CHRISTOPHE STRICKER

Caractérisation des semimartingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 148-153

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__148_0>

Séminaire de Probabilités

1982/83

CARACTERISATION DES SEMIMARTINGALES

par C. STRICKER

Dans [3] nous avons donné une démonstration élémentaire de la forme forte du théorème de Dellacherie-Mokobodzki , suivant laquelle , si X est un processus permettant une intégration stochastique , on peut transformer X par changement de loi en une semimartingale appartenant à n'importe quelle classe $\mathcal{S}^p$. En réalité nous avions montré que l'ensemble des intégrales stochastiques de processus prévisibles élémentaires , bornés par 1 , était un sous-ensemble borné d'un certain $L^2(Q)$. Il nous restait à montrer (sans utiliser tout l'arsenal du calcul stochastique) que X se décomposait sous Q en une martingale de carré intégrable et un processus prévisible à variation de carré intégrable. Par souci de complétude nous rappelons d'abord les résultats de [3] .

On considère un espace probabilisé filtré $(\Omega , \mathcal{F} , (\mathcal{F}_t) , P)$. Pour éviter des localisations fastidieuses tous les processus considérés sont indexés par $[0,1]$. $\mathcal{E}$ désigne l'espace vectoriel des combinaisons linéaires d'indicatrices de rectangles de $[0,1] \times \Omega$ de la forme $]u,1] \times A$ avec $A \in \mathcal{F}_u$; si X est un processus adapté nous poserons $X^* = \underset{t \in [0,1]}{\text{ess sup}} X_t$ et si $H = \sum a_i 1_{]t_i , t_{i+1}]}$ avec a_i $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable , on définit l'intégrale élémentaire $H.X = \sum a_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$ et $H.X_t = H 1_{]0,t]} . X$. Dorénavant H et K désigneront des éléments de $\mathcal{E}$. Dans la suite toutes les espérances se rapporteront à une loi Q qui changera de place en place , tout en restant équivalente à P . Tout repose sur le résultat suivant , dû essentiellement à Nikišin, dont on pourra trouver une démonstration très élégante dans [4] :

THEOREME 1 . Soit $\mathcal{V}$ un sous-ensemble convexe de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un réel $c > 0$ tel que $P[V > c] \leq \varepsilon$ pour tout $V \in \mathcal{V}$, il existe une variable aléatoire bornée Z telle que $Z > 0$ p.s. et que

$$\sup_{V \in \mathcal{V}} E[ZV] < +\infty .$$

THEOREME 2. Si l'ensemble $\{H.X , |H| \leq 1\}$ est borné dans L^o , il existe une loi Q équivalente à P telle que $\sup_{|H| \leq 1} E^Q[H.X]^2 < +\infty$.

La démonstration de ce théorème comportera plusieurs étapes .

LEMME 1 . L'ensemble $\{(H.X)^* , |H| \leq 1\}$ est aussi borné dans L^o .

Démonstration . Supposons le contraire : il existe une suite (H^n) de $\mathcal{E}$ telle que $|H^n| \leq 1$ et que $P[(H^n.X)^* > n] > \varepsilon > 0$. Choisissons un ensemble dénombrable D tel que pour tout n : $(H^n.X)^* = \sup_{t \in D} |H^n.X|_t$ p.s. Pour tout n il existe un temps d'arrêt T_n ne prenant qu'un nombre fini de valeurs et tel que $P[|H^n.X|_{T_n} \geq n] > \varepsilon$. Il suffit de prendre $T_n = \inf\{t \in \Delta , |H^n.X|_t \geq n\}$ où Δ est une partie finie de D assez riche. Remarquant que $H^n.X_{T_n} = H^n 1_{]0,T_n]}.X$, on voit que cela contredit l'hypothèse du théorème .

LEMME 2 . L'ensemble des variables aléatoires $\sum_\sigma (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$ est borné dans L^o lorsque σ parcourt les subdivisions finies de $[0,1]$ et il en est de même de son enveloppe convexe .

Démonstration . Quitte à retrancher X_o à X , on peut supposer $X_o = 0$. Notons d'abord une conséquence évidente du lemme précédent : X^* est fini p.s. Ainsi les processus prévisibles élémentaires $H = \sum X_{u_i} 1_{]t_i , t_{i+1}]}$ avec $u_i \leq t_i$ sont majorés par X^* qui est p.s. fini . Donc la famille $(H.X)$ est bornée dans L^o ainsi que son enveloppe convexe et il en est de même de l'enveloppe convexe de la famille $\sum (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$ car $\sum_{i=0}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 = X_{t_n}^2 - 2 \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$.

LEMME 3. Il existe une loi Q équivalente à P telle que $\sup_{|H|\leq 1} E^Q |H.X| < +\infty$.

Démonstration. D'après le théorème 1 il existe une loi Q équivalente à P telle que $U = \sup_\sigma E[\sum (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2]$, $E[X^*]^2$ et $\sup_{|H|\leq 1} E[H.X]$ soient tous finis pour la loi Q. En prenant $H = \sum 1_{C_i} \times]t_i, t_{i+1}]$ où $C_i = \{E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}] > 0\}$ (resp. $\{E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}] \leq 0\}$) on remarque que X est une quasimartingale, c'est-à-dire $\mathrm{Var}\, X = \sup_\sigma E[\sum |E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}]|] < +\infty$. Pour toute suite de variables aléatoires a_i appartenant à $\mathcal{F}_{t_i}$ on note $A_{t_j} = \sum_{i=0}^{j-1} a_i E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}]$ et on pose $M_{t_j} = \sum_{i=0}^{j-1} a_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) - A_{t_j}$. On obtient aisément les inégalités suivantes si $|a_i| \leq 1$: $E[M_{t_n}]^2 \leq 4\,U$ et $E|A_{t_n}| \leq \mathrm{Var}\, X$. Il en résulte que l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{|H.X|, |H| \leq 1\}$ est aussi bornée dans L^o. Ainsi il existe une loi Q équivalente à P telle que $\sup_{|H|\leq 1} E^Q |H.X| < +\infty$.

Passons maintenant à la démonstration proprement dite du théorème 2. Comme $(M_{t_j})_{j=0,\dots,n}$ est une martingale discrète, l'inégalité classique de Doob montre que $E[M^*_{t_n}]^2 \leq 16\,U$. Soient H un processus prévisible élémentaire borné par 1 et Δ une partie finie de $[0,1]$. On peut écrire $H = \sum a_i 1_{]t_i, t_{i+1}]}$ avec Δ contenu dans $\{t_o = 0, \dots, t_n\}$. Alors $E[\sup_{t\in\Delta} |H.X_t|] \leq 4\,U^{\frac{1}{2}} + \mathrm{Var}\, X$. D'où un résultat meilleur que celui du lemme 3 : $\sup_{|H|\leq 1} E^Q |H.X|^* < +\infty$. En particulier l'enveloppe convexe de $\{(H.X)^*, |H| \leq 1\}$ est bornée dans L^o. Si $H = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 1_{]t_i, t_{i+1}]}$ et si $K = \sum_{j=0}^{n-1} a_j [\sum_{i=0}^{j-1} a_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})] 1_{]t_j, t_{j+1}]}$, alors on a l'égalité évidente : $(H.X)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 + 2(K.X)$. Comme $K^* \leq (H.X)^*$ si $|a_i| \leq 1$ pour tout i, l'ensemble des K.X est borné dans L^o ainsi que son enveloppe convexe d'après l'hypothèse du théorème 2. Il en est de même de l'enveloppe convexe de $\{(H.X)^2, |H| \leq 1\}$. Une nouvelle application du théorème 1 permet d'affirmer l'existence d'une loi Q équivalente à P telle que $\sup_{|H|\leq 1} E^Q [H.X]^2 < +\infty$ et le théorème 2 est démontré.

Nous supposons maintenant que notre espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ vérifie les conditions habituelles. Sous les hypothèses du théorème 2 nous venons de montrer qu'il existe une loi Q équivalente à P telle que (i) $\sup_{|H|\leq 1} E^Q [H.X]^2 < +\infty$ et (ii) $\sup_{\sigma} E^Q [\sum (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2] < +\infty$.

Dans ces conditions on a le théorème suivant sous la loi Q :

THEOREME 3. $X = M + A$ <u>où</u> M <u>est une martingale de carré intégrable et</u> A <u>un processus prévisible à variation de carré intégrable</u>.

<u>Démonstration</u>. La condition (ii) ci-dessus entraîne que $\sup_{\sigma} E[M_1^\sigma]^2 < +\infty$ où $M_1^\sigma = \sum_{\sigma} X_{t_{i+1}} - X_{t_i} - E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}]$. Grâce au théorème de compacité faible dans L^2, il existe une suite (σ_n) de subdivisions que nous pouvons supposer dyadiques, de plus en plus fines, de pas tendant vers 0, telles que la suite $(M_1^{\sigma_n})$ tende faiblement dans L^2 vers une variable aléatoire M_1.
On pose $M_t = E[M_1 | \mathcal{F}_t]$ et on constate aisément que $M_t^{\sigma_n} = E[M_1^{\sigma_n} | \mathcal{F}_t]$ tend faiblement dans L^2 vers $E[M_1 | \mathcal{F}_t]$ si $t \in \bigcup_n \sigma_n$. On pose $A_t = X_t - M_t$ et il reste à montrer que A_t est à variation de carré intégrable. Soit (s_k) une subdivision de $[0, 1]$ telle que pour tout k $s_k \in \bigcup \sigma_n$ et soit Y une variable aléatoire appartenant à la boule unité de L^2. (V_k) désigne une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et $\sigma_n^k = \sigma_n \cap [s_k, s_{k+1}]$. Comme $A_{s_{k+1}} - A_{s_k}$ est égal à la limite faible de $\sum_{\sigma_n^k} E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}]$ lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$E[Y \sum_k V_k (A_{s_{k+1}} - A_{s_k})] = \lim_n E[Y \sum_k V_k (\sum E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}])]$$
$$\leq \sup_n (E[\sum_{\sigma_n} | E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}] |]^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Ce sup est fini . En effet si $H^i = \mathrm{sign}(E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}])$ et si

$H = \sum_\sigma H^i 1_{]t_i, t_{i+1}]}$,

$$H.X = \sum_\sigma H^i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i} - E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}]) + \sum_\sigma H^i E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}] .$$

Donc :

$$\sup_n E[\sum_{\sigma_n} |E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}]|]^2 \leq \sup_n E[H.X]^2 + 2 \sup_n E[\sum (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2]$$

$$< + \infty .$$

Ainsi $E[Y \sum_k V_k (A_{s_{k+1}} - A_{s_k})]$ est majoré par une constante α indépendante de Y, des V_k et de la subdivision (s_k) , si bien que A est à variation de carré intégrable . Il reste maintenant à montrer que A est prévisible , c'est-à-dire que pour toute martingale bornée (N_t) on a l'égalité : $E[N_1 A_1] = E[\int_0^1 N_{t-} dA_t]$.

Reprenant les subdivisions (σ_n) définies précédemment nous avons :
$E[\int_0^1 N_{t-} dA_t] = \lim_n E[\sum_{\sigma_n} N_{t_i} (A_{t_{i+1}} - A_{t_i})]$. Or $A_t = X_t - M_t$ et (M_t) est une martingale , si bien que $E[N_{t_i} (A_{t_{i+1}} - A_{t_i})] = E[N_{t_i} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})]$

$$= E[N_1 E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}]].$$

D'où :

$$E[\int_0^1 N_{t-} dA_t] = \lim_n E[N_1 \sum_{\sigma_n} E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}]] = E[N_1 A_1] .$$

Notons que ce dernier calcul est désormais classique et qu'il est dû à Rao .

REMARQUE . Une application simple du lemme de Khintchine montre que la condition (i) implique la condition (ii) du théorème 3 (voir [1]) .

REFERENCES .

[1] BOULEAU , N. : Sur la variation quadratique de certaines mesures vectorielles . Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 61, 283-290 (1982).

[2] DELLACHERIE , C. et MEYER , P.A. : Probabilités et Potentiel , B , théorie des martingales . Hermann , Paris 1979 .

[3] STRICKER , C. : Sur la caractérisation des semimartingales . Séminaire de Probabilités XV , Lecture Notes in M. 850 , 523-525 , Springer 1981 .

[4] YAN , J.A. : Caractérisation d'une classe d'ensembles convexes de L^1 ou H^1 . Séminaire de Probabilités XIV , Lecture Notes in M. 784 , 220-222 , Springer 1980 .

C. STRICKER
Laboratoire de Mathématiques
E.R.A. CNRS 070 654
Route de Gray
25030 BESANCON Cedex