Antoine Ehrhard

Sur l'inégalité de Sobolev logarithmique de Gross

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 194-196
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__194_0>

Université de Strasbourg 1982/83

Séminaire de Probabilités

SUR L'INEGALITE DE SOBOLEV LOGARITHMIQUE DE GROSS

par Antoine Ehrhard

Dans son article "Logarithmic Sobolev inequalities" [2] Gross esquisse une démonstration qui fait le lien entre son inégalité et l'inégalité de Sobolev classique, via l'inégalité de Gagliardo et Nirenberg. Mais il obtient ainsi un résultat plus faible (Th.5,p.1075 de [2], où apparait un terme parasite affecté d'une constante qui dépend de la dimension). En s'inspirant de cette démarche nous proposons une démonstration simple de l'inégalité de Gross qui, rappelons le, est équivalente au théorème d'hypercontractivité de Nelson. L'argument utilisé dépend de l'inégalité de Borell.

I. NOTATIONS

Dans $\mathbb{R}^n$, muni de la norme euclidienne $|\cdot|$, γ_n est la mesure de Gauss canonique (de densité $(\sqrt{2\pi})^{-n}\exp(-|x|^2/2)$). Les normes $\|\cdot\|_p$ désignent les normes dans $L^p(\mathbb{R}^n;\gamma_n)$. L'inégalité de Sobolev logarithmique de Gross est la suivante

1. THEOREME. Pour toute fonction $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\nabla f \in L^2(\gamma_n)$

on a

$$\| f^2 \ln|f| \|_1 \leqslant \|f\|_2^2 + \|f\|_2^2 \ln \|f\|_2 .$$

Nous allons démontrer cette inégalité.

II. L'INEGALITE DE SOBOLEV DANS $\mathbb{R}$.

L'inégalité de Gagliardo et Nirenberg (voir par exemple Stein [3] p.130) en dimension un s'écrit $\|u\|_\infty \leqslant \|u'\|_{L^1(dx)}$ pour toute fonction $u: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dont la dérivée u' est intégrable; c'est un résultat trivial. Nous en déduisons par Hölder

$$\|u \ln|u|\|_{L^1(dx)} \leqslant \|u\|_{L^1(dx)} \ln\|u'\|_{L^1(dx)}$$

En posant $u = v^2$ et en utilisant Hölder à nouveau on obtient l'inégalité

$$2\,\|v^2 \ln|v|\|_{L^1(dx)} \leqslant \|v\|^2_{L^2(dx)} \ln(2\|v\|_{L^2(dx)}\|v'\|_{L^2(dx)})$$

que l'on écrit

$$\|v^2 \ln|v|\|_{L^1(dx)} \leqslant \frac{1}{4}\|v\|^2_{L^2(dx)} \ln(4\|v'\|^2_{L^2(dx)}/\|v\|^2_{L^2(dx)})$$
$$+ \|v\|^2_{L^2(dx)} \ln\|v\|^2_{L^2(dx)} \quad .$$

Avec la majoration $\ln t \leqslant t$ on a ensuite

$$(2.1) \qquad \|v^2 \ln|v|\|_{L^1(dx)} \leqslant \|v'\|^2_{L^2(dx)} + \|v\|^2_{L^2(dx)} \ln\|v\|^2_{L^2(dx)} \ .$$

On effectue maintenant le changement de variable $v(x) = f(x)(2\pi \exp x^2)^{-1/4}$ et on a les formules

$$\int v^2(x) \ln|v(x)|\, dx = \|f^2 \ln|f|\|_1 - \frac{1}{4}\ln 2\pi \|f\|_2^2 - \frac{1}{4}\int x^2 f^2(x)\gamma_1(dx)$$
$$\int (v')^2(x)\, dx = \|f'\|_2^2 + \frac{1}{2}\|f\|_2^2 - \frac{1}{4}\int x^2 f^2(x)\,\gamma_1(dx) \ .$$

En remplaçant dans (2.1) on obtient l'inégalité

$$(2.2) \qquad \int f^2 \ln|f|\,\gamma_1 \leqslant \|f'\|_2^2 + \|f\|_2^2 \ln\|f\|_2 + c\,\|f\|_2^2$$

où $c = \ln(2\pi e^2)/4$.

III. L' INEGALITE DE GROSS DANS $\mathbb{R}^n$.

Pour passer en dimension quelconque nous utilisons l'inégalité de Borell ou plus précisément le fait suivant qui en découle (voir [1])

3.PROPOSITION. Soient $p \in [1; +\infty]$ et $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. Si g^* est le réarrangement équimesurable croissant de g sur $(\mathbb{R}, \gamma_1)$ alors on a

$$\|(g^*)'\|_p \leqslant \| |\nabla g| \|_p \quad .$$

L'inégalité (2.2) et la proposition 3 entrainent l'inégalité

$$(3.1) \quad \int f^2 \ln|f| \gamma_n \leqslant \| |\nabla f| \|_2^2 + \|f\|_2^2 \ln \|f\|_2 + c \|f\|_2^2$$

pour toute fonction $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dont le gradient ∇f est dans $L^2(\gamma_n)$. Nous allons raffiner un peu l'inégalité (3.1). Si on considère le cas où $g = f^{\otimes k}$ avec $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction dont le gradient ∇f est dans $L^2(\gamma_n)$ alors (3.1) appliqué dans $(\mathbb{R}^n)^k$ fournit après simplification

$$\int f^2 \ln|f| \gamma_n \leqslant \| |\nabla f| \|_2^2 + \|f\|_2^2 \ln \|f\|_2 + \frac{c}{k} \|f\|_2^2 \quad .$$

En faisant tendre k vers l'infini on achève la démonstration.

REFERENCES

[1] EHRHARD(A.). Inégalités isopérimétriques et intégrales de Dirichlet gaussiennes. Ann.Sci.de l'E.N.S.(1984)à paraître

[2] GROSS(L.). Logarithmic Sobolev inequalities. Amer.J.Math. 97, 1976, p. 1061-1083.

[3] STEIN(E.M.). Singular Integrals and differentiability properties of functions. Princeton University Press.(1970).