SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

WEI-AN ZHENG

Une remarque sur une même i.s. calculée dans deux filtrations

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 172-173
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__172_0>

Séminaire de Probabilités XVIII

UNE REMARQUE SUR UNE MEME I.S. CALCULEE DANS DEUX FILTRATIONS

par ZHENG Weian .

Soient, sur un espace complet $(\Omega, \underline{\underline{A}}, P)$, deux filtrations $\underline{\underline{F}} = (\underline{\underline{F}}_t)_{t \geq 0}$ et $\underline{\underline{G}} = (\underline{\underline{G}}_t)_{t \geq 0}$ vérifiant les conditions habituelles. Si X est une semimartingale pour chacune des deux filtrations, et si un processus <u>borné</u> H est prévisible pour chacune des deux filtrations, l'intégrale stochastique $H \cdot X$ est-elle la même lorsqu'on la calcule dans $\underline{\underline{F}}$ ou dans $\underline{\underline{G}}$? Si les filtrations sont comparables (par exemple $\underline{\underline{F}}_t \subset \underline{\underline{G}}_t$ pour tout t), la réponse est oui, car c'est vrai si H est $\underline{\underline{F}}$-prévisible élémentaire, et on passe par classe monotone à H $\underline{\underline{F}}$-prévisible borné. Mais dans le cas général, on ne peut pas approcher H par des processus élémentaires qui soient à la fois prévisibles pour $\underline{\underline{F}}$ et $\underline{\underline{G}}$, et nous ne savons pas conclure. Voici néanmoins une réponse partielle.

THEOREME. <u>On suppose que</u>, <u>pour tout</u> t , $\Sigma_{s \leq t} |\Delta X_s| < \infty$ p.s. <u>Alors</u>

a) $H \underset{\underline{\underline{F}}}{\cdot} X - H \underset{\underline{\underline{G}}}{\cdot} X$ <u>est un processus à variation finie</u> ;

b) <u>Si</u> $H \underset{\underline{\underline{F}}}{\cdot} X$ <u>est adapté à</u> $\underline{\underline{G}}$ <u>et</u> $H \underset{\underline{\underline{G}}}{\cdot} X$ <u>adapté à</u> $\underline{\underline{F}}$, $H \underset{\underline{\underline{F}}}{\cdot} X = H \underset{\underline{\underline{G}}}{\cdot} X$.

Nous noterons $\underline{\underline{I}} = (\underline{\underline{I}}_t)_{t \geq 0}$ la filtration intersection : $\underline{\underline{I}}_t = \underline{\underline{F}}_t \cap \underline{\underline{G}}_t$. Le théorème de Stricker montre que X est une $\underline{\underline{I}}$-semimartingale. Les processus à variation finie $A_t = \Sigma_{s \leq t} \Delta X_s$ et $B_t = \int_0^t H_s \, dA_s$ sont adaptés à $\underline{\underline{F}}$ et $\underline{\underline{G}}$, donc à $\underline{\underline{I}}$; la décomposition $H \cdot X = H \cdot (X - A) + H \cdot A$ permet de se ramener au cas où X <u>est continu</u>, ce que nous supposons dans la suite.

Appelons K la projection prévisible du processus mesurable H sur la filtration $\underline{\underline{I}}$.

LEMME. Pour tout processus A continu, à variation finie et $\underline{\underline{I}}$-adapté, on a $H\cdot A = K\cdot A$.

En effet, l'intégrale de Stieltjes $H\cdot A$ est adaptée à $\underline{\underline{F}}$ et à $\underline{\underline{G}}$ donc à $\underline{\underline{I}}$; elle est donc $\underline{\underline{I}}$-prévisible, donc égale à sa projection duale $\underline{\underline{I}}$-prévisible, qui n'est autre que $K\cdot A$.

Démonstration du théorème (X est continue).

a) Soient $X = M+B$ et $X = N+C$ les décompositions respectives de X dans les filtrations $\underline{\underline{F}}$ et $\underline{\underline{G}}$. On a

$$H\underset{\underline{\underline{F}}}{\cdot}X - K\underset{\underline{\underline{F}}}{\cdot}X = (H-K)\underset{\underline{\underline{F}}}{\cdot}M + (H-K)\cdot B \quad ;$$

en appliquant le lemme à $A = \langle M,M\rangle = [X,X]$, on obtient $(H-K)\cdot\langle M,M\rangle = 0$, d'où $(H-K)^2\cdot\langle M,M\rangle = 0$, et $(H-K)\underset{\underline{\underline{F}}}{\cdot}M = 0$. Donc $H\underset{\underline{\underline{F}}}{\cdot}X - K\underset{\underline{\underline{F}}}{\cdot}X$ est v.f.. Puisque $K\underset{\underline{\underline{F}}}{\cdot}X = K\underset{\underline{\underline{I}}}{\cdot}X$ (on est dans le cas où les filtrations sont comparables), $H\underset{\underline{\underline{F}}}{\cdot}X - K\underset{\underline{\underline{I}}}{\cdot}X$ est v.f. et vaut $(H-K)\cdot B$. De même, $H\underset{\underline{\underline{G}}}{\cdot}X - K\underset{\underline{\underline{I}}}{\cdot}X = (H-K)\cdot C$. En définitive, $H\underset{\underline{\underline{F}}}{\cdot}X - H\underset{\underline{\underline{G}}}{\cdot}X$ est v.f. et vaut $(H-K)\cdot(B-C)$.

b) Si $H\underset{\underline{\underline{F}}}{\cdot}X$ est $\underline{\underline{G}}$-adapté et $H\underset{\underline{\underline{G}}}{\cdot}X$ $\underline{\underline{F}}$-adapté, le processus à variation finie

$$A = H\underset{\underline{\underline{F}}}{\cdot}X - H\underset{\underline{\underline{G}}}{\cdot}X = (H-K)\cdot(B-C)$$

est $\underline{\underline{I}}$-adapté. Grâce au lemme, $(H-K)\cdot A = 0$, donc

$$A = (H-K)\cdot(B-C) = [(H-K)^{-1} I_{\{H\neq K\}}](H-K)\cdot A = 0 \quad ,$$

ce qui est le résultat cherché.