le lemme 1.1 i) de [1], entraînent que

$$\begin{aligned} P(\Lambda \mid \underline{\underline{F}}(A^c)) &= I_{\Lambda_1} P(\Lambda_2 \mid \underline{\underline{F}}(A^c)) = I_{\Lambda_1} P(\Lambda_2 \mid \underline{\underline{F}}(\text{Fr } A)) \\ &= P(\Lambda \mid \underline{\underline{F}}(\text{Fr } A)), \qquad \forall\ \Lambda \in \underline{\underline{K}}, \end{aligned}$$

ce qui prouve la formule (4.7) pour tous les éléments de $\underline{\underline{K}}$. On prouve aisément, en utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle, que la collection $\underline{\underline{G}}$ des $\Lambda \in \underline{\underline{P}}(\Omega)$ satisfaisant la propriété (4.7) est un système de Dynkin ([2], pages 7-9). Par le théorème 1.2.4, page 9 de [2] et par la formule (4.4), nous en concluons que

$$\underline{\underline{G}} \supset \sigma(\underline{\underline{K}}) = \underline{\underline{F}}(\text{Fr } A) \vee \hat{\sigma}(Y^1|_A) = \underline{\underline{F}}(\bar{A}) .$$

Pour achever la preuve, il reste à établir (4.2). Posons

$$A_2 =]0,z_2] - A_1 \ , \ A_3 = \mathbb{R}^2_+ -]0,z_2] \ ,$$

et considérons les processus

$$Z^i = X^{A_i} \ , \ i = 2,3.$$

Nous avons

$$Y^2 = Z^2 + Z^3 \ .$$

Il suffit par conséquent de voir que

$Z^2|_{\bar{A}}$, $Z^3|_{\bar{A}}$ et $Y^1|_{A^c}$ sont $\underline{\underline{F}}(\text{Fr } A)$-mesurables.

Soit $z_i = (x_i,y_i)$, $i=1,2$. Le processus $Z^2|_{\bar{A}}$ est $\underline{\underline{F}}(\text{Fr } A)$-mesurable, car si $z = (x,y) \in \bar{A}$,

$$\begin{aligned} (Z^2)_z &= \mu(A_2 \cap]0,z]) = \\ &= X_{(x_1,y)} + X_{(x,y_1)} - X_{z_1} \text{ p.s.} \ , \end{aligned}$$

et il est clair que $(x_1,y),(x,y_1)$, z_1 sont des éléments de Fr A. Comme le processus $Z^3|_{\bar{A}}$ est identiquement nul, il ne reste plus à montrer que $Y^1|_{A^c}$ est $\underline{\underline{F}}(\text{Fr } A)$-mesurable. Il est évident que si $u \in A^c$, il existe $z \in \text{Fr } A$ tel que $(Y^1)_u = (Y^1)_z$. Par suite, il suffit de constater que $Y^1|_{\text{Fr } A}$ est $\underline{\underline{F}}(\text{Fr } A)$-mesurable. Ceci est clair en vertu du fait que

(4.9) $Y^1|_{\text{Fr } A} = X|_{\text{Fr } A} - Z^2|_{\text{Fr } A} - Z^3|_{\text{Fr } A}$,

et que les trois processus du second membre de (4.9) sont $\underline{\underline{F}}(\text{Fr } A)$-mesurables. QED

Remarque d'ordre général

Revenant à la proposition 2.1, nous pouvons nous demander si elle admet la réciproque suivante: étant donné une filtration $\underline{\underline{F}} = (\underline{\underline{F}}(A))_{A\subset E}$, où E est un espace quelconque, et supposant que $\underline{\underline{F}}$ a la PME par rapport à un sous-ensemble A de E, est-ce qu'elle l'a aussi par rapport à $\bar{A}$?

La réponse est clairement affirmative si Fr $\bar{A}$ = Fr A, mais en général nous avons seulement Fr $\bar{A} \subset$ Fr A. Or, une réponse relativement exhaustive n'a pas été donnée; cependant nous voulons constater ici simplement que si, au moins dans le cas d'une filtration naturelle $\underline{\underline{F}}$ d'un processus planaire à accroissements indépendants possédant la propriété (3.4), la PME se transmettait d'un ensemble à son adhérence, le travail se serait considérablement simplifié. Compte tenu du théorème 4.1, nous aurions pu prouver directement que toute réunion finie de pavés $A \subset E = \mathbb{R}^2$ a la PME. En voici la justification.

Quitte à considérer l'intérieur de A, la proposition 2.1 nous permet de nous restreindre au cas où A est un ouvert. Par la proposition 6.2 (que nous verrons par la suite), nous pouvons exprimer A comme une réunion finie de pavés disjoints non dégénérés, P_i , $i \in I$; nous savons d'autre part que $\overline{\text{Int } P_i} = \bar{P}_i$, $i \in I$. Notons

$$B = \cup_{i\in I} \text{Int } P_i \ ;$$

il est clair que

$$(4.10) \quad \bar{B} = \cup_{i\in I} \overline{\text{Int } P_i} = \cup_{i\in I} \bar{P}_i = \bar{A} \ .$$

Vu que, selon le théorème 4.1, la PME vaut pour Int P_i, elle se transmet à B, par la proposition 1.8 de [1]. Le passage à l'adhérence $\bar{B}$, (4.10) et la proposition 2.1 nous permettent de déduire que A l'a également.

§5. OUTILS DE TOPOLOGIE GENERALE

Dans ce paragraphe, nous présentons les notions et les résultats de topologie générale que nous utiliserons pour démontrer le théorème principal du travail (théorème 7.5). Les notions qui interviennent de façon naturelle sont la connexité et la notion d'ensemble ouvert régulier. Suivant Halmos, au paragraphe 4 de [8], nous dirons qu'un ensemble ouvert est <u>régulier</u> si $O = \text{Int } \bar{O}$.

Soit E un espace topologique. Dans les deux lemmes suivants nous exposons quelques relations élémentaires entre les frontières, les adhérences et les intérieurs de sous-ensembles de E.

<u>Lemme 5.1</u> Soient A et B des sous-ensembles de E.

a) $A \cap B = \phi$, $A = \text{Int } A$, $B = \text{Int } B \implies \bar{A} \cap B = \phi$

b) $A = \text{Int } A$, $\text{Fr } A = \text{Fr } \bar{A} \implies A = \text{Int } \bar{A}$

c) $A = \text{Int } \bar{A}$, $A \subset B \subset \bar{A} \implies \text{Fr } A = \text{Fr } B$

d) $A = \text{Int } A$, $B = (\bar{A})^c \implies B = \text{Int } \bar{B}$

e) $\text{Fr } A = \text{Fr } \bar{A}$, $\text{Fr } B = \text{Fr } \bar{B} \implies \text{Fr } A \cap B = \text{Fr } \overline{A \cap B}$

Pour ce qui concerne le point d) se référer à [8], §4, lemma 3.

Lemme 5.2 Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de E. Notons $A = \cup_{i\in I}A_i$.

a) Si les A_i, $i \in I$, sont ouverts (ou fermés avec I fini), disjoints deux à deux, alors

$$\mathrm{Fr}\, A = \cup_{i\in I}\mathrm{Fr}\, A_i.$$

b) Si les A_i, $i \in I$, sont ouverts et disjoints deux à deux et si A est régulier, alors les A_i sont aussi réguliers.

Démonstration. Nous présentons la justification du point b), qui est la moins immédiate. En se servant du lemme 5.1 a), nous pouvons déduire que les $\mathrm{Int}\,\bar{A}_i$, $i \in I$, sont disjoints deux à deux; d'autre part

$$A = \cup_{i\in I}A_i \subset \cup_{i\in I}\mathrm{Int}\,\bar{A}_i \subset \mathrm{Int}(\cup_{i\in I}\bar{A}_i) \subset \mathrm{Int}\,\bar{A} = A,$$

d'où la conclusion. QED

Nous signalerons par la suite d'autres propriétés analogues à celles énoncées ci-dessus, sans pour autant les présenter sous la forme d'une proposition, car leur preuve résulte immédiatement des définitions de frontière, d'adhérence et d'intérieur.

Concentrons maintenant notre attention sur les problèmes de connexité. Rappelons tout d'abord deux résultats connus ([3], théorèmes 1.5 et 1.6).

Lemme 5.3 Si A est un sous-ensemble connexe de E, alors tout ensemble B tel que $A \subset B \subset \bar{A}$ est connexe.

Lemme 5.4 Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de connexes de E ayant une intersection non vide; alors $A = \cup_{i\in I}A_i$ est connexe.

Nous dirons qu'un sous-ensemble A de E est sans cavités si $(\bar{A})^c$ est connexe. Remarquons que cette définition s'approche de la notion d'ensemble sans trous, donnée par E. Carnal dans [4] à page 21; suivant cet auteur un ensemble sans trous est un ensemble dont le complémentaire est connexe.

Lemme 5.5 Soient A et B des sous-ensembles de E, sans cavités, tels que $\overline{A \cup B} \neq E$ et $\mathrm{Int}\,(\mathrm{Fr}\, A \cup \mathrm{Fr}\, B) = \phi$. Alors $A \cap B$ est sans cavités. (Signalons que la dernière hypothèse n'est pas toujours satisfaite: pensons, par exemple, au cas $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R}-\mathbb{Q}$.)

Démonstration. Soient V et W deux ouverts disjoints tels que $(\overline{A \cap B})^c = V \cup W$. Il faut montrer que l'un de ces deux ensembles est vide. Comme $(\bar{A})^c$ est connexe, il est contenu dans V ou W, supposons par exemple dans V. De l'hypothèse $\overline{A \cup B} \neq E$, nous déduisons que $(\bar{A})^c \cap (\bar{B})^c \neq \phi$; par conséquent, le fait que $(\bar{B})^c$ est connexe nous permet d'affirmer qu'il est aussi contenu dans V; il s'ensuit que

$$W \subset (\overline{A \cap B})^c - ((\bar{A})^c \cup (\bar{B})^c) = (\bar{A} \cap \bar{B}) - (\overline{A \cap B}) \subset \mathrm{Fr}\, A \cup \mathrm{Fr}\, B.$$

Or, par hypothèse, $\mathrm{Int}\,(\mathrm{Fr}\, A \cup \mathrm{Fr}\, B) = \phi$, d'où $W = \phi$ et $A \cap B$ est sans cavités. QED

Dans la suite de ce paragraphe nous supposerons que E est localement connexe, que O est un ouvert de E et $(O_i)_{i \in I}$ constitue la famille de ses composantes connexes. Par le théorème 4.2 de [3], les O_i, $i \in I$, sont ouverts et par conséquent le lemme 5.2 a) nous permet d'écrire

(5.1) $\mathrm{Fr}\, O = \cup_{i \in I} \mathrm{Fr}\, O_i.$

Nous supposerons de plus que O satisfait la propriété suivante:

(5.2) $\forall\, i \in I : \mathrm{Fr}\, O_i \cap (\cup_{j \neq i} \mathrm{Fr}\, O_j)^c \neq \phi.$

Nous verrons, par exemple, que si $E = \mathbb{R}^2$ et si O est une réunion finie de pavés qui est régulière, alors O satisfait (5.2).

Proposition 5.6 Si O est régulier et sans cavités, alors O_i est sans cavités pour tout $i \in I$.

Démonstration. Soit $i \in I$; pour tout $j \in I-\{i\}$, posons $f_j = \mathrm{Fr}\, O_j - \mathrm{Fr}\, O_i$. En vertu de (5.2), f_j est non vide. En outre,

(5.3) $(\overline{O_i})^c = \cup_{j \neq i} ((O^c \cup f_j) \cup (O_j \cup f_j)).$

Soit $j \subset I-\{i\}$ fixé; par (5.1) et le lemme 5.1 c), nous déduisons que

$$f_j \subset \mathrm{Fr}\, O_j \subset \mathrm{Fr}\, O = \mathrm{Fr}\, \bar{O} = \mathrm{Fr}(\bar{O})^c,$$

d'où il est clair que

$$O_j \subset O_j \cup f_j \subset \bar{O}_j, \qquad (\bar{O})^c \subset (\bar{O})^c \cup f_j \subset \overline{(\bar{O})^c}.$$

Or, $(\bar{O})^c$ et O_j étant connexes, le lemme 5.3 nous permet de voir que $(\bar{O})^c \cup f_j$ et $O_j \cup f_j$ sont aussi connexes. Par suite, le lemme 5.4 nous permet d'affirmer d'abord que

$$((\bar{O})^c \cup f_j) \cup (O_j \cup f_j)$$

est connexe et ensuite, compte tenu de (5.3), que $(\overline{O_i})^c$ est connexe. QED

Corollaire 5.7 Si V est un ouvert connexe de E tel que $(\overline{V})^c = O$, alors O_i est sans cavités, pour tout $i \in I$.

Démonstration. Il s'agit de s'assurer que l'ouvert O est sans cavités et régulier pour pouvoir appliquer la proposition 5.6. Or, $(\overline{O})^c$ est connexe, car il est égal à Int $\overline{V}$, et Int $\overline{V}$ est connexe en vertu du lemme 5.3; de plus O est régulier par le lemme 5.1 d). QED

Signalons que la proposition 5.6 et le corollaire 5.7 ne sont plus vrais sans l'hypothèse (5.2); nous omettons toutefois de reporter les contrexemples qui prouvent cette affirmation vu qu'ils sortent du cadre du travail.

§6. PROPRIETES TOPOLOGIQUES DES REUNIONS FINIES DE PAVES

Nous allons maintenant nous occuper de quelques problèmes techniques associés à la notion de réunion finie de pavés. A cet effet, nous nous servirons des résultats du paragraphe 5. Nous nous restreignons donc de nouveau au cas $E = \mathbb{R}^2$.

Nous commençons par discuter la notion de polygonale qui nous permettra d'étudier la frontière d'une réunion finie de pavés.

Nous appellerons segment un sous-ensemble compact convexe d'une droite de E; nous dirons qu'un segment est horizontal ou vertical suivant qu'il est parallèle à l'axe Ox ou Oy; signalons que la notion de segment horizontal ou vertical équivaut à celle de pavé dégénéré fermé; nous appellerons extrémité d'un segment un point extrémal de ce convexe et point intérieur un point qui n'est pas une extrémité. Nous appellerons polygonale une réunion finie de segments et représentation de la polygonale, toute famille finie de segments dont la réunion est égale à la polygonale. Il est clair que l'on peut choisir une des représentations telles que l'intersection de deux segments quelconques est au plus un point. Par la suite une représentation sera toujours supposée satisfaire cette propriété. Si la polygonale admet une représentation constituée seulement de segments non réduits à un point, nous dirons qu'il s'agit d'une polygonale propre.

Soit p une polygonale, $\underline{\underline{R}}_0$ une représentation de p et z un point de p; nous appellerons ordre de z par rapport à p le nombre entier positif défini par la limite, lorsque ε tend vers 0, du nombre de composantes connexes de $B(z,\varepsilon)-p$, où $B(z,\varepsilon)$ est le disque ouvert centré en z de rayon ε au sens de la norme usuelle de E: cette grandeur sera notée $\sigma(z,p)$. A noter que cette limite existe: en effet, si nous choisissons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $B(z,\varepsilon)$ ne rencontre pas d'autres segments de $\underline{\underline{R}}_0$ que ceux auxquels z appartient, alors la limite en question est égale au nombre de composantes connexes de $B(z,\varepsilon)-p$.

Le concept d'ordre d'un point permet de définir trois notions propres à la polygonale. Nous dirons que p est *fermée* si l'ordre de tout point de p par rapport à p vaut au moins deux, que p est *simple* si l'ordre de tout point vaut au plus deux, que p est un *lacet* si p est fermée, simple et connexe par arcs. Remarquons que toute polygonale fermée est propre.

Considérons l'ensemble T des points de p dont l'ordre est différent de deux: T est fini car il est contenu dans l'ensemble S_0 des extrémités des segments de $\underline{\underline{R}}_0$ et des points d'intersection de ces segments. S_0 est fini en vertu de l'hypothèse faite sur la représentation $\underline{\underline{R}}_0$.

A partir de S_0, nous pouvons construire une représentation $\underline{\underline{R}}$ de p telle que l'ensemble S des extrémités des segments de $\underline{\underline{R}}$ contienne l'ensemble T des points d'ordre différent de deux: une telle représentation sera qualifiée de *complète* et les points de S seront appelés les *sommets* de $\underline{\underline{R}}$. Cette représentation est l'ensemble des segments reliants deux points distincts de S_0 contenus dans p et dont aucun de leur points intérieurs n'appartient à S_0.

Pour éclaircir certaines propriétés des polygonales nous pouvons faire appel à des résultats élémentaires de la théorie des graphes. Rappelons ([5], page 9) qu'un graphe simple est un "graphe non orienté", sans arêtes parallèles et sans arêtes dont les extrémités coïncident. Par la suite, l'ensemble des sommets sera choisit minimal.

Supposons maintenant que p est une polygonale propre. Il est possible d'identifier de façon naturelle le couple $(S,\underline{\underline{R}})$ à un graphe simple. Si $(G,\underline{\underline{A}})$ est un sous-graphe de $(S,\underline{\underline{R}})$, $\underline{\underline{A}}$ est une représentation complète avec G comme ensemble de sommets, d'une polygonale q contenue dans p; de plus, par le fait que l'ordre de tout point de p-S par rapport à p est deux, si le degré des éléments de G est supérieur (resp. inférieur) ou égal à deux, alors q est une polygonale fermée (resp. simple); d'autre part, si $(G,\underline{\underline{A}})$ est un graphe connexe, q est connexe par arcs.

Les propriétés suivantes concernent un graphe simple J; a) est bien connue, tandis que b) est le lemme 6 A de [5].

a) Le degré de tout sommet de J vaut deux et J est connexe si et seulement si J est un circuit, c.à.d. la famille de ses arêtes est décrite par une suite $(\{s_i,s_{i+1}\})_{0\leq i\leq m}$, où $s_0 \ldots s_{m+1}$ sont des sommets distincts de J et $s_0 = s_{m+1}$.

b) Si le degré de tout sommet de J vaut au moins deux, alors J contient un circuit.

Etant donné z_1 et z_2 appartenants à E, une polygonale p sera appelée *chemin polygonal allant de z_1 à z_2*, si il existe une application surjective continue $\beta : [0,1] \longrightarrow p$ telle que $\beta(0) = z_1$ et $\beta(1) = z_2$.

Remarquons que si β restreinte à $]0,1]$ est injective, alors p sera une polygonale simple. En effet si p n'était pas simple, il existerait un point z qui serait intersection de trois segments non dégénérés au moins, qui sont contenus dans p. Les propriétés de β nous permettraient de dire que les images réciproques des segments seraient au moins trois intervalles compacts qui se coupent exactement en un point: ceci est absurde.

La proposition suivante est une conséquence immédiate des propriétés a) et b) ainsi que des considérations qui les précèdent.

Proposition 6.1

a) Si p est un lacet et z est un point de p, alors il existe un chemin polygonal simple allant de z à z.

b) Si p est une polygonale fermée, alors on peut en extraire un lacet.

Notons $\underline{\underline{Pg}}$ (resp. $\underline{\underline{P}}$) la famille des réunions finies de pavés généralisés (resp. pavés).

A relever que si P est un élément de $\underline{\underline{Pg}}$ (resp. de $\underline{\underline{P}}$) et P_i, $1 \leq i \leq n$, sont les pavés généralisés (resp. pavés) dont la réunion est P, nous avons

(6.1) $\quad \mathrm{Fr}\, P \subset \cup_{1 \leq i \leq n} \mathrm{Fr}\, P_i,$

d'où il s'ensuit que Fr P est réunion de pavés dégénérés. Remarquons d'autre part que si P et Q sont des éléments de $\underline{\underline{Pg}}$ (resp. de $\underline{\underline{P}}$) alors

(6.2) $\quad \mathrm{Int}\, P,\ P,\ P \cup Q,\ P \cap Q,\ P^c,\ P-Q \in \underline{\underline{Pg}}$ (resp. $\underline{\underline{P}}$)

Proposition 6.2 Tout élément P de $\underline{\underline{Pg}}$ (resp. de $\underline{\underline{P}}$) peut s'écrire comme une réunion disjointe de pavés généralisés (resp. pavés); de plus, si P est ouvert, les pavés peuvent être choisis non dégénérés.

Démonstration. La première partie de l'énoncé est facile à vérifier en tenant compte de (6.2) et de la définition de pavé généralisé (resp. pavé). Supposons P ouvert. Soit m l'entier minimal tel qu'il existe des pavés généralisés disjoints P_i, $1 \leq i \leq m$, tels que

$$P = \cup_{1 \leq i \leq m} P_i$$

Supposons que parmi ces pavés généralisés, il y en ait un dégénéré, disons P_1. Il est alors clair que $n \geq 2$. En outre

$$P_1 \subset \bar{P} = \overline{P-P_1} = \cup_{i \neq 1} \bar{P}_i.$$

Les P_i étant disjoints, nous en déduisons que

$$P_1 \subset \cup_{i \neq 1} (\bar{P}_i - P_i) \subset \cup_{i \neq 1} \mathrm{Fr}\, P_i.$$

Posons alors

$$Q_2 = \mathrm{Fr}\, P_2,\ Q_i = \mathrm{Fr}\, P_i - \mathrm{Fr}\, P_{i-1} - \ldots - \mathrm{Fr}\, P_2,\ 2 \leq i \leq m.$$

Vu que les P_i, respectivement les Q_i, $2 \leq i \leq m$, sont disjoints, il s'ensuit directement que les

$$R_i = P_i \cup (Q_i \cap P_1),\ 2 \leq i \leq m,$$

sont disjoints. D'autre part, nous avons que $P = \cup_{2\leq i\leq m} R_i$. Mais

$$P_i \subset R_i \subset \overline{P}_i,\ 2 \leq i \leq m,$$

donc, compte tenu des lignes qui suivent (3.1), les R_i sont des pavés généralisés (resp. des pavés) non dégénérés, une contradiction au caractère minimal de m. QED

A noter qu'un pavé généralisé peut s'écrire comme une réunion de pavés d'intersection non vide, et est donc connexe, en vertu du lemme 5.4. D'où si $P \in \underline{\underline{Pg}}$, chacun des pavés généralisés dont il est réunion, est contenu dans une composante connexe. Il s'ensuit le résultat suivant.

Corollaire 6.3 Un élément P de $\underline{\underline{Pg}}$ a toujours un nombre fini de composantes connexes et chacune de ces composantes est un élément de $\underline{\underline{Pg}}$.

Remarquons de plus qu'en vertu des considérations qui précèdent (5.1), si P est ouvert ses composantes connexes sont ouvertes.

Notre prochain objectif est de caractériser la frontière des éléments ouverts de $\underline{\underline{P}}$ réguliers, connexes, sans cavités; pour cela nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 6.4 Si F est un élément fermé de $\underline{\underline{P}}$, alors la frontière de Int F est une polygonale fermée.

Démonstration. Notons p = Fr Int F. Vu que p est topologiquement fermé, p est une polygonale; considérons une représentation $\underline{\underline{R}}$ de segments dont p est la réunion. Soit z un point de p et $\varepsilon > 0$ tel que $B(z,\varepsilon)$ ne rencontre pas d'autres segments de $\underline{\underline{R}}$ que ceux auxquels z appartient. Notons $G = B(z,\varepsilon)-p$; G est ouvert et il est clair que

(6.3) $\quad \text{Int } F \cap G \neq \phi,$

car $z \in$ Fr Int F. Montrons que

(6.4) $\quad (\overline{\text{Int } F})^c \cap G \neq \phi.$

Si (6.4) était fausse, nous aurions $G \subset \overline{\text{Int } F} \subset F$; compte tenu du fait que

$$p \subset \text{Fr } F \subset F,$$

il s'ensuivrait que $B(z,\varepsilon) \subset F$, donc que $z \in$ Int F, ce qui n'est pas possible.

Etant donné que $p \cap G = \phi$, et compte tenu de (6.3) et (6.4), nous pouvons décomposer G en deux ouverts disjoints non vides. Nous avons ainsi prouvé que le nombre de composantes connexes de G est supérieur à 1. Ceci nous permet de conclure que $\sigma(z,p) > 1$, d'où p est fermée. QED

La proposition 6.1 a), le lemme 5.1 d) et le théorème de Jordan, ([6] , tome 1, Ap. 4.2, page 261) permettent d'énoncer le résultat suivant.

<u>Lemme 6.5</u> Soit h un lacet.

a) E-h a exactement deux composantes connexes dont l'une est bornée et l'autre non bornée.
b) La frontière de chacunes des composantes est h.
c) Chaque composante est le complémentaire de l'adhérence de l'autre et elle est de plus régulière, connexe et sans cavités.

<u>Proposition 6.6</u> Soit P un élément ouvert de $\underline{\underline{P}}$. Alors Fr P est un lacet constitué de segments horizontaux et verticaux si et seulement si P est régulier, connexe et sans cavités.

<u>Démonstration.</u> Supposons que Fr P soit un lacet; grâce au lemme 6.5 a) et b), E-Fr P se décompose en deux composantes connexes, H_1 bornée et H_2 non bornée ayant toutes les deux Fr P comme frontière. Le fait que P est un ouvert borné et la connexité de H_1 et H_2 entraînent que $H_1 \subset P$ et $H_2 \subset (\bar{P})^c$. Les relations

$$E\text{-Fr } P = H_1 \cup H_2 \subset P \cup (\bar{P})^c = E\text{-Fr } P,$$

permettent de conclure que les inclusions précédentes sont en fait des égalités, d'où, d'après le lemme 6.5 c), P est régulier, connexe et sans cavités.

Inversément, supposons que P est connexe, sans cavités et régulier; par le lemme 6.4, Fr P est une polygonale fermée; en outre la proposition 6.1 b) nous permet d'extraire de Fr P un lacet h. Pour achever la preuve, il suffit d'établir que h = Fr P. Compte tenu du lemme 6.5, considérons la composante bornée H_1 et celle non bornée H_2 de E-h. Montrons que

$$(6.5) \quad P = H_1\text{-Fr } P.$$

Le fait que P est connexe joint à l'inclusion $h \subset \text{Fr } P$, nous permet d'affirmer que $P \subset H_1$, donc que $P \subset H_1\text{-Fr } P$. Pour prouver l'autre sens de l'inclusion, il nous reste à vérifier que $H_1 \subset \bar{P}$; ceci a lieu, sinon $H_1 \cap (\bar{P})^c$ serait non vide, ce qui n'est pas possible comme nous allons le voir: le fait que $P \subset H_1$ implique, grâce au lemme 6.5 c), que $H_2 \subset (\bar{P})^c$; en outre

$$h \subset \text{Fr } P \implies (\bar{P})^c \cap h = \phi;$$

par conséquent $H_1 \cap (\bar{P})^c$ et H_2 rendraient $(\bar{P})^c$ non connexe.

Des manipulations ensemblistes permettent de déduire de (6.5) que

$$(6.6) \quad (\bar{P})^c = H_2\text{-Fr } P.$$

Pour conclure, il nous reste à démontrer que

$$\text{Fr } P \cap H_1 = \text{Fr } P \cap H_2 = \phi.$$

Soit $z \in \text{Fr } P \cap H_1$; soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(z,\varepsilon) \subset H_1$; en tenant compte de (6.5), nous avons

$B(z,\varepsilon)-\mathrm{Fr}\ P \subset H_1-\mathrm{Fr}\ P = P;$

par suite, du fait que $B(z,\varepsilon) \subset \bar{P}$, nous avons $z \in \mathrm{Int}\ \bar{P} = P$; mais alors z ne peut pas appartenir à Fr P. Pour établir que $\mathrm{Fr}\ P \cap H_2 = \phi$, nous procédons de façon analogue, en utilisant (6.6) et le lemme 5.1 d). QED

Nous présentons maintenant des résultats préliminaires qui donnent des renseignements sur la transmission de la propriété d'être sans cavités d'un ouvert de E à ses composantes connexes.

Lemme 6.7 Supposons que P est un élément ouvert régulier de Pg. Soit $(C_j)_{1\leq j\leq n}$ la famille des composantes connexes de P. Alors P vérifie l'hypothèse (5.2).

Démonstration. Remarquons que, d'après le corollaire 6.3, les C_j appartiennent à Pg et sont en nombre fini. Pour vérifier (5.2), il s'agira, pour tout entier k compris entre 1 et n, de trouver un élément z appartenant à $\mathrm{Fr}\ C_k \cap (\cup_{j\neq k}\mathrm{Fr}\ C_j)^c$.

La proposition 6.2 nous assure que C_k peut s'écrire comme une réunion disjointe de pavés généralisés non dégénérés P_{ik}, $1 \leq i \leq n_k$. De cela et de (5.1) nous déduisons qu'il existe un segment non réduit à un point tel que

$S \subset \mathrm{Fr}\ C_k \subset \mathrm{Fr}\ P$

et, par (6.1), qu'il existe un entier u compris entre 1 et n_k tel que $T = S \cap \mathrm{Fr}\ P_{uk}$ est un segment non réduit à un point. Posons $O = (\bar{P})^c$; par le lemme 5.1 d) l'ouvert O est régulier; par (6.2), $O \in$ Pg et par la proposition 6.2, O peut s'écrire comme une réunion finie de pavés généralisés non dégénérés disjoints, H_i, $i \in I$. Du lemme 5.1, nous déduisons que

$T \subset S \subset \mathrm{Fr}\ P = \mathrm{Fr}\ O$

et qu' il existe $h \in I$ tel que $\tilde{T} = \mathrm{Fr}\ H_h \cap T$ est un segment non réduit à un point.

Utilisons maintenant la nature du bord d'un pavé généralisé non dégénéré: $\tilde{T}$ est contenu dans un segment de la frontière de P_{uk} et de H_h; en outre P_{uk} et H_h sont disjoints, donc si z est un point intérieur de $\tilde{T}$, alors $\sigma(z,\mathrm{Fr}\ P) = 2$.

Il est clair que z appartient à $\mathrm{Fr}\ C_k$; supposons maintenant que $z \in \mathrm{Fr}\ C_j$ pour $j \neq k$ bien choisi et prouvons que cela n'est pas possible; dans ce cas, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, C_j, C_k et O étant disjoints, nous pouvons décomposer $B(z,\varepsilon)-\mathrm{Fr}\ P$ en au moins trois composantes connexes. Par suite, $\sigma(z,\mathrm{Fr}\ P) \geq 3$, ce qui n'est pas possible, donc $z \in \mathrm{Fr}\ C_j$. QED

Voilà deux conséquences directes du lemme 6.7, de la proposition 5.6 et du corollaire 5.7.

Corollaire 6.8 Si P est un élément ouvert régulier et sans cavités de $\underline{\underline{Pg}}$ alors ses composantes connexes sont sans cavités.

Corollaire 6.9 Si P est un élément ouvert et connexe de $\underline{\underline{Pg}}$ alors les composantes connexes de $(\bar{P})^c$ sont sans cavités.

§7. PROPRIETES DE MARKOV POUR LES REUNIONS FINIES DE PAVES

Considérons une filtration $\underline{\underline{F}} = (\underline{\underline{F}}(A))_{A \subset E}$, où E désigne $\mathbb{R}^2$.

Théorème 7.1 Si $\underline{\underline{F}}$ a la PME par rapport à tout élément de $\underline{\underline{P}}$ qui est ouvert, régulier, connexe et sans cavités, alors $\underline{\underline{F}}$ l'a par rapport à tout élément de $\underline{\underline{P}}$.

Démonstration. Soit $P \in \underline{\underline{P}}$; compte tenu du corollaire 2.2 a), la PME sera valable pour P si elle est valable pour $Q = \text{Int } \bar{P}$. Or, Q est clairement un élément régulier de $\underline{\underline{P}}$. Si Q n'est pas connexe, nous pouvons le décomposer en composantes connexes et, par la proposition 1.8 de [1], nous limiter à l'étude de chaque composante séparément. Supposons donc Q connexe. Si Q n'est pas sans cavités, nous transferons l'étude à $(\bar{Q})^c$ (corollaire 2.2 b)) et partageons $(\bar{Q})^c$ en composantes connexes C_i, $1 \leq i \leq n$. Soit S une boule fermée qui contient Q. Vu que S^c est connexe, il est contenu dans une des composantes connexes C_i, disons C_1, qui sera non bornée; les autres seront bornées, puisque contenues dans S. Par la proposition 1.8 de [1], il suffit de contrôler la validité de la PME pour les C_i séparément. Par les lemmes 5.1 d) et 5.2 b) et les corollaires 6.3 et 6.9, les C_i sont des éléments réguliers, connexes et sans cavités de $\underline{\underline{Pg}}$. Par hypothèse, la PME vaut donc pour les C_i avec $2 \leq i \leq n$, vu qu'ils sont bornés. D'autre part, grâce au lemme 5.1 d), si $D = (\bar{C}_1)^c$, alors D est aussi un élément de $\underline{\underline{Pg}}$ régulier, connexe et sans cavités; par hypothèse, la PME vaut donc pour D, puisque D est borné, et par conséquent (corollaire 2.2 b) pour C_1. QED

Nous allons introduire brièvement un dernier instrument technique. Si P est un élément de $\underline{\underline{Pg}}$, nous noterons dorénavant par $\hat{P}$ l'adhérence de P pour la topologie gauche de E, c'est à dire la topologie engendrée de la façon suivante: si $z \in E$, alors un système fondamental de voisinages de z est donné par les pavés semi-ouverts $]a,z]$ où $a \in E$ et $a < z$. Pour cette topologie les ouverts coïncident avec les fermés. Remarquons que si P est un pavé non dégénéré ouvert, alors $\hat{P}$ est le pavé semi-ouvert Q tel que $P \subset Q \subset \bar{P}$. Si P et Q sont des éléments de $\underline{\underline{Pg}}$ il est manifeste que $\widehat{P \cup Q} = \hat{P} \cup \hat{Q}$ et que si P et Q sont ouverts disjoints alors l'intersection de $\hat{P}$ et $\hat{Q}$ est aussi vide.

Soit P un élément ouvert de $\underline{\underline{P}}$. Considérons une représentation complète $\underline{\underline{R}}$ de la polygonale et son ensemble de sommets S. Enumérons les abscisses et les ordonnées des sommets respectivement par $x_0 \dots x_m$ et $y_0 \dots y_n$. Posons $v_{ij} = (x_i, y_j)$, $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$. S est contenu dans l'ensemble des v_{ij} et tout segment de $\underline{\underline{R}}$ est contenu dans une droite d'équation $x = x_i$ ou $y = y_j$ pour i,j bien choisis. Posons

$$R_{ij} =]v_{i-1,j-1}, v_{ij}], \qquad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n.$$

Il est clair que $\text{Int } R_{ij} \cap \text{Fr } P = \phi$ et, d'autre part, que $\text{Int } R_{ij}$ étant connexe, il est contenu dans P ou (exclusivement) dans $(\bar{P})^c$. Notons

$$(7.1) \quad \tilde{P} = \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \\ \text{Int } R_{ij} \subset P}} R_{ij}.$$

Avant d'énoncer le lemme 7.2, nous rappelons que le clan $\underline{\underline{C}}$ et l'algèbre $\underline{\underline{A}}$ ont été définis dans les lignes qui précèdent (3.2).

<u>Lemme 7.2</u> Soient $P \in \underline{\underline{Pg}}$ et $Q \in \underline{\underline{A}}$.
a) Si $P \subset Q$ et $\text{Int }(Q-P) = \phi$ alors $Q = \hat{P}$.
b) Si P est un élément ouvert de $\underline{\underline{Pg}}$ alors $\hat{P} \in \underline{\underline{C}}$.

<u>Démonstration.</u> Prouvons d'abord a). Nous remarquons premièrement que $\hat{P} \subset Q$, vu que $P \subset Q$ et Q est fermé pour la topologie gauche. D'autre part, $\text{Int }(Q-P) = \phi$ en vertu de la seconde hypothèse; ceci joint au fait que $Q-\hat{P} \in \underline{\underline{A}}$ nous permet de conclure que $Q-\hat{P}$ est vide. Compte tenu de (7.1), il s'ensuit que $P \subset \tilde{P} \subset \bar{P}$ et que $\tilde{P} \in \underline{\underline{C}}$; en vertu de la partie a), nous avons $\tilde{P} = \hat{P}$, ce qui permet de tirer la conclusion b).

QED

Si $P \in \underline{\underline{P}}$, nous noterons par $Fr_x P$ (resp. $Fr_y P$) la partie de la frontière de P composée des segments horizontaux (resp. verticaux).

Dans le reste du paragraphe $\underline{\underline{F}}$ désignera la filtration d'un processus X à accroissements indépendants possédant la propriété (3.4).

<u>Proposition 7.3</u> Soit μ la mesure élémentaire associée au processus X. Alors $\mu(\hat{P})$ est mesurable par rapport à $\underline{\underline{F}}(Fr_x P)$ et $\underline{\underline{F}}(Fr_y P)$, si P est un element ouvert de $\underline{\underline{P}}$.

<u>Démonstration.</u> Soient i et j deux entiers compris respectivement entre entre 1 et m et entre 1 et n; en tenant compte de (7.1) nous notons

$$V_i = \bigcup_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \text{Int } R_{ij} \subset P}} (R_{ij} \cap P), \qquad H_j = \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq m \\ \text{Int } R_{ij} \subset P}} (R_{ij} \cap P)$$

Il est manifeste que

$$P = \cup_{1\leq i\leq m} V_i = \cup_{1\leq j\leq n} H_j;$$

vu que la famille $(V_i)_{1\leq i\leq m}$ (resp. $(H_j)_{1\leq j\leq n}$) est disjointe, il en est de même de la famille $(\hat{V}_i)_{1\leq i\leq m}$ (resp. $(\hat{H}_j)_{1\leq j\leq n}$); de plus

$$\hat{P} = \cup_{1\leq i\leq m} \hat{V}_i = \cup_{1\leq j\leq n} \hat{H}_j.$$

Par le lemme 7.2 b) $\hat{V}_i$ et $\hat{H}_j$ sont éléments de $\underline{\underline{C}}$; d'où

$$(7.2)\quad \mu(\hat{P}) = \Sigma_{1\leq i\leq m}\ (\hat{V}_i) = \Sigma_{1\leq j\leq n}\ \mu(\hat{H}_j).$$

Remarquons que V_i est aussi l'intersection de la bande verticale ouverte comprise entre les droites $x = x_{i-1}$ et $x = x_i$, et P; de même H_j est l'intersection entre la bande horizontale ouverte comprise entre les droites $y = y_{j-1}$ et $y = y_j$, et P d'où

$$(7.3)\quad Fr_x V_i \subset Fr_x P, \qquad Fr_y H_j \subset Fr_y P.$$

En vertu de (7.2) et (7.3) il nous reste à montrer que pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$, $\mu(\hat{V}_i)$ et $\mu(\hat{H}_j)$ sont respectivement mesurables par rapport à $\underline{\underline{F}}(Fr_x V_i)$ et $\underline{\underline{F}}(Fr_y H_j)$. Considérons la décomposition en composantes connexes de V_i et H_j, à savoir $(C_{ik})_{k\in K_i}$ et $(D_{hj})_{h\in H_j}$. Il est clair que ces composantes connexes sont encore des pavés. Les familles de pavés semi-ouverts $(\hat{C}_{ik})_{k\in K_i}$ et $(\hat{D}_{hj})_{j\in H_j}$ étant disjointes, nous pouvons écrire que

$$(7.4)\quad \mu(\hat{V}_i) = \Sigma_{k\in K_i}\ \mu(\hat{C}_{ik}) = \Sigma_{h\in H_j}\ \mu(\hat{D}_{hj}).$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $\mu(\hat{C}_{ik})$ et $\mu(\hat{D}_{hj})$ sont respectivement mesurables par rapport à $\underline{\underline{F}}(Fr_x V_i)$ et $\underline{\underline{F}}(Fr_y H_j)$. Cela est clair car, par le lemme 5.2 a),

$$Fr\ V_i = \cup_{k\in K_i} Fr\ C_{ik}, \qquad Fr\ H_j = \cup_{h\in H_j} Fr\ D_{hj}$$

et comme C_{ik} et D_{hj} sont des pavés, nous avons que $Fr\ \hat{C}_{ik} = Fr\ C_{ik}$ et $Fr\ \hat{D}_{hj} = Fr\ D_{hj}$. QED

La proposition suivante contient le complément nécessaire pour généraliser le théorème 4.1 au cas où P est une réunion finies de pavés.

<u>Proposition 7.4</u> Soit P un élément ouvert de $\underline{\underline{P}}$ régulier, connexe, sans cavités et contenu dans $\{x \in E: x > 0\}$. Considérons les processus

$$Y^1 = X^{\hat{P}},\ Y^2 = X^{\hat{P}^c},$$

$X^{\hat{P}}$ et $X^{(\hat{P})^c}$ étant définis par la formule (3.5) (rappelons que $\hat{P} \in \underline{\underline{C}}$, donc $(\hat{P})^c \in \underline{\underline{A}}$). Alors les processus $Y^1|_{P^c}$ et $Y^2|_{\bar{P}}$ sont mesurables par rapport à $\underline{\underline{F}}(Fr\ P)$.

Démonstration.

a) Nous commençons par prouver que $Y^1|_{P^c}$ est $\underline{\underline{F}}$(Fr P)-mesurable.

Soit $z \in P^c$; posons

$$P_z = \,]0,z[\, \cap P.$$

Le lemme 5.1 b), c), e) permet de vérifier que P_z est régulier. En outre P_z est sans cavités (lemme 5.5) et par conséquent, par le lemme 5.2 b) et le corollaire 6.8, ses composantes connexes C_k, $1 \leq k \leq n$, sont sans cavités et régulières. En vertu de la proposition 6.6, leur frontière est un lacet. Il est clair que les $\hat{C}_k$, $1 \leq k \leq n$, sont des éléments de $\underline{\underline{C}}$ disjoints deux à deux; par conséquent

$$\mu(\hat{P}_z) = \Sigma_{1\leq k\leq n}\mu(\hat{C}_k).$$

Comme par le lemme 7.2 a) $\hat{P}_z = P \cap]0,z]$, il suffit de prouver que $\mu(\hat{C}_k)$ est mesurable par rapport à $\underline{\underline{F}}$(Fr P), $1 \leq k \leq n$.

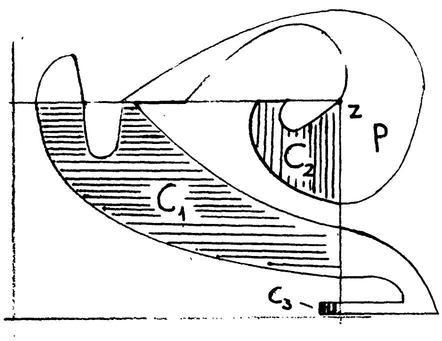
Soit $1 \leq k \leq n$; supposons que $z = (x_0,y_0)$; désignons par S_y le segment d'extrémités $(x_0,0)$ et z, par S_x celui d'extrémités $(0,y_0)$ et z. Il est clair que

(7.5) $\quad \text{Fr } C_k \subset \text{Fr } P \cup S_x \cup S_y$.

Distinguons deux cas:

1) $\text{Fr } C_k \cap S_x \subset \text{Fr } P$

2) $(\text{Fr } C_k \cap S_x) \cap (\text{Fr } P)^c \neq \phi$



1) <u>$\text{Fr } C_k \cap S_x \subset \text{Fr } P$</u> (cf. figure: k = 2,3)

Dans ce cas,

$$\text{Fr } C_k \subset \text{Fr } P \cup S_y,$$

et par conséquent

$$\underline{\underline{F}}(\text{Fr}_x\, C_k) \subset \underline{\underline{F}}(\text{Fr}_x\, P).$$

D'après la proposition 7.3, $\mu(\hat{C}_k)$ est mesurable par rapport à $\underline{\underline{F}}(\text{Fr}_x\, C_k)$, d'où la conclusion.

2) <u>$(\text{Fr } C_k \cap S_x) \cap (\text{Fr } P)^c \neq \phi$</u> (cf. figure: k = 1)

Par (6.2) $\text{Fr } C_k \cap S_x$ est une réunion finie de pavés, même si dégénérés. Par le corollaire 6.3 , nous pouvons énumérer les composantes connexes de cet ensemble par $S_1 \ldots S_m$: si $\{(0,y_0)\}$ ou $\{z\}$ sont parmi ces composantes nous ne les comptons pas parmi ces S_i. Par le théorème 3.2 de [3], les S_i sont des fermés bornés de S_x, donc des segments. Les S_i ne sont pas réduits à un point: en effet tout point non extrémal z de S_x appartient à un segment horizontal non dégénéré contenu dans

Fr C_k, vu que son ordre par rapport au lacet Fr C_k vaut 2. Soit

$$S_i = [w_1, w_2]$$

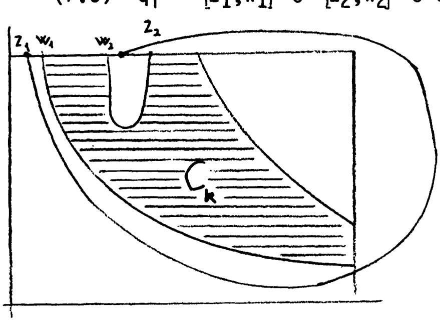
(pour simplifier la notation, nous n'indiquerons pas que w_1 et w_2 dépendent de i). Vérifions que w_1 et w_2 appartiennent à Fr P: soit $j = 1,2$; $w_j \in$ Fr C_k, d'où pour tout $\varepsilon > 0$, $B(w_j, \varepsilon)$ rencontre C_k qui est sous-ensemble de P; il reste à prouver que $B(w_j, \varepsilon)$ rencontre P^c; si w_j est égal à $(0, y_0)$ ou z nous avons fini vu que ces deux points sont contenus dans P^c; si w_j n'est pas point extrémal, $B(w_j, \varepsilon)$ ne peut pas être contenu dans P car sinon $B(w_j, \varepsilon) \cap]0,z[$ est une partie connexe de $P \cap]0,z[$ rencontrant C_k, d'où cette demi-boule inférieure est sous-ensemble de C_k; ceci entraîne que

$$T = S_x \cap B(w, \varepsilon) \subset \text{Fr } C_k$$

et $T \cup S_i$ est un connexe de Fr $C_k \cap S_x$ qui est strictement plus grand que la composante S_i: ceci est absurde.

Pour chaque S_i, $1 \leq i \leq m$, nous allons associer un domaine comme il est expliqué par la suite. Soit $\delta > 0$, suffisamment petit pour que $B(w_j, \delta)$-Fr P se décompose en composantes connexes de la forme d'un secteur circulaire ouvert. Comme P est régulier, il existe une composante connexe D_j de $B(w_j, \delta)$-Fr P telle que $D_j \subset (\overline{P})^c$ pour $j = 1,2$. $(\overline{P})^c$ étant un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$, pour tout $x_1 \in D_1$ et $x_2 \in D_2$ il existe un chemin polygonal simple contenu dans $(\overline{P})^c$ allant de x_1 à x_2 (cf. [7], th. 2-8 V p.81). Etant donné la forme de D_1 et D_2, il existe $z_1 \in D_1$, $z_2 \in D_2$ et un chemin polygonal simple p_i contenu dans $(\overline{P})^c$ qui ne rencontre aucun point intérieur de $[z_j, w_j]$, $j = 1,2$. Considérons le lacet suivant:

$$(7.6) \quad q_i = [z_1, w_1] \cup [z_2, w_2] \cup S_i \cup p_i$$



Compte tenu du lemme 6.5, considérons les composantes connexes de $E-q_i$, à savoir $(Q_i)'$ et $(Q_i)''$, et de plus les ouverts suivants:

$$(P_i)' = P \cap (Q_i)',$$

$$(P_i)'' = P \cap (Q_i)''.$$

Par le corollaire 6.3 et (6.2), $(P_i)'$ et $(P_i)''$ sont éléments de $\underline{\underline{Pg}}$. Le fait que

$$C_k \cap S_i = \phi, \qquad C_k \subset P, \qquad q_i \cap P \subset S_i,$$

nous fait conclure que $C_k \cap q_i = \phi$, d'où, par connexité de C_k, nous tirons que C_k est contenu dans $(P_i)'$ ou (exclusivement) $(P_i)''$. Supposons $C_k \subset (P_i)''$.

Il est clair que $(P_i)' \cup (P_i)'' = P-S_i$ et, par suite, le lemme 5.2 a) nous assure que

(7.7) $\mathrm{Fr}\,(P_i)' \subset \mathrm{Fr}\,(P-S_i) \subset \mathrm{Fr}\,P \cup S_i$.

Posons $V = \cup_{1\leq i\leq m}(P_i)'$. En vertu de (7.7) nous avons

(7.8) $\mathrm{Fr}\,V \subset \mathrm{Fr}\,P \cup (\cup_{1\leq i\leq m}S_i)$, $\quad \mathrm{Fr}_y V \subset \mathrm{Fr}_y P$.

La proposition 7.3 et (7.8) entraînent que $\mu(\hat{V})$ est $\underline{\underline{F}}(\mathrm{Fr}_y P)$-mesurable. Considérons l'ouvert $O = \mathrm{Int}\,(\overline{V \cup C_k})$; par (7.5) et (7.8) il s'ensuit que

(7.9) $\mathrm{Fr}\,O \subset \mathrm{Fr}\,V \cup \mathrm{Fr}\,C_k \subset \mathrm{Fr}\,P \cup (\cup_{1\leq i\leq m}S_i) \cup S_y$.

Nous allons établir que

(7.10) $\mathrm{Fr}\,O \subset \mathrm{Fr}\,P \cup S_y$.

Il suffit de prouver, compte tenu de (7.9), que $\mathrm{Fr}\,O \cap (S_i-\mathrm{Fr}\,P) = \phi$, $1 \leq i \leq m$. $S_i-\mathrm{Fr}\,P$ étant un ouvert de S_i, considérons un élément x de cet ensemble et un nombre positif θ tel que le segment d'extrémités $x-(\theta,0)$ et $x+(\theta,0)$ soit contenu dans $S_i-\mathrm{Fr}\,P$. Rappelons que $\mathrm{Fr}\,C_k$ est un lacet, donc en particulier que $\sigma(x,\mathrm{Fr}\,C_k) = 2$, et que $S_i \subset \mathrm{Fr}\,C_k$; par suite, θ peut être choisi tel que $B(x,\theta)-S_i$ ait deux composantes connexes; du fait que $x \notin \mathrm{Fr}\,P$, il est clair que ces deux composantes sont simultanément contenues dans P ou $(\bar{P})^c$ et comme P et $(\bar{P})^c$ sont réguliers (lemme 5.1 d)), il s'ensuit que $B(x,\theta)$ est contenu dans P ou $(\bar{P})^c$; or $x \in \mathrm{Fr}\,C_k$, donc $B(x,\theta) \cap C_k \neq \phi$ et par suite $B(x,\theta) \subset P$. Comme $S_i \subset \mathrm{Fr}\,C_k$ et $\mathrm{Fr}\,C_k$ est un lacet, une des composantes connexes introduites ci-dessus rencontre C_k sans contenir de points de $\mathrm{Fr}\,C_k$; par connexité il s'ensuit qu'elle est contenue dans C_k; l'autre composante rencontre $(Q_i)'$, vu que $x \in q_i$ et q_i est un lacet; or elle est contenue dans P, donc elle rencontre $(P_i)'$ et, par conséquent, compte tenu de (7.7) et de la connexité, nous constatons qu'elle est entièrement contenue dans $(P_i)'$; il en résulte que

$$B(x,\theta) \subset \overline{(P_i)' \cup C_k} \implies x \in \mathrm{Int}\,(\overline{V \cup C_k}) = O \implies x \notin \mathrm{Fr}\,O,$$

d'où (7.10).

Par (7.10) et la proposition 7.3, $\mu(\hat{O})$ est $\underline{\underline{F}}(\mathrm{Fr}_x P)$-mesurable. D'autre part, il est clair que $V \cup C_k \subset \hat{O} \subset \overline{V \cup C_k}$; par le lemme 7.2 a), nous avons que

(7.11) $\hat{O} = \widehat{V \cup C_k} = \hat{V} \cup \hat{C}_k$.

Le fait que $\hat{V}$ et $\hat{C}_k$ sont disjoints (en effet V et C_k le sont par le lemme 5.1 a)) joint à (7.11), nous permet de déduire que

$$\mu(\hat{C}_k) = \mu(\hat{O}) - \mu(\hat{V}),$$

et donc que $\mu(\hat{C}_k)$ est $\underline{\underline{F}}$(Fr P)-mesurable.

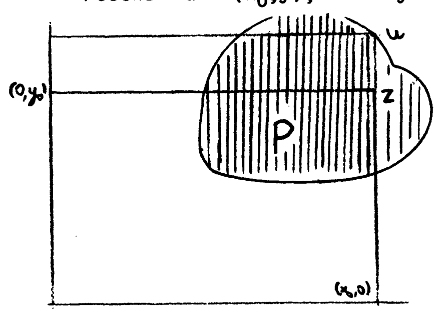
b) Passons maintenant à la preuve de la mesurabilité de $Y^2|_{\bar{P}}$ par rapport à $\underline{\underline{F}}$(Fr P).

Soit $z \in \bar{P}$; posons $Q_z =]0,z[\cap (\bar{P})^c$. Il s'agit de vérifier que $(Y^2)_z$ est $\underline{\underline{F}}$(Fr P)-mesurable. Vu que $]0,z] \cap (\hat{P})^c$ est un élément de $\underline{\underline{A}}$ qui contient Q_z, le lemme 7.2 a) nous permet d'écrire

$$\hat{Q}_z =]0,z] \cap (\hat{P})^c.$$

Il s'agit donc de prouver que la variable aléatoire $\mu(\hat{Q}_z)$, qui est donc égale à $\mu(]0,z] \cap (\hat{P})^c)$, est $\underline{\underline{F}}$(Fr P)-mesurable.

Posons $u = (x_0, y)$, où $y = \inf\{ r \geq y_0 : (x_0, r) \in P^c \}$. Il est clair que $u \in$ Fr P. En vertu de ceci et de la partie a), nous savons que $\mu(]0,u] \cap (\hat{P})^c)$ est $\underline{\underline{F}}$(Fr P)-mesurable, étant la différence de $\mu(]0,u])$ et $\mu(]0,u] \cap \hat{P})$.



Pour achever la preuve, il suffit de vérifier que $\mu(](0,y_0);u] \cap (\hat{P})^c)$ est $\underline{\underline{F}}$(Fr P)-mesurable. Du fait que $[z,u]-\{u\} \subset P$, il s'ensuit que

$$Fr_y(](0,y_0),u[\cap (\bar{P})^c) \subset Fr_y P.$$

Par conséquent,

$$\underline{\underline{F}}(Fr_y(](0,y_0),u[\cap (\bar{P})^c)) \subset \underline{\underline{F}}(Fr_y P).$$

Cela, joint au lemme 7.2 b), au lemme 5.1 et à la proposition 7.3, nous permet de conclure que la variable aléatoire $\mu(](0,y_0);u] \cap (\hat{P})^c)$, étant égale à $\mu(](0,y_0),u[\cap (\bar{P})^c)$, est mesurable par rapport à $\underline{\underline{F}}(Fr_y P)$. QED

Nous sommes en mesure d'énoncer le théorème principal du travail.

<u>Théorème 7.5</u> Si $\underline{\underline{F}} = (F(A))_{A \in E}$ est la filtration naturelle d'un processus X à accroissements indépendants satisfaisant l'hypothèse (3.4), alors X a alors la PME par rapport à tout $P \in \underline{\underline{P}}$.

Démonstration. Le théorème 7.1 permet de ramener le problème au cas où P est un élément ouvert de $\underline{\underline{P}}$ qui est connexe, sans cavités et régulier; $P \cap \{x > 0\}$ est alors un élément de $\underline{\underline{P}}$ régulier et sans cavités, en vertu des lemmes 5.1 et 5.5. Considérons ses composantes connexes P_i, $1 \leq i \leq k$ (corollaire 6.3), qui sont régulières et sans cavités, par le lemme 5.2 b) et le corollaire 6.8. Si la PME vaut pour chaque P_i, elle vaut pour $P \cap \{x > 0\}$, grâce à la proposition 1.8 de [1], donc évidemment pour P. Nous pouvons donc nous restreindre au cas $P \in \underline{\underline{P}}$, régulier, connexe, sans cavités et tel que $P \subset \{x > 0\}$.

Définissons Y^1 et Y^2 de la même manière que dans la proposition 7.4: en reprenant la preuve du théorème 4.1 avec $A = P$, nous voyons que tout se refait de la même manière à l'exception du point délicat (4.2) qui se prouve à l'aide de la proposition 7.4. QED

Pour conclure nous signalons deux conséquences plus ou moins directes de notre résultat.

Corollaire 7.6 Les hypothèses étant celles du théorème 7.5, X a la PM par rapport à tout ensemble borné de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. La famille ξ des pavés ouverts constitue une base topologique de $\mathbb{R}^2$ formée d'ouverts connexes. Par le théorème 7.5 et la proposition 1.6 de [1], $\underline{\underline{F}}$ a la PM pa rapport à toute réunion finie d'éléments de ξ. Par le corollaire 1.11 de [1], $\underline{\underline{F}}$ a la PM par rapport à tout ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. Le passage à tout ensemble borné se fait par l'intermédiaire de la proposition 2.1 QED

Notre dernière considération concerne le cas unidimensionnel.

Proposition 7.7 Soit $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un processus à accroissements indépendants tel que $Y_t = 0$ p.s. si $t \leq 0$. La filtration naturelle de ce processus a la PME par rapport à tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$. QED

Démonstration. De façon analogue au paragraphe 3 nous voyons que la PME vaut pour tout intervalle. Or, les sous-ensembles connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, d'où en particulier, la PME vaut pour tout ensemble connexe dont le complémentaire est connexe. Par le corollaire 1.9 de [1] et la proposition 2.1 nous pouvons conclure.

QED

REFERENCES

[1] Carnal, E. Markov properties for certain random fields. (A paraître)

[2] Bauer, H. Probability theory and elements of measure theory. (Second english edition). Academic Press, London, 1981.

[3] Dugundji, J. Topology. Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

[4] Carnal, E. Processus markoviens à plusieurs paramètres. Thèse, EPFL, 1979.

[5] Wilson, R. Introduction to graph theory. Oliver and Boyd, Edinburgh, 1972.

[6] Dieudonné,J. Eléments d'analyse, Tome 1. Gauthier Villars, Paris, 1968.

[7] Taylor, A.E. General theory of functions and integration. Blaisdell, New York, 1965.

[8] Halmos, P.R. Lectures on boolean algebras. Princeton, N.J., 1967.

[9] Walsh, J.B. Martingales with a multidimensional parameter and stochastic integrals in the plane. Cours de III cycle, Paris VI, 1976-77.

[10] Walsh, J.B. Propagation of singularities in the sheet. Ann.Prob.10, p. 279-288 (1982).

[11] Levy, P. Le mouvement brownien dépendant de plusieurs paramètres. C.R. Acad.Sc.Paris, 220, p.420-422, 1945.

[12] McKean, H.P. Brownian motion with a several dimensional time. Th.Prob.and Appl. 8,p.335-354. 1963.

[13] Mandrekar,V. Germ field markov property for multiparameter processes. Sem.de Prob.X p.78-85, Strasbourg, 1976.

[14] Molchan,G.M. Characterization of gaussian fields with markovian property. Doklady Akad. Nauk. SSSR,12,563-566, 1971.

[15] Pitt, L.D. A markov property for gaussian processes with multidimensional parameter. Arch.for Rat.Mech. and Anal. 43, 5, 367-391, 1971.

[16] Kallianpur,G. Mandrekar,V. The markov property for generalized gaussian random fields. Ann.Inst.Fourier, Grenoble, 24, 1974.

[17] Nualart, D. Propiedad de Markov para funciones aleatorias gaussianas. Cuad.de Estadistica Univ. Granada, 1979.

[18] Lefort, P. Une propriété markovienne pour les processus à deux indices. Thèse de III cycle, Univ. P.et M.Curie.

Ecole Polytechnique fédérale
Département de mathématiques
1015 Lausanne. (Suisse)