SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

WEI-AN ZHENG
PAUL-ANDRÉ MEYER

Quelques résultats de « mécanique stochastique »

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 223-244
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__223_0>

QUELQUES RESULTATS DE << MECANIQUE STOCHASTIQUE >>

par W.A. Zheng et P.A. Meyer

Comme dans [3], nous essayons ici d'intéresser les probabilistes à la mécanique stochastique de Nelson. Celle-ci est à l'origine une tentative d'interprétation de la mécanique quantique au moyen de la théorie des diffusions, mais on s'est aperçu récemment (voir [6],[7]) qu'elle est aussi capable de modéliser des phénomènes très divers, sans aucun rapport avec la mécanique quantique. Sa caractéristique principale est l'intervention simultanée de deux filtrations, celle du passé et celle du futur, de sorte qu'elle est symétrique par retournement du temps.

Nous adoptons dans cet article le point de vue variationnel (lagrangien) de K. Yasue. Nous passons un certain temps à présenter et à démontrer en détail divers théorèmes de Nelson, Yasue, mais notre but principal est un résultat concernant l'existence et l'unicité des solutions de ce problème variationnel. Nous tenons à dire qu'il s'agit d'un résultat très modeste, exigeant des conditions trop fortes sur le potentiel, et ne s'étendant pas aux variétés. Néanmoins, il est le seul dans son genre pour l'instant(1), et présente donc quelque intérêt.

Cet exposé ne présente qu'une partie des résultats obtenus par W.A. Zheng sur la mécanique stochastique, et nous espérons qu'il aura une suite. La contribution de P.A. Meyer consiste en améliorations mathématiques de détail, et une révision complète de la rédaction.

Nous remercions E. Nelson pour ses encouragements, et pour le manuscrit [2] qu'il nous a aimablement communiqué. Nous remercions aussi J.C. Zambrini pour des manuscrits non publiés, développant les idées de K. Yasue.

I. PRELIMINAIRES SUR LES SEMIMARTINGALES

Cette section ne contient que des résultats élémentaires, mais importants pour la suite. Nous y présentons une classe de processus déjà distinguée par K. Yasue, et démontrons plusieurs résultats techniques,

1. E. Nelson a toutefois mentionné dans son exposé à Berne (Juillet 83) les travaux en cours d'E. Carlen sur la construction de diffusions extrémales - mais il s'agit d'un problème assez différent, semble-t-il.

en particulier la << formule d'intégration par parties de Nelson >> .

DEFINITION DE LA CLASSE $S(\underline{\underline{F}})$

Sur un intervalle borné $[a,b]$ de longueur $b-a=\ell$, nous considérons une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ croissante, continue à droite, telle que $\underline{\underline{F}}_a$ contienne tous les ensembles P-négligeables. Soit $(X_t)=X$ une semimartingale continue[1](réelle ou à valeurs dans $\mathbb{R}^d$) de décomposition canonique $X_t = X_a+M_t+A_t$. Nous dirons que X appartient à $S(\underline{\underline{F}})$ si

1) X_a appartient à L^2,
2) M est une martingale de carré intégrable sur $[a,b]$, avec $M_a=0$,
3) $A_t = \int_a^t H_s ds$, avec $E[\int_a^b |H_s|^2 ds] < \infty$.

Le processus (H_t) est la << dérivée en avant >> de la semimartingale X au sens de Nelson, et nous le désignerons fréquemment par DX . On a formellement $H_t dt = dA_t = E[X_{t+dt}-X_t|\underline{\underline{F}}_t]$. La classe $S(\underline{\underline{F}})$ est donc celle des processus << une fois dérivables en avant >> ; si l'on impose à DX d'appartenir à la classe $S(\underline{\underline{F}})$, on obtient la classe des processus deux fois dérivables en avant, etc.

On a $E[(\int_a^t |H_s|ds)^2] \leqq (t-a)E[\int_a^t |H_s|^2 ds]$ (inégalité de Schwarz)

De plus
$$X_b-X_t = \int_t^b H_s ds + M_b-M_t \text{ , donc } X_t+(M_b-M_t) = X_b-\int_t^b H_s ds .$$

Comme les v.a. X_t et M_b-M_t sont orthogonales, nous avons

$$E[|X_t|^2] + E[|M_b-M_t|^2] \leqq 2E[|X_b|^2] + 2(b-t)E[\int_t^b |H_s|^2 ds] \tag{1.1}$$

(on peut remarquer aussi que le facteur 2 est inutile si $X_b=0$; cela servira plus loin). Introduisons la norme préhilbertienne

$$\|X\|_{S(\underline{\underline{F}})} = E[|X_b|^2 + \int_a^b |H_s|^2 ds]^{1/2} \tag{1.2}$$

Nous voyons qu'elle contrôle à la fois $E[|X_a|^2]$, $E[|M_b|^2]$ (faire $t=a$ dans (1.1)) . Elle est donc équivalente à la norme plus grande

$$E[|X_a|^2+|X_b|^2+ \int_a^b |H_s|^2 ds + |M_b|^2]^{1/2} .$$

et on en déduit sans difficulté le résultat suivant :

PROPOSITION 1.1. $S(\underline{\underline{F}})$ est complet pour la norme (1.2).

REMARQUES. a) Il est clair que la norme $\|X\|_{S(\underline{\underline{F}})}$ contrôle la norme L^2 $E[\int_a^b |X_s|^2 ds]^{1/2}$ (cf. (1.1)). Mais on a mieux : posons $X^* = \sup_t |X_t|$. D'après l'inégalité de Schwarz au début des calculs, $\|X\|_{S(\underline{\underline{F}})}$ contrôle $E[A^{*2}]$, et aussi $E[M^{*2}]$ d'après l'inégalité de Doob. Donc elle contrôle $E[X^{*2}]$.

1. La continuité ne sera pas utilisée pour l'instant.

b) Soit $\bar{\underline{\underline{F}}}$ une filtration plus grosse que $\underline{\underline{F}}$, et soit $\bar{X}$ un processus appartenant à la classe $S(\bar{\underline{\underline{F}}})$. Alors il n'est pas difficile de voir que sa projection optionnelle sur la filtration $\underline{\underline{F}}$

$$X_t = E[\bar{X}_t | \underline{\underline{F}}_t]$$

appartient à $S(\underline{\underline{F}})$ avec une norme plus petite (noter toutefois que si $\bar{X}$ était continu, il se peut que X soit seulement càdlàg.), et que l'on a $DX_t = E[\overline{DX}_t | \underline{\underline{F}}_t]$ pour presque tout t .

En particulier, si X est un élément de $S(\underline{\underline{F}})$, X possède la même propriété vis à vis de sa filtration naturelle, avec une norme plus petite.

c) La classe $S(\underline{\underline{F}})$, ou la classe analogue $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$ plus bas, est insuffisante pour la mécanique stochastique. En effet, celle-ci étudie avant tout des processus « de type brownien » ayant des crochets de la forme

$$d\langle X^i, X^j\rangle_t = c\,\delta^{ij}dt$$

(dans les travaux de Nelson, $c=\hbar/m$, où m est la masse de la particule). D'autre part, si X est une semimartingale appartenant à $S(\underline{\underline{F}})$ et f est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^d$, la partie à variation finie de la semimartingale $f(X_s,s)$ vaut (si X est continue)

$$f_s'(X_s,s)\,dA_s + \tfrac{1}{2}\Sigma_{ij}\, D_{ij}f(X_s,s)d\langle X^i,X^j\rangle_s$$

et même lorsque toutes les dérivées de f sont bornées, on ne peut affirmer que $f(X_.,.)$ appartient à $S(\underline{\underline{F}})$ que si l'on a

$$d\langle X^i,X^j\rangle_s = q_s^{ij}ds \quad \text{avec} \quad E[\int_a^b (q_s^{ij})^2 ds\,] < \infty \ .$$

(d'après l'inégalité de Kunita-Watanabe, il suffit d'ailleurs que cela ait lieu pour i=j , car on a $|q_s^{ij}|^2 \leqq q_s^{ii}q_s^{jj}$ p.s./dP×ds .). Nous désignerons par $H(\underline{\underline{F}})$ la classe des semimartingales $X\in S(\underline{\underline{F}})$ possédant cette propriété, et nous munirons $H(\underline{\underline{F}})$ de la norme hilbertienne

$$E[\ |X_a|^2 + \int_a^b |DX_s|^2 ds + \Sigma_{ij}\int_a^b (q_s^{ij})^2 ds\ ]^{1/2}$$

pour laquelle on vérifie aisément qu'il est complet , la propriété de martingale de $X_t^iX_t^j - \int_a^t q_s^{ij}ds$ passant bien à la limite.

d) La classe $S(\underline{\underline{F}})$ est toujours suffisamment riche : posons $\underline{\underline{F}}_t=\underline{\underline{F}}_a$ pour t<a, $\underline{\underline{F}}_b$ pour t>b, et soit (Z_t) un processus mesurable, borné dans L^2, défini pour tout $t\in\mathbb{R}$. Pour $\varphi\in C_c^\infty$, le processus (càdlàg. en général)

$$X_t = E[\int Z_{t+s}\varphi(s)ds | \underline{\underline{F}}_t\ ] \text{ (projection optionnelle)}$$

appartient à $S(\underline{\underline{F}})$, avec $DX_t = E[-\int Z_{t+s}\varphi'(s)ds | \underline{\underline{F}}_t]$.

SEMIMARTINGALES DANS LES DEUX DIRECTIONS DU TEMPS

Nous nous donnons sur l'intervalle $[a,b]$ une seconde filtration $(\underline{\underline{G}}_t)$, décroissante, telle que la filtration $\tilde{\underline{\underline{F}}}_t=\underline{\underline{G}}_{a+b-t}$ sur $[a,b]$ satisfasse aux conditions habituelles (autrement dit, $\underline{\underline{G}}_t$ est continue à gauche, et $\underline{\underline{G}}_b$ contient tous les ensembles P-négligeables. Nous dirons qu'un processus <u>continu</u> X appartient à $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$ s'il appartient à $\underline{\underline{S}}(F)$, et si son retourné $\tilde{X}_t=X_{a+b-t}$ appartient à $S(\tilde{\underline{\underline{F}}})$. On définirait de même la classe $H(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$ à partir de la classe $H(\underline{\underline{F}})$ de la remarque c) plus haut. Rien n'empêcherait de définir les classes analogues de processus càdlàg., en prenant seulement $\tilde{X}_t=X_{(a+b-t)-}$, mais ce serait généraliser pour généraliser.

Les processus déterministes $f(t)$, continus à variation bornée, appartiennent à ces classes, mais rien ne permet a priori d'affirmer qu'il en existe d'autres.

Il est bon aussi de garder à l'esprit l'exemple suivant : on se donne deux v.a. X_a,X_b quelconques, et l'on pose pour tout t $\underline{\underline{F}}_t=\underline{\underline{G}}_t=\sigma(X_a,X_b)$. Alors ces filtrations déterministes sont les filtrations naturelles en avant et en arrière de la semimartingale

(1.3) $$X_t = \frac{b-t}{b-a}X_a + \frac{t-a}{b-a}X_b$$

qui appartient à $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$. On peut ici remplacer les droites par les géodésiques d'une structure riemannienne sur $\mathbb{R}^d$, etc.

Les problèmes variationnels que nous considérons dans ce travail peuvent être considérés de deux manières : soit dans deux filtrations <u>données</u> , soit <u>en loi</u> (on travaille alors sur l'espace canonique $C([a,b],\mathbb{R}^d)$, avec ses filtrations naturelles en avant et en arrière, convenablement augmentées). L'exemple précédent montre bien comment ces filtrations naturelles peuvent dégénérer en une situation déterministe, lorsqu'on travaille en loi.

Dire que X appartient à $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$ revient à dire que X est continu, adapté aux deux filtrations, et que l'on a

(1.4) $$X_t = X_a + M_t + \int_a^t H_s ds = X_b + \widehat{M}_t - \int_t^b \widehat{H}_s ds$$

avec X_a, X_b, M_b, $\widehat{M}_a$ appartenant tous à L^2, $M_t = E[M_b|\underline{\underline{F}}_t]$ et $M_a=0$, $\widehat{M}_t = E[\widehat{M}_a|\underline{\underline{G}}_t]$ et $\widehat{M}_b=0$, $E[\int_a^b |H_s|^2 ds] < \infty$, $E[\int_a^b |\widehat{H}_s|^2 ds] < \infty$. Le processus $\hat{H}_t$ est une << vitesse en arrière >>, mais calculée dans le bon sens du temps : formellement $\widehat{H}_t dt = E[X_t-X_{t-dt}|\underline{\underline{G}}_t]$. On désignera fréquemment ce processus par $\widehat{D}X$.

Il est clair que $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$ est complet pour la norme hilbertienne

(1.5) $E[|X_a|^2+|X_b|^2 + \int_a^b |DX_s|^2 ds + \int_a^b |\widehat{D}X_s|^2 ds + |\widehat{M}_a|^2+|M_b|^2]^{1/2}$

mais les remarques faites sur la norme (1.2) permettent de voir que cette norme est équivalente à des normes plus petites, par exemple

(1.6) $$E[|X_a|^2+ \int_a^b (|DX_s|^2+|\widehat{D}X_s|^2)ds]^{1/2} .$$

LA FORMULE D'INTEGRATION PAR PARTIES DE NELSON

Soient X et Y deux éléments de $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$ (en fait, il suffit que ces processus soient càdlàg. adaptés aux deux filtrations, avec $X\in S(\underline{\underline{F}})$ et $Y\in S(\underline{\underline{G}})$). Nous allons montrer :

THEOREME I.2. <u>On a</u> $E[X_bY_b-X_aY_a] = E[\int_a^b Y_sDX_s+X_s\widehat{D}Y_s)ds]$.

DEMONSTRATION. Soit (t_i) une subdivision de $[a,b]$. Nous avons

$$X_bY_b - X_aY_a = \Sigma_i\, Y_{t_i}(X_{t_{i+1}}-X_{t_i}) + \Sigma_i\, X_{t_{i+1}}(Y_{t_{i+1}}-Y_{t_i})$$

Lorsque la subdivision devient de plus en plus fine, son pas tendant vers 0, la première somme converge en probabilité vers l'intégrale stochastique $\int_a^b Y_s dX_s$, et de même la seconde somme tend vers $-\int_{-b}^{-a} \tilde{X}_s d\tilde{Y}_s$. Il nous suffit donc de démontrer que $\int_a^b Y_s dX_s$ est intégrable, et que son espérance est $E[\int_a^b Y_s DX_s ds]$; par retournement du temps nous aurons le même résultat pour l'autre intégrale, et en ajoutant nous obtiendrons la formule de Nelson.

Soit $X=X_a+M+A$, $A_t= \int_a^t DX_s ds$, la décomposition canonique de X . Tout revient à montrer que $\int_a^b Y_s dM_s$ est intégrable et d'intégrale 0 . Or le processus $N_t = \int_a^t Y_s dM_s$ est une martingale locale de crochet

$$d[N,N]_s = Y_s d[M,M]_s \quad \text{donc} \quad [N,N]_a^b \leq Y^{*2}[M,M]_a^b$$

Comme $Y^{*2}\in L^1$, $[M,M]_a^b \in L^1$, on a $\sqrt{[N,N]_a^b} \in L^1$, et la martingale locale N appartient à H^1 ; elle est donc uniformément intégrable, et l'on a $E[N_b]=E[N_a]=0$. ▯

Le théorème I.2 s'étend évidemment au cas vectoriel.

APPLICATION. Nous appellerons <u>vitesse moyenne</u>[1] de $X\in S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$ le processus $VX_t = \frac{1}{2}(DX_t+\widehat{D}X_t)$ (le processus $UX_t = \frac{1}{2}(DX_t-\widehat{D}X_t)$ est parfois appelé <u>vitesse osmotique</u> chez Nelson). La formule de Nelson appliquée à $Y=X$ nous donne

(1.7) $$E[X_b^2] - E[X_a^2] = 2E[\int_a^b X_s VX_s ds]$$

et en particulier, si $VX=0$ on voit que $E[X_t^2] = Cte$.

1. Vitesse de courant (current velocity) dans la terminologie de Nelson

Doob a remarqué il y a longtemps qu'un processus (X_t) qui est une martingale dans les deux sens du temps est nécessairement constant. Sous la restriction que $E[X_t^2] < \infty$ pour tout t, l'hypothèse signifie que X appartient à la classe $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$ pour des filtrations convenables, avec $DX=\hat{D}X=0$. La formule de Nelson permet alors de retrouver la remarque de Doob . On a en effet $VX=0$, donc $E[X_t^2]$=Cte, et pour une martingale cette propriété entraîne que $X_t=X_a$ p.s. .

Que peut on dire si l'on a seulement $VX = 0$, sans supposer que X est une martingale ? Cette question présente un certain intérêt, car elle se présente dans le cas des solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger . Nous commençons par présenter une généralisation de la formule de Nelson. Soient X et Y deux éléments de $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$, f et g deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, à dérivées premières et secondes bornées. On a alors

$$(1.8)\quad E[f(X_b)g(Y_b)-f(X_a)g(Y_a)] = E[\int_a^b\{f'(X_s)g(Y_s)DX_s+f(X_s)g'(Y_s)\hat{D}Y_s\}ds + \frac{1}{2}\int_a^b f''(X_s)g(Y_s)d\langle X,X\rangle_s - \frac{1}{2}\int_a^b f(X_s)g''(Y_s)d\langle Y,Y\rangle_s\ ]$$

(Utiliser le même raisonnement que plus haut, et évaluer $\int_a^b g(Y_s)df(X_s)$ par la formule d'Ito[1], et de même pour l'autre intégrale).

Dans cette formule, échangeons le rôle de f(X) et g(Y), et symétrisons. Les crochets disparaissent, et il reste :

$$(1.9)\quad E[f(X_b)g(Y_b)-f(X_a)g(Y_a)] = E[\int_a^b\{f'(X_s)g(Y_s)VX_s+f(X_s)g'(Y_s)VY_s\}ds\ ]$$

En particulier, si $VX=VY=0$, on voit que la loi du couple (X_t,Y_t) ne dépend pas du temps.

UNE << INEGALITÉ DE POINCARÉ >>

La forme à une dimension de l'inégalité de Poincaré est l'inégalité de Wirtinger, qui affirme que si f est dérivable sur [a,b], avec f(a)=f(b)=0, on a

$$\left(\int_a^b f^2dx\right)^{1/2} \leq \frac{\ell}{\pi}\left(\int_a^b f'^2dx\right)^{1/2} \qquad (\ \ell=b-a\ )$$

Nous allons établir une inégalité du même type pour une semimartingale X de la classe $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$. Pour alléger les notations, nous posons

$$(1.10)\qquad J = E[\ \int_a^b|X_s|^2ds]^{1/2}\ ,\ K = E[\int_a^b(VX_s)^2ds]^{1/2}\ ,\ h=\|X_a\|_{L^2}\wedge\|X_b\|_{L^2}$$

THEOREME I.3 . <u>On a</u> $J \leq 2\ell K + \sqrt{\ell}\,h$

1. La continuité de X est utilisée ici.

DEMONSTRATION. Nous partons de la formule de Nelson, dans laquelle nous prenons $X=Y$

$$E[X_t^2-X_a^2] = 2E[\int_a^t X_s VX_s ds]$$

Appliquant à droite l'inégalité de Schwarz, nous avons

$$E[X_t^2] \leqq E[X_a^2] + 2KE[\int_a^t X_s^2 ds]^{1/2}$$

Intégrant en t de a à b , nous obtenons

$$J^2 \leqq \ell E[X_a^2] + 2K\int_a^b dt\ E[\int_a^t X_s^2 ds]^{1/2}$$

dans le dernier terme, nous appliquons l'inégalité de Schwarz qui nous donne le majorant

$$2K\sqrt{\ell}\ E[\int_a^b dt \int_a^t X_s^2 ds]^{1/2} \leqq 2K\ell J$$

et par conséquent $J^2 \leqq \ell E[X_a^2] + 2K\ell J$. Le même raisonnement sur le processus retourné nous permet de remplacer $E[X_a^2]$ par $E[X_b^2]$, et finalement par h^2 . Comme J est finie, l'inégalité

$$J^2 \leqq \ell h^2 + 2K\ell J$$

s'écrit $(J-K\ell)^2 \leqq \ell h^2 + K^2\ell^2$, donc $J-K\ell \leqq h\sqrt{\ell}+K\ell$.

II. EXEMPLES : DIFFUSIONS A CROCHETS BROWNIENS ET LEURS RETOURNEES.

Nous désignons par Ω l'ensemble de toutes les applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^d$, par X_t l'application coordonnée d'indice t sur Ω , par $\underline{\underline{F}}$ (resp. $\underline{\underline{G}}$) la filtration $\underline{\underline{T}}(X_s,\ s \leqq t)$ (resp. $s \geqq t$) rendue continue à droite (à gauche) et complétée par rapport aux lois considérées.

Nous cherchons dans ce paragraphe à munir Ω d'une loi P pour laquelle

- Le processus (X_t) est une semimartingale dans les deux sens du temps
- X admet des crochets browniens , autrement dit $d\langle X^i,X^j\rangle_t = c\delta^{ij}t$, où c est une constante >0 (on verra plus loin pourquoi l'on prend $c\neq 1$)
- Les vitesses en avant et en arrière sont données par

(2.1) $$DX_t = h(X_t,t) \quad , \quad \hat{D}X_t = \hat{h}(X_t,t)$$

h et $\hat{h}$ étant des champs de vecteurs dépendant du temps sur $\mathbb{R}^d$. Ces conditions entraînent en fait que, sous la loi P, X est un processus de Markov - du moins, il en est ainsi chaque fois que l'on sait établir un résultat d'unicité en loi.

Nous désignerons par μ_t la loi de X_t , par ρ_t sa densité (si elle existe) par rapport à la mesure de Lebesgue λ .

Dans certains cas, nous saurons montrer que X appartient à la classe $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$ sous la loi P .

Comme nous avons introduit plus haut les processus $\frac{1}{2}(DX\pm\hat{D}X)$, nous introduirons ici les champs de vecteurs

(2.2) $$v = \frac{1}{2}(h+\hat{h}) \quad , \quad u = \frac{1}{2}(h-\hat{h}) \quad .$$

Nous poserons aussi $R = \frac{1}{2}\log\rho$.

LES FORMULES DE NELSON

En principe, la diffusion est connue dès que l'on connaît h (qui détermine le générateur) et μ_a . Si l'on veut être plus << symétrique >>, on peut considérer que l'on a affaire à trois quantités , $h,\hat{h}$ et ρ , ou u,v,ρ, liées par certaines équations aux dérivées partielles, que nous allons écrire en suivant Nelson (Dynamical theories of brownian motion). Tout est extrêmement simple lorsque $h,\hat{h},\rho$ sont excellents, mais <u>en pratique</u> il arrive qu'ils ne le soient pas : voir les exemples.

a) ρ satisfait à des équations de Fokker-Planck en avant et en arrière

(2.3) $$\dot{\rho} = \frac{c}{2}\Delta\rho - \mathrm{div}(\rho h) = -\frac{c}{2}\Delta\rho - \mathrm{div}(\rho\hat{h})$$

qui s'écrivent plus agréablement

(2.4) $$\dot{\rho} = -\mathrm{div}(\rho v) \quad , \quad \frac{c}{2}\Delta\rho = \mathrm{div}(\rho u)$$

En particulier, si $v=0$, ρ ne dépend pas du temps.

b) $h,\hat{h},\rho$ sont liées par la relation, importante en pratique pour le calcul de $\hat{h}$ connaissant h

(2.5) $$h-\hat{h} = c\,\mathrm{grad}\rho/\rho \quad , \quad \text{ou} \quad u = \mathrm{grad}R \quad .$$

c) Nelson a montré que la connaissance d'une " fonction d'onde" satisfaisant à une équation de Schrödinger permet de construire des triplets u,v,ρ. Soit $p(x,t)$ un << potentiel >> . Soit $\psi=e^{R+iS}$ une solution de l'équation

$$i\hbar\dot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + p\psi$$

On pose alors $c=\hbar/m$, $\rho = |\psi|^2 = e^{2R}$, $u=c\,\mathrm{grad}R$, $v = c\,\mathrm{grad}S$, et on en tire h et $\hat{h}$. Alors la diffusion qui admet $\rho_a dx$ comme loi initiale et h comme vitesse en avant admet $\rho_t dx$ comme loi à l'instant t , $\hat{h}$ comme vitesse en arrière, et satisfait de plus à une << équation de Newton stochastique >>

$$\frac{1}{2}(D\hat{D}+\hat{D}D)X_t = \frac{1}{m}F(X_t,t) \quad \text{avec} \quad F = -\mathrm{grad}\,p$$

Le cas des solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger ($\psi(x,t)=\psi(x)e^{-iEt/\hbar}$) correspond à des processus X satisfaisant à $v=0$, donc $h=-\hat{h}$, $\rho=\psi^2(x)$ indépendant du temps, $h=c\,\mathrm{grad}\log|\psi(x)|$ indépendant du temps . Le processus X est alors un processus de Markov <u>homogène dans le temps</u>, avec loi initiale <u>invariante symétrique</u> .

Insistons sur le caractère très formel de ces calculs : dans les situations usuelles de la mécanique quantique, la densité ρ peut s'annuler, les champs $h,\hat{h}$ deviennent singuliers, et aucune méthode générale de construction de processus (méthode des équations différentielles stochastiques, utilisation du th. de Girsanov...) ne permet d'affirmer a priori que le processus X (c'est à dire la loi P sur Ω) existe effectivement, et encore moins qu'il appartient à une classe $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$, par exemple. On pourra consulter à ce sujet l'article de R. Carmona dans Sém. Prob. XIII. Le manuscrit non publié de Nelson présente une discussion de ce problème sous une forme (variétés riemanniennes compactes) qui n'est pas directement appliquable aux exemples traités.

Les remarques précédentes sur l'équation de Schrödinger suggèrent de calculer, pour chaque exemple considéré, l'accélération stochastique $\frac{1}{2}(D(\hat{D}X)+\hat{D}(DX))$.

QUELQUES EXEMPLES ELEMENTAIRES

1) Le cas où $h=0$ correspond à un processus qui est simplement, en avant, un <u>mouvement brownien</u> de paramètre c . Le cas le plus simple est celui où l'on prend comme mesure initiale la mesure de Lebesgue ($\rho_a=1$; la masse totale est infinie !) et alors $\hat{h}=0$.

Si l'on prend comme loi initiale la masse unité ε_0 , on a

$$\rho_t(x) = (2\pi ct)^{-n/2}e^{-|x|^2/2ct} \quad \text{(a=0 pour simplifier)}$$

et par conséquent $\text{grad}\log\rho_t = -x/ct$, et d'après (2.5)

$$\hat{h}(x,t) = \frac{x}{t-a} \quad , \quad \hat{D}X_t = \frac{X_t}{t-a}$$

donc $E[|\hat{D}X_t|^2]$ vaut $c/t-a$, et X n'appartient pas à la classe $S(\underline{\underline{G}})$. En revanche, nous avons $X_b \in L^p$ pour tout $p<\infty$, la partie martingale en arrière $\hat{M}$ est un mouvement brownien (donc bornée dans tout L^p), et l'on a $E[\int_a^b |\hat{D}X_t|dt] = \text{Cte.} \int_a^b dt/\sqrt{t-a} < \infty$, donc X est bien une semimartingale en arrière sur l'intervalle $[a,b]$ tout entier, appartenant à la classe $\underline{\underline{H}}^p$ pour $1\leq p<2$.

Dans le calcul de l'accélération stochastique, comme $DX=0$, il n'y a que $\frac{1}{2}D\hat{D}X_t = \frac{1}{2}D(X_t/t-a)$. Or $d(X_t/t-a) = dX_t/t-a - X_t dt/(t-a)^2$; le premier terme étant une martingale, il nous reste une accélération stochastique $-X_t/(t-a)^2 = \gamma(X_t,t)$, avec

$$\gamma(x,t) = -x/(t-a)^2$$

Cette formule correspond bien à l'idée que pour « préparer » un mouvement brownien issu de 0, il faut « comprimer » le mouvement brownien libre de manière très brutale, et relâcher peu à peu la compression .

Nous avons traité du même coup le cas d'une loi initiale gaussienne

$$\rho_a(x) = (2\pi c\varepsilon)^{-n/2} e^{-|x|^2/2c\varepsilon}$$

qui revient à l'étude du mouvement brownien sur $[a-\varepsilon,b]$ avec loi initiale $\mu_{a-\varepsilon}=\varepsilon_0$, que l'on restreint ensuite à $[a,b]$ (les filtrations en avant ne sont pas les mêmes, mais comme le processus est markovien, les dérivées en avant ne changent pas). On voit que dans ce cas, X appartient à la classe $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$.

2) Après le cas où $h=0$, le cas le plus simple est celui où $h(x,t)$ ne dépend pas du temps, et est linéaire en x : le processus en avant est alors un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Traitons rapidement le cas où $h(x,t)=-\lambda x$, $\lambda>0$ (cf. Sém. Prob. XVI, p. 96). Soit B_t un mouvement brownien de paramètre $\bar{c} = c/2\lambda$ (i.e. $\sqrt{2\lambda/c}\, B_t$ est un mouvement brownien standard) défini pour $t\geq 0$. Alors le processus

$$X_t = e^{-\lambda t} B_{e^{2\lambda t}-1} \qquad (t\geq 0)$$

est dans sa filtration naturelle en avant un processus d'Ornstein-Uhlenbeck de même loi initiale, avec $d\langle X^i,X^j\rangle_t=c\delta^{ij}dt$, $DX_t =-\lambda X_t$. Le problème du retournement de X et du calcul de $\hat{D}X$ se ramène donc à celui du retournement de B , traité plus haut. En particulier, il est bien connu que la mesure gaussienne de covariance $\bar{c}x\cdot y$ est une mesure invariante symétrique pour ce semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck. Dans ce cas on a $h+\hat{h}=0$, $\hat{D}X_t=\lambda X_t$, et

$$\frac{1}{2}(D\hat{D}+\hat{D}D)X_t = -\lambda^2 X_t$$

Cela exprime la relation bien connue entre le processus d'Ornstein-Uhlenbeck et l'oscillateur harmonique quantique. Il n'y a ici aucune difficulté pour l'appartenance à la classe $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$.

3) Rappelons très rapidement la théorie du <u>pont brownien</u> (Jeulin-Yor, **Sém.** Prob. XIII, p. 335-340). Laissons fixes a,b, et désignons par $\Pi_{\xi\eta}$ la loi du pont brownien sur $[a,b]$ entre les valeurs ξ et η (et toujours avec le paramètre c dans les crochets). Il existe un mouvement brownien standard (B_t) de la filtration en avant $(\underline{\underline{F}}_t)$, tel que l'on ait

$$X_t = \xi + \sqrt{c}\, B_t + \int_a^t \frac{\eta - X_s}{b-s}\, ds$$

On peut en tirer $DX_t=\eta-X_t/b-t$, $h(x,t) = \eta-x/b-t$. La relation précédente peut être considérée comme une équation différentielle stochastique, et résolue en X sous la forme

$$X_t = \frac{b-t}{b-a}\xi + \frac{t-a}{b-a}\eta + \sqrt{c}\,(b-t)\int_a^t \frac{dB_s}{b-s}$$

On voit sur cette formule le caractère gaussien du pont brownien. On voit aussi que le processus $X_t - \frac{b-t}{b-a}\xi - \frac{t-a}{b-a}\eta$ obéit à la loi Π_{00} . Comme celle-ci est réversible (cela se voit sur la covariance), on voit que la loi retournée de $\Pi_{\xi\eta}$ est $\Pi_{\eta\xi}$. Cela permet de calculer la vitesse en arrière

$$h(x,t) = \frac{\eta-x}{b-t} \quad , \quad \hat{h}(x,t) = \frac{x-\xi}{t-a}$$

puis l'accélération stochastique, qui se prête aux mêmes commentaires que dans le cas brownien

$$\gamma(x,t) = \frac{\eta-x}{(b-t)^2} + \frac{x-\xi}{(t-a)^2}$$

Revenons à l'étude du pont brownien << en avant >> : le caractère gaussien du processus permet d'évaluer des intégrales du type $E[|DX_t|^p]$ et de montrer que le pont brownien, dans sa filtration en avant $(\underline{\underline{F}}_t)$, est une semimartingale, et appartient à la classe $\underline{\underline{H}}^p$ pour $1<p<2$, mais <u>n'appartient pas à la classe</u> $S(\underline{\underline{F}})$.

COMMENTAIRE. Le pont brownien illustre bien le rôle des filtrations . Désignons par $\overline{\underline{\underline{F}}}_t$ la tribu sur Ω engendrée par $\underline{\underline{F}}_t$ et X_b , par $\overline{\underline{\underline{G}}}_t$ la tribu engendrée de même par $\underline{\underline{G}}_t$ et X_a (nous négligeons de régulariser ces filtrations). Sous la loi $\Pi_{\xi\eta}$, comme X_a et X_b sont des v.a. dégénérées, il n'y a pas lieu de distinguer $\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}}$ de $\overline{\underline{\underline{F}}},\overline{\underline{\underline{G}}}$. Donnons nous maintenant une loi $\mu(d\xi,d\eta)$ sur $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$, et posons

$$P = \int \mu(d\xi,d\eta)\Pi_{\xi,\eta}$$

Sous la loi P , le processus X est une semimartingale par rapport aux filtrations $\overline{\underline{\underline{F}}},\overline{\underline{\underline{G}}}$, admettant des crochets de type brownien, et la loi du couple (X_a,X_b) est égale à μ . On peut alors se restreindre à $\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}}$, filtrations naturelles de X en avant et en arrière, en préservant les propriétés de semimartingale. Toutefois, la semimartingale X n'appartient <u>jamais</u> à $S(\overline{\underline{\underline{F}}},\overline{\underline{\underline{G}}})$, et on ne peut rien dire alors quant à l'appartenance de X à $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$.

4) Soit (B_t) un mouvement brownien (nous traînons toujours le paramètre c, en vue de la correspondance avec la physique), à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ($n>1$) et soit $X_t = |B_t|$ sa partie radiale. Il est bien connu que ce processus ne passe jamais par l'origine pour $t>0$ (même si $B_0=0$) et une application classique de la formule d'Ito donne

$$X_t = X_0 + \beta_t + c\frac{n-1}{2}\int_0^t \frac{ds}{X_s} \qquad (t\geqq 0)$$

où (β_t) est un mouvement brownien réel de paramètre c , issu de 0 . Si l'on considère maintenant cette équation différentielle stochastique pour elle même, avec $X_0=x\geqq 0$ en recherchant une solution $X_\cdot > 0$, (avec $n\geqslant 2$ non nécessairement entier), on peut montrer qu'elle admet une solution et une seule, que X et β ont la même filtration naturelle. Cette diffusion est appelée <u>processus de Bessel</u> sur $\mathbb{R}_+$, de <u>dimension</u> n (d'<u>indice</u> $(n-2)/2$). La théorie s'étend avec un peu plus de difficulté aux "dimensions" $n\in]1,2[$, car il y a alors des retours en 0. Les auditeurs de ce séminaire ont entendu expliquer tout cela, et bien plus, par Yor. La vitesse en avant est ici $DX_t = c\frac{n-1}{2}\frac{1}{X_t}$, $h(x)=\frac{c(n-1)}{2x}$.

Nous pourrions prendre la << partie radiale >> des calculs de retournements browniens faits plus haut en 1), mais nous nous bornerons ici au cas de la mesure invariante symétrique. Pour n entier, celle ci correspond à la partie radiale de la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$, soit $\rho(x) = x^{n-1}dx$, et nous admettrons que cela vaut aussi pour n non entier. Nous avons alors $h = -\hat{h} = \frac{c}{2}\text{grad} \log x^{n-1} = \frac{c(n-1)}{2x}$ (déjà vu) et nous pouvons calculer l'accélération stochastique, qui est dans ce cas égale à $-c\frac{n-1}{2}D(\frac{1}{X_t})$. Or on a $d\langle X,X\rangle_t=cdt$, donc

$$D(\frac{1}{X_t}) = -\frac{DX_t}{X_t^2} + \frac{c}{X_t^3} = \frac{-c(n-3)}{X_t^3}$$

d'où un champ d'accélérations stochastiques en $\frac{c^2}{2}(n-1)(n-3)\frac{1}{x^3}$. Le cas $n=3$ est intéressant, parce qu'il fournit un exemple de processus << libre >> (accélération stochastique nulle), avec des crochets browniens, et non trivial. On obtient un processus libre chaque fois que $\rho=\psi^2, h=\text{grad}\psi/\psi$, ψ étant une solution de $\Delta\psi=k\psi$. Ici $\psi(x)=x$ et $k=0$.

5) Nous revenons maintenant à l'<u>oscillateur harmonique</u> étudié en 2) N'importe quel livre de mécanique quantique fournit une liste de fonctions d'onde $\psi_n(x,t)=\psi_n(x)e^{-ia_nt}$ avec $a_n=\text{Cte}.(n+1/2)$, et

$$\psi_n(x) = c_nH_n(\sqrt{k}x)e^{-kx^2/2}$$

où c_n est une constante, H_n est un polynôme d'Hermite (1, x, $2x^2-1$, etc. ; ce ne sont pas les polynômes usuels parmi les probabilistes), et k se lit $\frac{m\omega}{\hbar}$ dans les traités de physique , et λ/c ici (notre λ est le ω des physiciens, et $c=\hbar/m$). Dans l'état fondamental $n=0$, nous avons $\rho_n(x)=\text{Cte}.e^{-x^2\lambda/c}$, correspondant à une loi gaussienne de variance $c/2\lambda$; c'est le cas que nous avons traité sur $\mathbb{R}^n$ en 2). Nous voudrions modestement étudier, par des moyens élémentaires, le premier cas non trivial, celui de ψ_1. On a alors

$$\rho(x)= \text{Cte}.\ x^2e^{-x^2\lambda/c}$$

donc $$h(x) = \frac{c}{x} - \lambda x \quad (h=-\hat{h} \text{ , et } (2.5))$$

La construction du processus X_t passe donc par la résolution de l'équation différentielle stochastique

$$X_t = X_0 + B_t + \int_0^t (\frac{c}{X_s} -\lambda X_s)ds$$

où B est un mouvement brownien de paramètre c. L'idée générale de ce genre de questions est que les << surfaces nodales >> où ρ s'annule sont des barrières infranchissables pour les trajectoires. On va donc tenter ici de faire la construction sur $\mathbb{R}_+$, avec $X_0=x\geq 0$. Comme la singularité est du même ordre que celle du Bessel de dimension 3, il est naturel de chercher une transformation de Girsanov sur la loi P^x du Bessel de dimension 3 issu de x , pour laquelle on a

$$X_t = x + B_t + \int_0^t \frac{c}{X_s} ds$$

au moyen de la martingale exponentielle

$$M_t = \mathcal{E}(L)_t = \exp(\int_0^t a(X_s)dB_s - \frac{c}{2}\int_0^t a^2(X_s)ds) \quad , \; L_t=\int_0^t a(X_s)dB_s$$

D'après Girsanov, si M_t est une vraie martingale, sous la nouvelle loi nous aurons $B_t = B'_t + \langle B,L\rangle$, où B' est un nouveau mouvement brownien, et il s'agit d'avoir $d\langle B,L\rangle_t = -\lambda X_t$, soit $a(X_t)= -\lambda X_t/c$.

Reste donc à voir si M_t est une vraie martingale, et pour cela nous utiliserons un théorème de Kazamaki : si pour b fixé on a $E[\langle L,L\rangle_b-\langle L,L\rangle_t|\underline{\underline{F}}_t] \leq C_b$ (propriété BMO sur $[0,b]$), alors M est une vraie martingale sur $[0,b]$, et même est bornée dans un L^p ($p>1$). Interprétons le processus de Bessel comme la partie radiale d'un mouvement brownien à trois dimensions (Z_t), de paramètre c . Alors

$$B_t = \int_0^t \frac{Z_s.dZ_s}{|Z_s|} \quad , \quad L_t = -\frac{\lambda}{c}\int_0^t Z_s.dZ_s$$

$$< L,L >_t = \frac{\lambda^2}{c}\int_0^t |Z_s|^2 ds$$

La fonction $|z|^2$ ayant un 1-potentiel newtonien borné, il est immédiat que la condition BMO est satisfaite pour L, d'où l'existence de la diffusion cherchée.

Mais il y a beaucoup plus simple : si l'on fait la transformation de Girsanov avant de prendre la partie radiale, Z devient un processus d'Ornstein-Uhlenbeck à trois dimensions, dont X est la partie radiale. On vérifie du même coup, de manière rigoureuse, que X admet la mesure de densité ρ comme loi invariante symétrique : cela résulte du fait analogue pour Z . Bien sûr, les conditions algébriques pour qu'il en soit ainsi sont satisfaites par construction, mais ici les coef--ficients sont singuliers, et il faudrait regarder les choses de plus près, si l'on ne disposait pas de la remarque précédente.

Un calcul élémentaire montre que $\int |h^2(x)|\rho(x)dx < \infty$. Donc X appartient à la classe $S(\underline{\underline{F}})$ sur tout intervalle fini, et à $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$ par symétrie.

On remarquera que nous ne savons pas traiter de manière élémentaire le cas de ψ_n , $n>1$.

III. FORME VARIATIONNELLE DE LA MECANIQUE STOCHASTIQUE

L'ACTION DE K. YASUE

En mécanique classique, les trajectoires d'un point matériel de masse m se déplaçant dans $\mathbb{R}^n$ sous l'action d'un potentiel $p(x,t)$ sont, pour tout couple (a,b) d'instants avec $a<b$, les extrémales de l'action classique

$$(3.1) \qquad \int_a^b \left(\tfrac{1}{2}m|\dot{x}(s)|^2 - p(x(s),s)\right) ds$$

parmi toutes les courbes $y(t)$ différentiables, telles que $y(a)=x(a)$, $y(b)=x(b)$.

L'idée de K. Yasue, pour mettre sous forme variationnelle la mécanique stochastique de Nelson, a consisté à introduire une action portant sur des processus $(X_t)_{a\leqq t\leqq b}$, de la forme

$$(3.2) \qquad J_a^b = E\left[\int_a^b \left(\tfrac{m}{4}(|DX_s|^2+|\hat{D}X_s|^2) - p(X_s,s)\right) ds \right]$$

et à rechercher les extrémales parmi tous les processus (Y_t), qui sont des semimartingales dans les deux sens du temps, et satisfont à $X_a=Y_a$, $X_b=Y_b$. Le choix de cette action est dicté par des considérations de symétrie quant au retournement du temps, mais ce n'est pas le seul choix naturel (nous en reparlerons). Yasue établit des équations d'Euler pour ce problème variationnel, qui en montrent la relation étroite avec l'<<équation de Newton stochastique >> de Nelson, que nous avons rencontrée plus haut. D'autres principes variationnels conduisant aux mêmes extrémales ont été introduits par Zambrini.

Signalons tout de suite certaines difficultés de ce problème.

a) L'action dépend, non seulement du processus X , mais des <u>filtrations</u> utilisées : par exemple, se restreindre aux filtrations naturelles de X peut diminuer l'action, si l'on ne sait pas a priori que X est un processus de Markov. Ainsi, en mécanique classique, une extrémale sur $[a,b]$ est extrémale sur tout intervalle plus petit $[a',b']$. Ici, les restrictions à $[a',b']$ des filtrations naturelles de X sur $[a,b]$ sont plus riches que les filtrations naturelles de X sur $[a',b']$.

b) Les solutions physiquement acceptables devraient être assujetties à la condition de << crochets browniens >> que nous avons rencontrée au paragraphe précédent. Or les crochets n'interviennent pas dans la discussion, et l'on ne peut se restreindre aux semimartingales à crochets browniens, pour appliquer notre méthode. La résolution du problème variationnel est donc loin de traiter les problèmes vraiment intéressants.

c) En mécanique classique, il n'y a aucune difficulté à établir l'existence de suffisamment de trajectoires « variées » , prenant les mêmes valeurs que X aux extrémités a,b . Ici, cela créera un problème pour établir les « équations d'Euler » des extrémales.

d) En mécanique classique, il est facile de <u>localiser</u> le problème : l'extrémale sur un compact assez gros se trouve être l'extrémale cherchée . C'est impossible ici, et la double filtration interdit même l'emploi des temps d'arrêt. De plus, notre méthode vaut seulement sur $\mathbb{R}^n$, non sur les variétés.

Nous commençons par des préliminaires (sans doute bien connus) .

DEFINITION DES FONCTIONS FORTEMENT CONVEXES

Nous commençons par la remarque suivante : soit sur [0,1] la fonction

$$\varphi_\lambda(s) = s(1-\lambda)I_{\{s\leqq\lambda\}}+\lambda(1-s)I_{\{s\geqq\lambda\}} \qquad (\lambda\in[0,1])$$

qui est linéaire sur $[0,\lambda]$ et $[1-\lambda,1]$ vaut 0 pour s=0,1 et $\lambda(1-\lambda)$ pour $s=\lambda$. C'est une fonction positive d'intégrale $\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)$. On a pour toute fonction f de classe C^2 sur un intervalle [a,b]

$$(1-\lambda)f(a)+\lambda f(b) - f((1-\lambda)a+\lambda b) = (b-a)^2\int_0^1 f''((1-s)a+sb)\varphi_\lambda(s)ds$$

comme on peut le voir aisément en se ramenant à [a,b]=[0,1] et en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral. Il en résulte facilement que si f est une fonction convexe de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on a $f''\geq k$ si et seulement si l'on a pour tout couple (a,b) de points de $\mathbb{R}$ et tout $\lambda\in[0,1]$

$$(1-\lambda)f(a)+\lambda f(b)-f((1-\lambda)a+\lambda b) \geqq \tfrac{1}{2}k\lambda(\lambda-1)(b-a)^2$$

Cela nous amène à poser la définition suivante :

DEFINITION. Soit $(U,|.|)$ un espace normé, et soit K une partie convexe de U . Nous dirons qu'une fonction convexe f définie dans K est <u>fortement convexe</u> s'il existe une constante C>0 telle que l'on ait pour tout couple (a,b) d'éléments de K et tout $\lambda\in[0,1]$

$$(3.3) \qquad (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b) - f((1-\lambda)a+\lambda b) \geqq C\lambda(1-\lambda)|b-a|^2 .$$

THEOREME 3.1. Soit f une fonction fortement convexe s.c.i. définie dans un ensemble convexe complet K. Si f est bornée inférieurement, f atteint son minimum sur K en un point unique.

DEMONSTRATION. Nous n'insistons pas sur l'unicité, qui est évidente, une fonction fortement convexe n'étant affine sur aucun segment de droite non réduit à un point. Pour établir l'existence, nous montrerons que si (x_n) est une suite de points de K telle que $f(x_n)$ tende vers $\inf_{x\in K} f(x) = \mu$ ($\mu>-\infty$ par hypothèse), alors (x_n) est une suite de Cauchy : si $x_\infty = \lim x_n$ on aura alors $f(x)=\mu$ du fait que f est s.c.i..

Pour cela nous remarquons que si $n\to\infty$, $m\to\infty$ on a par convexité $\limsup f(\frac{1}{2}(x_n+x_m)) \leq \mu$, donc $\lim f(\frac{1}{2}(x_n+x_m))=\mu$. La convexité forte nous donne alors

$$C\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})|x_n-x_m|^2 \leq \frac{1}{2}f(x_n)+\frac{1}{2}f(x_m) - f(\frac{1}{2}(x_n+x_m)) \text{ qui tend vers } 0. \;\square$$

REMARQUES

a) Supposons que K admette un point intérieur (en fait un point intérieur <u>relatif</u> suffit , i.e. un point intérieur dans la variété affine $[K]$ fermée engendrée par K) et que f soit bornée inférieurement au voisinage de ce point. Alors f est bornée inférieurement dans K .

En effet, quitte à faire un changement d'origine et une homothétie, on peut supposer que K contient la boule unité fermée de centre 0, et que f y est minorée par une constante η. Dans l'inégalité (3.3) prenons $b=0$, $\lambda=1-1/k$ $(k>1)$ et $a=kx$ avec $|x|\leq 1$

$$\frac{1}{k}f(kx) \geq -(1-1/k)f(0)+f(x)+C(k-1)|x|^2 \geq \eta-(1-1/k)f(0)+C(k-1)|x|^2$$

Prenons d'abord $|x|=1$, k_o assez grand pour que $\eta-(1-1/k)f(0)+C(k-1) \geq 0$ pour $k\geq k_o$; cette inégalité montre alors que $f(y)\geq 0$ pour $y\in K$, $|y|\geq k_o$. Prenant ensuite $|x|\leq 1$, $k=k_o$, on voit que $f(y)$ est bornée inférieurement pour $|y|\leq k_o$.

b) En pratique, U sera un espace de Hilbert, donc un espace réflexif, et les parties fermées bornées seront <u>faiblement compactes</u>. D'autre part (th. de Hahn-Banach) toute fonction convexe s.c.i. est <u>faiblement s.c.i.</u>. Donc on sait d'avance que f est bornée inférieurement et atteint son minimum sur toute partie fermée bornée de K . La convexité forte intervient alors seulement pour montrer que les ensembles $\{f\leq a\}$ sont bornés, et pour l'unicité.

c) Soit f une fonction convexe. D'après les propriétés bien connues des fonctions convexes sur $\mathbb{R}$, f atteint son minimum au point x de K si et seulement si, pour tout $y\in K$, on a

$$\frac{d}{dt}f(x+ty)|_{t=0} \geq 0$$

condition qui est satisfaite en particulier si f est différentiable au point x, avec différentielle nulle (point <u>stationnaire</u>). On voit en particulier que si f est fortement convexe, et si l'on a trouvé un point x stationnaire pour f, alors

- f atteint son minimum au point x,
- x est le seul point stationnaire pour f .

Ici encore, on peut se restreindre à la variété affine $[K]$.

Nous allons appliquer ces résultats à l'action de Yasue .

CONVEXITÉ FORTE DE L'ACTION

Pour obtenir la convexité forte de l'action, nous imposerons que la dérivée seconde de $p(.,t)$ suivant toute droite affine soit uniformément bornée supérieurement

(3.4) $$\frac{d^2}{d\lambda^2}p(x+\lambda e,t) \leqq k \quad \text{pour } x\in\mathbb{E}^n \text{ , e vecteur unitaire}$$

Sous des conditions très faibles (du type $\sup_{a\leq t\leq b}|p(0,t)|+|\operatorname{grad} p(0,t)|<\infty$) on a alors la condition suivante, que nous imposerons aussi, et qui garantira que le minimum de l'action n'est pas $-\infty$

(3.5) $$p(x,t) \leqq C(1+|x|^2)$$

Nous avons alors le théorème suivant :

THEOREME 3.2. Soit ξ un élément de $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$ tel que $J_a^b(\xi)<\infty$, et soit K_ξ la sous-variété affine de $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$ formée des semimartingales X telles que $X_a=\xi_a$, $X_b=\xi_b$. Alors la fonctionnelle J_a^b est fortement convexe sur K_ξ dès que $\ell=b-a$ est assez petit , précisément dès que l'on a

(3.6) $$\ell^2< m/k \ .$$

Par conséquent, il existe un unique élément de K_ξ qui minimise J_a^b (et les conditions imposées entraînent que le minimum est fini).

DEMONSTRATION. Soient X,Y deux éléments de K_ξ, Z leur différence, qui s'annule pour $t=a,b$ et appartient à $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$. Posons

$$J_1(X) = E[\ \tfrac{m}{4}\int_a^b(|DX_s|^2+|\hat{D}X_s|^2)\,ds\ ]\ ,\quad J_2(X) = E[\int_a^b p(X_s,s)ds\ ]$$

Comme J_1 est une forme quadratique, nous avons

$$(1-\lambda)J_1(X)+\lambda J_1(Y)-J_1((1-\lambda)X+\lambda Y) = \lambda(1-\lambda)J_1(Z) = \tfrac{m}{4}\lambda(1-\lambda)\|Z\|^2$$

Nous avons d'autre part, d'après (3.6)

$$(1-\lambda)p(X_s,s)+\lambda p(Y_s,s)-p((1-\lambda)X_s+\lambda Y_s,s) \leqq k\lambda(1-\lambda)|Z_s|^2$$

D'après la formule (1.1) au début de ce travail, et la remarque qui la suit, nous avons en intégrant en t

$$\int_a^b E[|Z_t|^2]dt \leqq \tfrac{1}{2}\ell^2E[\ \int_a^b|DZ_s|^2ds\ ]$$

Comme Z_a est nul aussi, on écrit l'inégalité analogue avec $\hat{D}Z_s$, et on ajoute. Il reste

$$\int_a^b E[|Z_t|^2]dt \leqq \tfrac{1}{4}\ell^2\|Z\|^2$$

d'où en revenant à J_2

$$(1-\lambda)J_2(X)+\lambda J_2(Y)-J_2((1-\lambda)X+\lambda Y)) \leqq \tfrac{k}{4}\ell^2\lambda(1-\lambda)\|Z\|^2$$

et finalement pour l'action J elle même

$$(1-\lambda)J(X)+\lambda J(Y)-J((1-\lambda)X+\lambda Y) \geqq \tfrac{1}{4}(m-k\ell^2)\|Z\|^2$$

qui donne aussitôt le résultat désiré.

REMARQUES. a) Tout ce qu'on a dit s'applique à l'action " en avant" $E[\frac{m}{2}\int_a^b |DX_s|^2 ds - \int_a^b p(X_s,s)ds]$, mais ne semble pas présenter d'intérêt. De même, l'action J_a^b est encore fortement convexe pour ℓ petit sur la variété affine formée des X tels que $X_a=\xi_a$ (ou $X_b=\xi_b$) seulement, mais le sens de cette propriété n'est pas clair, même en mécanique classique.

b) Soient U_a, U_b deux v.a. mesurables respectivement par rapport à $\underline{\underline{F}}_a \cap \underline{\underline{G}}_b$, $\underline{\underline{F}}_b \cap \underline{\underline{G}}_a$. Nous dirons que ces deux v.a. sont compatibles avec $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$ s'il existe $\xi \in S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$ tel que $U_a=\xi_a$, $U_b=\xi_b$. D'après le th.3.2. appliqué avec p=0 (et se réduisant alors au théorème de projection dans l'espace de Hilbert $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$) il existe alors une unique semi-martingale " libre" ξ possédant cette propriété.

c) Désignons par X l'extrémale construite dans le théorème 3.2, par $\underline{\underline{F}}'$, $\underline{\underline{G}}'$ les filtrations naturelles de X en avant et en arrière. Si l'on se restreint à $\underline{\underline{F}}',\underline{\underline{G}}'$, l'action ne peut que décroître. Même si elle ne change pas (cas des processus de Markov), il n'y a aucune raison pour que X soit extrémale dans $S(\underline{\underline{F}}',\underline{\underline{G}}')$.

d) Remarquons que l'espace des semimartingales $X \in S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$ dont les crochets $d\langle X^i,X^j\rangle_t$ sont absolument continus est fermé dans $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$: cela se ramène au fait que l'espace des martingales de carré intégrable à crochets absolument continus est fermé. Désignant cet espace par $S_c(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$, on peut remplacer partout $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$ par $S_c(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$ dans les raisonnements qui précèdent.

L'EQUATION DE NEWTON STOCHASTIQUE

Nous allons chercher à écrire maintenant l'équation d'Euler des extrémales. Nous commençons par le lemme suivant, qui est une conséquence simple de la formule d'intégration par parties (th. I.2).

LEMME 3.3. *Soient* X,Y *appartenant à* $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$. *On désigne par* $VX=\frac{1}{2}(D+\hat{D})X$ *la vitesse moyenne de* X. *On suppose que* DX, $\hat{D}X$ *appartiennent à* $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$[1] *et l'on pose* $\gamma X = \frac{1}{2}(D\hat{D}+\hat{D}D)X$. *On a alors*

$$(3.7)\qquad E[\int_a^b \gamma X_s\cdot Y_s\, ds] = Y\cdot VX|_a^b - \tfrac{1}{2}E[\int_a^b (DX_s\cdot DY_s + \hat{D}X_s\cdot\hat{D}Y_s)ds\,]$$

En particulier, si Y appartient à l'espace $S^0(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$ des éléments de $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$ nuls au bord, le second membre vaut $-\frac{1}{2}\langle X|Y\rangle_{S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})}$.

DEMONSTRATION. Nous appliquons deux fois la formule de Nelson

$$E[\int_a^b \hat{D}DX_s\cdot Y_s\, ds\,] = Y\cdot DX|_a^b - E[\int_a^b DX_s\cdot DY_s\, ds\,]$$

1. Cette hypothèse est un peu trop forte : voir les hypothèses de la formule d'intégration par parties au paragraphe I.

$$E[\int_a^b D\hat{D}X_s\cdot Y_s\, ds] = Y\hat{D}X|_a^b - E[\int_a^b \hat{D}X_s\cdot\hat{D}Y_s\, ds]$$

et il suffit de faire la demi-somme de ces égalités.

Nous précisons ensuite nos hypothèses sur le potentiel $p(x,t)$ en exigeant que pour $t\in[a,b]$ on ait une inégalité de la forme

(3.8) $$|p(x+\lambda y,t)-p(x,t)-\lambda \mathrm{grad}_x p(x,t)\cdot y| \leq C\lambda^2(1+|x|^2+|y|^2)$$

pour $0<\lambda\leq 1$. Dans ces conditions, il est immédiat de vérifier que

LEMME 3.4. <u>Soient</u> $X\in S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$, $Y\in S^0(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$. <u>L'action</u> J_a^b <u>possède la propriété</u>

(3.9) $$\frac{d}{d\lambda}J_a^b(X+\lambda Y)|_{\lambda=0} = \frac{m}{2}\langle X|Y\rangle_{S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})} - E[\int_a^b \mathrm{grad}p(X_s,s)\cdot Y_s\, ds]$$

DEMONSTRATION. L'expression $\frac{m}{4}E[\int_a^b(|DX_s|^2+|\hat{D}X_s|^2)ds] = J_1(X)$ étant une forme quadratique, on a

$$\frac{d}{d\lambda}J_1(X+\lambda Y)|_{\lambda=0} = 2J_1(X,Y),$$ la forme bilinéaire polarisée, qui vaut ici $\frac{m}{2}\langle X|Y\rangle_{S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})}$, parce que Y est nulle aux extrémités. Le second terme est immédiat à traiter grâce à (3.8).

Nous avons alors de manière immédiate le théorème suivant.

THEOREME 3.5. <u>Supposons que</u> p <u>satisfasse à</u> (3.4), (3.5), (3.8). <u>Alors pour</u> $b-a=\ell$ <u>assez petit</u>, <u>l'unique extrémale de l'action est caractérisée par la propriété</u>

(3.10) $$\frac{m}{2}\langle X|Y\rangle_{S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})} = E[\int_a^b \mathrm{grad}p(X_s,s)\cdot Y_s\, ds]$$ <u>pour</u> $Y\in S^0(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$.

COROLLAIRE 3.6. <u>Sous les mêmes hypothèses sur</u> p <u>et</u> ℓ , <u>si l'on a pu déterminer un processus</u> $X\in S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$, <u>tel que</u> DX, $\hat{D}X$ <u>appartiennent à</u> $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$ <u>et que soit satisfaite la</u> « <u>loi de Newton</u> »

(3.11) $$m\gamma X_s = -\mathrm{grad}_x\, p(X_s,s)$$

<u>alors</u> X <u>est l'unique extrémale de l'action</u>.

Le problème inverse est plus délicat : montrer que l'extrémale de l'action, si elle est suffisamment régulière pour admettre une accélération γX , satisfait à l'équation de Newton (3.11). Nous pouvons affirmer que

(3.12) $$E[\int_a^b m\gamma(X_s)\cdot Y_s\, ds] = E[\int_a^b -\mathrm{grad}\, p(X_s,s)\cdot Y_s\, ds]$$

pour $Y\in S^0(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$. Soit $Y\in S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$; appliquant (3.12) à $f(t)Y_t$, $f\in C^\infty$ nulle au bord, que l'on fait tendre vers 1, on voit que (3.12) a lieu pour Y aussi. Posons alors

(3.13) $$\Phi_t = -\mathrm{grad}p(X_t,t)\ ,\quad Z_t = m\gamma X_t - \Phi_t$$

Ce processus est orthogonal à $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$ dans $L^2([a,b],\mathbb{R}^d, dP\times dt)$, et on peut en déduire que Z=0 si l'on sait que Z appartient à $\bar{S}(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$, l'adhérence de $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$ dans L^2. Par exemple, si X est dans $H(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$, $\varphi(X_t,t)$ appartient à $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$ pour φ de classe C_b^2, et il n'y a pas de difficultés à vérifier que Φ_t appartient à $\bar{S}(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$. Si X est, de plus, markovien, l'accélération γX_t sera elle aussi de la forme $h(X_t,t)$, et l'on pourra en principe lui appliquer le même raisonnement. Nous ne voyons pas ce qu'on peut dire de plus en général...

Il est peut être plus intéressant de noter la propriété suivante, qui appartient à l'extrémale X (sous les restrictions du th. 3.5 pour le potentiel, mais sans hypothèse de régularité sur X elle même). Cette propriété correspond à (3.7). On pose $\Phi_t=-\mathrm{grad}\,p(X_t,t)$.

LEMME 3.7. <u>Soit</u> X <u>l'extrémale construite dans le th. 3.5, et soit</u> Y $Y\in S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$. <u>Si la fonction</u> $E[Y_tV(X)_t]$ <u>est continue en</u> a <u>et</u> b, <u>on a</u>

$$(3.14)\qquad \frac{1}{m}E[\int_a^b \Phi_s\cdot Y_s ds] = E[Y\cdot V(X)|_a^b] - \frac{1}{2}E[\int_a^b (DX_s\cdot DY_s+\hat{D}X_s\cdot\hat{D}Y_s)ds\ ]$$

DEMONSTRATION. Pour $Y\in S^0(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$, le résultat est connu : c'est (3.10). Pour $Y\in S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$, nous appliquons cela à $Y_tf(t)$, où $f(t)=1$ sur $[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}]$ nulle en a et b, comprise entre 0 et 1 et de classe C^2 . Tout revient à montrer que, pour $n\to\infty$

$$-\frac{1}{2}\lim E[\int_a^b (DX_s+\hat{D}X_s)Y_sf'(s)ds\ ] = E[Y\cdot V(X)|_a^b]$$

Le côté gauche vaut $\int_a^b -E[Y_s\cdot VX_s]f'(s)ds$, et il tend vers $E[Y\cdot V(X)]_a^b$. Il n'est pas nécessaire d'ailleurs que la fonction soit continue en a et b : il suffit que ce soient des points de Lebesgue, i.e. que $\int_a^{a+1/n}|E[Y_aV(X)_a]-E[Y_sV(X_s)]|ds$ tende vers 0 pour $n\to\infty$, et de même en b .

Remarquons maintenant que l'extrémale entre a et b est évidemment extrémale entre u et v pour $a\le u\le v\le b$, entre ses valeurs u et v , et que presque tout point de [a,b] est point de Lebesgue de la fonction intégrable $E[Y_tV(X)_t]$. Le lemme (3.7) entraîne donc :

THEOREME 3.8. <u>Avec les mêmes hypothèses, la fonction</u> $E[Y_.V(X)_.]$ <u>est égale p.p. à une fonction absolument continue sur</u> [a,b], <u>et l'on a p.p.</u>

$$(3.15)\qquad \frac{d}{dt}E[Y_tV(X)_t] = E[\frac{1}{m}\Phi_t\cdot Y_t + \frac{1}{2}(DX_t\cdot DY_t+\hat{D}X_t\cdot\hat{D}Y_t)]$$

Cela correspond exactement, pour les courbes déterministes, à la relation évidente $(y_tx_t')'=y_tx_t''+y_t'\cdot x_t'$, dans laquelle on a remplacé l'accélération x_t'' par sa valeur tirée de la loi de Newton Φ/m. On exprime donc ainsi la loi de Newton stochastique de manière assez satisfaisante.

REMARQUES. a) Il résulte du th. 3.5 que, si les valeurs au bord sont des v.a. dégénérées, l'extrémale est la trajectoire de la mécanique classique qui joint ces valeurs au bord. En effet, celle-ci appartient à $S(\underline{\underline{F}},\underline{\underline{G}})$ et satisfait à (3.11).

b) Si les filtrations sont déterministes, le problème que nous traitons est celui de la mécanique classique. Alors (3.15) nous donne, sous une hypothèse qui est à peu près une condition de Lipschitz sur le champ de force Φ , la différentiabilité p.p. de la vitesse V et la loi de Newton. Ce n'est pas <u>trop</u> grossier, bien que certainement, on sache faire beaucoup mieux.

En mécanique classique, en prenant Y=V dans (3.15) on obtiendrait le théorème des forces vives (la conservation de l'énergie lorsque p est indépendant du temps). Yasue affirme dans son article [4] que l'on a un théorème analogue en mécanique stochastique, mais nous ne sommes pas encore parvenus à reconstituer tous les détails de démonstration.

REFERENCES

Sur la mécanique de Nelson, voir

[1]. E. NELSON. Dynamical theories of brownian motion. Princeton University Press, 1967.

[2]. E. NELSON. Quantum Fluctuations, Princeton Series in Physics, Princeton University Press. To appear in 1984 (version préliminaire, 3e Cycle de physique en Suisse Romande, Lausanne, Juin 1983).

[3]. P.A. MEYER. Séminaire de Probabilités XVI, Supplément : Géométrie différentielle stochastique, p. 197-202. LN. 921, Springer 1982.

(En fait, cette dernière référence concerne la mécanique stochastique sur les variétés, et a peu de rapport avec le sujet traité ici).

Sur la forme variationnelle de la macanique stochastique, voir

[4]. K. YASUE. Stochastic Calculus of Variations. J. Funct. Anal. 41, 1981, p. 327-340.

Malheureusement, la démonstration du théorème principal p. 331 est insuffisante (réciproque du th. 3.6).

[5]. J.C. ZAMBRINI, K. YASUE. Semi-classical Quantum mechanics and stochastic calculus of variations. Annals of Physics 143, 1982 p. 54-83.

Sur la capacité de la mécanique stochastique à modéliser toutes sortes de phénomènes macroscopiques, voir :

[6]. M. NAGASAWA. Segregation of a population in an environment. J. Math. Biology 9, 1980, p. 213-235.

[7]. S. ALBEVERIO, Ph. BLANCHARD, R. HOEGH-KROHN. Diffusions sur une variété Riemannienne, Barrières infranchissables et Applications. Présenté au Colloque en l'honneur de L. Schwartz, Juin 1983. A paraître dans Astérisque , 1984.

IRMA (Laboratoire Associé au CNRS)
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg-Cedex

et (premier auteur)

Ecole Normale Supérieure de Chine Orientale
Shanghai , République Populaire de Chine