Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Michel Talagrand

Sur les suites de fonctions qui convergent sur les graphes

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 327-329
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__327_0>

SUR LES SUITES DE FONCTIONS QUI CONVERGENT SUR LES GRAPHES

Michel TALAGRAND

Soient K et L deux compacts métrisables, et λ une probabilité de Radon sur L. Soit A l'ensemble des mesures de Radon ≥ 0 dont la projection sur L est majorée par λ. C'est un convexe compact de mesures. Soit ϕ une fonction affine de de première classe sur A. Un résultat remarquable de Mokobodzki montre qu'il existe une fonction borélienne f sur $K \times L$ telle que $\phi(u)=\int f d\mu$ pour $\mu \in A$. Il est donc naturel de poser la question suivante : si f_n est une suite de fonctions boréliennes sur $K \times L$, telle que (f_n) converge dans $L^1(\mu)$ pour chaque $\mu \in A$, existe-t-il une sous-suite de la suite f_n qui converge p.s. pour chaque $\mu \in A$? (Question de C. Dellacherie). Le but de cette note est de montrer qu'il n'en est rien, ce qui rend le résultat de Mokobodzki encore plus remarquable.

Il serait naturellement possible de présenter l'exemple ci-dessous avec $K = L = [0,1]$, et pour λ la mesure de Lebesgue ; mais nous allons utiliser des compacts qui rendront l'écriture plus facile. Soit $K = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. On désigne par A_n l'ensemble des 2^n sous-ensembles de K obtenus en fixant les n premières coordonnées. Sur l'ensemble $L_n = \{0,1\}^{A_n}$, considérons la mesure

$$\lambda_n = \bigotimes_{a \in A_n} ((1 - 2^{-n})\delta_0 + 2^{-n}\delta_1)$$

Soit enfin L le produit des L_n, muni de la probabilité produit. Un élément $y \in L$ s'écrit comme une famille $(y_{n,a})_{n \in \mathbb{N}, a \in A_n}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $y \in L$, définissons la partie $F_n(y)$ de K par

$$F_n(y) = \bigcup \{a \in A_n \ ; \ y_{n,a} = 1\}.$$

Enfin, soit G_n la partie de $K \times L$ donnée par

$$(x,y) \in G_n \iff x \in F_n(y).$$

C'est un ouvert fermé de $K \times L$. On appelle f_n sa fonction caractéristique.

<u>Proposition 1</u> : <u>Aucune sous-suite de la suite</u> (f_n) <u>ne converge</u> μ p.s. <u>pour toute</u> $\mu \in A$.

Soit (f_{n_k}) une telle sous-suite. Le point crucial est le suivant. Si $a \in A_n$ et $m > n$, on a

$$\lambda\{y \in L \; ; \; F_m(y) \cap a \neq \emptyset\} \geq 1 - e^{-2^{-n}} .$$

En effet

$$F_m(y) \cap a \neq \emptyset \iff \exists\, b \subset A_m,\ b \subset a \; ; \; y_{m,b} = 1.$$

On a donc par construction

$$\lambda\{y \in L \; ; \; F_m(y) \cap a \neq \emptyset\} = 1 - (1 - 2^{-m})^{2^{m-n}} \geq 1 - e^{-2^{-n}} .$$

Cette quantité ne dépend pas de m. Par indépendance, on a donc, pour tout n, tout $a \in A_n$, et tout $q \geq n$

$$\lambda\{y \in L \; ; \; \bigcup_{k \geq q} F_{n_k}(y) \cap a \neq \emptyset\} = 1.$$

Ainsi, pour tout q, λ p.s. l'ouvert $\bigcup_{k \geq q} F_{n_k}(y)$ est dense. Le théorème de Baire montre donc que λ p.s., on a $\bigcap_q \bigcup_{k \geq q} F_{n_k}(y) \neq \emptyset$. Il existe donc une fonction mesurable $g : L \to K$ telle que λ p.s. on ait $g(y) \in \bigcap_q \bigcup_{k \geq q} F_{n_k}(y)$. Soit μ l'image de λ par l'application $y \to (g(y),y)$. Alors $\mu \in A$, et le choix de g montre que μ p.s. on a $\limsup f_{n_k} = 1$. Mais la proposition 2 montrera que $\liminf f_{n_k} = 0$ μ p.s. ce qui conclut la preuve.

<u>Proposition 2</u> : <u>Pour tout</u> $\mu \in A$, <u>on a</u> $f_n \to 0$ <u>dans</u> $L^1(\mu)$.

D'après le théorème de Lebesgue, et le théorème de représentation intégrale, on peut se borner au cas où μ est un point extrémal de A. Il existe alors $Z \subset L$ mesurable et une application mesurable $g : Z \to K$ telle que μ soit l'image de $\lambda_{|Z}$ par l'application $y \to (g(y),y)$. Fixons n. Pour $a \in A_n$, soit

$$B_a = \{y \in L \; ; \; g(y) \in a\}.$$

Pour $y \in B_a$, et $m \geq n$, on a

$$g(y) \in F_m(y) \implies a \cap F_m(y) \neq \emptyset .$$

Or pour a fixé les ensembles

$$\{y \in L \ ; \ F_m(y) \cap a \neq \emptyset\}$$

sont indépendants, et leur mesure tend vers $1 - e^{-2^{-n}}$. On a donc

$$\lim_{m\to\infty} \lambda\{y \in B_a \ ; \ F_m(y) \cap a \neq \emptyset\} = (1 - e^{-2^{-n}})\, \lambda(B_a)$$

d'où

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{m\to\infty}}\, \mu(F_m) &\leq \overline{\lim_{m\to\infty}}\, \lambda\{y \in L \ ; \ g(y) \in F_m(y)\} \\ &\leq \sum_{a \in A_n} \overline{\lim}\, \lambda\{y \in B_a : F_m(y) \cap a \neq \emptyset\} = \sum_{a \in A_n} (1 - e^{-2^{-n}})\, \lambda(B_n) \\ &\leq 1 - e^{-2^{-n}} \leq 2^{-n} \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve.

BIBLIOGRAPHIE.

G. MOKOBODZKI : Représentation borélienne des fonctions affines de première classe. (A paraître).