HERMANN ROST

Diffusion de sphères dures dans la droite réelle : comportement macroscopique et équilibre local

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 127-143
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__127_0>

DIFFUSION DE SPHERES DURES DANS LA DROITE REELLE : COMPORTEMENT MACROSCOPIQUE ET EQUILIBRE LOCAL.

Hermann ROST (Heidelberg)

§1. Introduction.

Le point de départ est l'analyse d'un système de diffusions inter-agissantes dans R , qui est défini par une équation du type suivant

$$(1) \qquad dX_i = -\tfrac{1}{2}\cdot \sum_{j\neq i} \nabla\Psi(X_i - X_j)\,.\,dt + dW_i \ , \ i = 1,\ldots,n \ ,$$

où X_i est la position de la i-ième particule, les W_i sont des Browniens standard indépendants, et Ψ une fonction donnée, symétrique et à support compact. On interprète (1) comme loi d'évolution du processus (Markovien aussi) des "mesures empiriques" $\sum_i \delta_{X_i(t)}$, en oubliant le numérotage des particules. Nous nous intéressons au comportement asymptotique, lorsque $n\to\infty$, du système (1) ; on suppose que la distance typique entre deux particules conserve un ordre de grandeur fini (i.e. que le volume occupé par les particules croît à la même vitesse que n) et que le potentiel binaire Ψ reste inaltéré.
Formellement, on introduit un paramètre $\varepsilon > 0$ et on considère les mesures empiriques renormalisées $N^\varepsilon(t,.)$, définies par

$$(2) \qquad N^\varepsilon(t,\psi) = \int N^\varepsilon(t,du).\psi(u) = \sum_i \varepsilon\psi(\varepsilon X_i(t\varepsilon^{-2}))\ ,\ \psi \in C_o\ .$$

Le nombre de particules est proportionnel à ε^{-1} ; la renormalisation du temps est nécessaire pour obtenir une dynamique non-triviale du processus N^ε si $\varepsilon\to 0$: pour s'en convaincre il suffit de penser au cas $\Psi = 0$ de particules indépendantes. La signification de ε est celle du rapport des unités de longueur à deux échelles différentes, la microscopique et la macroscopique.
Il y a des arguments heuristiques (physiques) qui appuient la

Conjecture. Il existe une fonction K de R^+ dans R^+ , qui dépend du potentiel binaire Ψ , telle que pour une large classe de fonctions $f_o \in L^1_+(R)$ l'hypothèse

(3) $N^{\varepsilon}(0,\psi) \to \int f_o(u) \,.\, \psi(u)du$ en prob. pour tout $\psi \in C_o$ entraîne

(4) $N^{\varepsilon}(t,\psi) \to \int f(t,u) \,.\, \psi(u)du$ en prob. pour tout $\psi \in C_o$,

où f est la solution de l'équation parabolique (non linéaire en général)

(5) $$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(K(f)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x})$$

(5a) $$f(0,.) = f_o \;.$$

Dans l'article présent on démontre cette conjecture dans le cas particulier d'une "diffusion de sphères dures" :

(6) $$\Psi(u) = \infty \,.\, 1_{\{|u|<c\}}$$

(Th.1). Comme valeur initiale on peut admettre tout f_o , positif, intégrable et borné par c^{-1} . La fonction K , qu'on appelle <u>coefficient de transport</u>, est identifiée comme

(7) $$K(\rho) = (1 - c.\rho)^{-2} \;.$$

Nous remarquons qu'il y a une analogie étroite entre (5) et l'équation d'Euler de l'hydrodynamique classique. Là, on suppose que le système se trouve localement en différents états d'équilibre, qui sont caractérisés par 5 paramètres réels ; l'équation d'Euler décrit le changement temporel de ces paramètres. Ici, on croit aussi que le système se trouve localement en équilibre et que (5) donne l'évolution du paramètre (un seul) correspondant. Dans ce qui suit nous nous bornons au cas particulier de Ψ donné par (6).

Expliquons la notion d'équilibre. Il est facile de voir que les mesures (processus ponctuels) invariantes sous la dynamique (1) et stationnaires en espace possèdent comme éléments extrémaux exactement les processus de renouvellement, pour lesquels la distance entre deux points consécutifs est égale à c plus une variable exponentielle. Nous paramétrons ces processus extrémaux, que nous appelons <u>états d'équilibre</u>,,par leur densité ρ et les désignons par μ_ρ . (On a $0 \leq \rho \leq c^{-1}$, évidemment.)

Pour formaliser l'assertion de l'équilibre local il faut introduire la mesure aléatoire (processus ponctuel) $\tilde{N}^{\varepsilon}(t,x,.)$. qui décrit le comportement du système à l'échelle microscopique, au temps t et dans un voisinage du point macroscopique x :

$$\tilde{N}^{\varepsilon}(t,x,\psi) = \sum_i \psi(X_i(t\varepsilon^{-2}) - x\varepsilon^{-1}) \, , \; \psi \in C_o \, . \tag{8}$$

Alors, on peut formuler le théorème 2 en disant, que sous l'hypothèse (3) pour tout $t>0$ et $x \in R$ le processus ponctuel $\tilde{N}^{\varepsilon}(t,x)$ converge faiblement en loi vers $\mu_{f(t,x)}$, l'état d'équilibre en x et t , qui est compatible avec le comportement global du système.

L'organisation de l'article est la suivante :

Au §2 on définit la dynamique du système, en la réduisant par la "méthode de compression et dilatation" à la dynamique de particules indépendantes ; cela nous donne immédiatement la démonstration du th. 1. Le th. 2. est démontré en §4. La difficulté essentielle qu'on y rencontre consiste à démontrer que la propriété de l'équilibre local pour le système comprimé entraîne celle-ci pour le système original, dilaté. Pour la surmonter on se sert d'un lemme qui estime la distance variationnelle entre deux processus ponctuels et d'une adaptation du lemme à la situation concrète (§3). Le lemme est du type d'un théorème récemment établi par plusieurs auteurs ([2], [4], [5]) ; mais, contrairement au cas considéré là, nous avons besoin d'estimer la distance de processus ponctuels dans $(0,T)$ d'intensités stochastiques a et b , non au moyen de $\mathcal{E}_Q \int_0^T |a-b| ds$ mais plutôt de $\mathcal{E}_Q \int_0^T (a-b)^2 . b^{-1} ds$ ou de $\mathcal{E}_Q \int_0^T (a-b)^2 . a^{-1} ds$. Notre lemme n'est pas comparable au théorème mentionné ; par exemple, dans le cas $T = O(n^{\alpha})$ avec $\alpha < 1$, a et b bornés de même que a^{-1} et b^{-1} , $|a-b| = O(n^{-1/2})$, il établit encore la convergence forte de $P-Q$ vers zéro, tandis que la distance L^1 des intensités stochastiques peut devenir arbitrairement grande (si $\alpha > 1/2$) de sorte qu'aucune estimation de la distance variationnelle ne peut être basée sur elle.

§2. Comportement macroscopique.

Nous commençons par une définition directe de la dynamique de lignes dures. Procéder par cette voie semble préférable à l'alternative de donner un sens à (1.1) avec un potentiel Φ singulier moyennant quelque passage à la limite. Fixons n , le nombre de points. L'espace d'états (configurations) E est l'ensemble de tous les sous ensembles de $\mathbb{R}$ de cardinalité n , t.q. la distance minimale entre deux points soit supérieure à c . Construisons le noyau de transition $P_t(x,dx')$ sur E : on représente un élément $x \in E$ par un n-tuple en ordre croissant

(1) $$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \; .$$

La configuration comprimée y est définie par

(2) $$y_i = x_i - c.i \; , \; i = 1,\ldots,n \; .$$

Prenons comme déplacements n v.a. $U_1,\ldots,U_n$, indépendantes, Gaussiennes centrées, de variance t , et posons

(3) $$Y_i = y_i + U_i \; , \; i = 1,\ldots,n \; .$$

Y'_j , $j = 1,\ldots,n$, est le n-tuple des y_i , arrangé en ordre croissant. Finalement, on dilate la configuration :

(4) $$X'_i = Y'_i + c.i \; , \; i = 1,\ldots,n \; ,$$

et on obtient ainsi un élément de E . Par $P_t(x,dx')$ nous désignons la loi de X' . On vérifie que (P_t) forme un semigroupe et que ce semigroupe décrit le mécanisme cherché d'une interaction "dure" entre deux particules situées à distance c .

Passons alors au changement des échelles au sens de (1.2). Pour simplifier posons $\varepsilon = 1/n$, i.e. les mesures empiriques sont des probabilités. Soit $P_t^{(n)}$ le noyau de transition exprimé en des termes macroscopiques, i.e. on remplace c par c/n ; la loi des déplacements reste inaltérée, parce que l'effet d'une multiplication des U_i par ε est compensé par la dilatation du temps, $t \to t.\varepsilon^{-2}$. La relation (2) se transforme en

(5) $$y_i = x_i - c.i/n \ , \ i = 1,\dots,n \ .$$

Si l'on identifie x et y à la f.d. répartition de la mesure empirique F, resp. G,

(6) $$F(u) = \frac{1}{n}\cdot\sum_i 1_{\{x_i \le u\}} \quad G(v) = \frac{1}{n}\cdot\sum_i 1_{\{y_i \le v\}} \ ,$$

on peut exprimer (5) aussi à l'aide de ces fonctions. En particulier, dans la limite $n\to\infty$, la relation entre F et G devient extrêmement simple :

PROPOSITION. Soient donnés pour tout n $x^{(n)}$, $y^{(n)}$ et $F^{(n)}$, $G^{(n)}$ satisfaisant à (5), (6). La suite $\frac{1}{n}\cdot\Sigma\,\delta_{x_i^{(n)}}$ converge faiblement si et seulement si $\frac{1}{n}\cdot\Sigma\,\delta_{y_i^{(n)}}$ converge. Dans ce cas, les f.d.r. des mesures limites, F et G, sont liées par

(7) $$F(u) = G(u - c.F(u)) \ , \ G(v) = F(v + c.G(v)) \ .$$

<u>Démonstration</u>. Evidente.

THEOREME 1. <u>Soit donnée une fonction</u> f_o <u>sur</u> $\mathbb{R}$, $0 \le f_o \le c^{-1}$, <u>d'intégrale 1. Pour chaque</u> n <u>on considère le processus Markovien</u> X^n <u>admettant</u> $(P_t^{(n)})$ <u>comme semi-groupe de transition, à condition initiale</u> $x^{(n)}$, <u>où</u> $x_i^{(n)} \ge x_{i-1}^{(n)} + c/n$ <u>pour</u> $i = 2,\dots,n$. <u>On suppose que</u>

(8) $\frac{1}{n}\cdot\Sigma\,\delta_{x_i^{(n)}}$ tend faiblement vers $f_o(u)du$.

<u>Alors, pour tout</u> t, <u>il existe une fonction</u> $f(t,.)$ <u>t.q. la mesure empirique</u> $\frac{1}{n}\cdot\Sigma\,\delta_{X_i^{(n)}(t)}$ <u>converge faiblement en probabilité vers</u> $f(t,u)du$. <u>La famille</u> $f(t,.)$, $t \ge 0$, <u>satisfait à l'équation d'évolution</u>

(9) $$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left((1-cf)^{-2}\right)\frac{\partial f}{\partial x}) \ .$$

<u>Démonstration</u>.

a) la convergence des mesures empiriques est presque complètement démontrée, par la méthode du processus comprimé : on introduit

$$F_o(x) = \int_{-\infty}^{x} f_o(u)du \ , \ G_o(v) = F_o(v + c.G_o(v)) \ ,$$

et on voit que la mesure empirique $\frac{1}{n}\cdot\Sigma\,\delta_{Y_i^{(n)}(t)}$ converge faiblement en prob. vers la convolution

(10) $$g(t,y)dy = dy.\{\int G_o(dv)(2\pi t)^{-\frac{1}{2}}.\exp(-(y-v)^2/2t)\} .$$

On désigne par $G(t,.)$ l'intégrale indéfinie de $g(t,.)$, par $F(t,.)$ la dilatée de $G(t,.)$ au sens de (7), et par $f(t,.)$ la dérivée de $F(t,.)$, et la première assertion du théorème est établie.

b) Tirons deux conclusions de la relation entre $F(t,.)$ et $G(t,.)$

(11) $$G(t,y) = F(t,y+cG(t,Y)) :$$

la différentiation p.r. à y nous donne

$$g(t,y) = f(t,x).(1+cg(t,y)) , \text{ ou soit}$$

(12) $$g = f(1-cf)^{-1} , \; f = g(1+cg)^{-1} ,$$

où les arguments respectifs x et y sont liés par

(13) $$x = y+cG(t,y) , \; y = x-cF(x,t) ;$$

en différentiant (11) p.r. à t on obtient

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}.c.\frac{\partial G}{\partial t} , \text{ soit}$$

(14) $$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t}.(1-cf)^{-1} .$$

La fonction g étant une solution de l'équation habituelle de la chaleur, on a

(15) $$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{1}{2}.\frac{\partial g}{\partial y} .$$

La combinaison de (14) et (15) donne

(16) $$\frac{\partial F}{\partial t}.(1-cf)^{-1} = \frac{1}{2}.\frac{\partial g}{\partial y} ;$$

les identités (12) et (13) permettent d'exprimer le côté droit de (16) par

$$\frac{1}{2}.\frac{\partial}{\partial y}(f(1-cf)^{-1} , \text{ égal à } (1-cf)^{-1}.\frac{1}{2}.\frac{\partial}{\partial x}(f(1-cf)^{-1}) .$$

Ainsi on arrive enfin à l'équation

(17) $$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2}.\frac{\partial}{\partial x}(f(1-cf)^{-1}) ,$$

qui équivaut à (9) .

Remarque. Usant la notion du "courant de masse" j , on peut énoncer (9) ou (17) aussi dans la forme

(18) $$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}\ ,\ j = -\frac{1}{2}.(1-cf)^{-2}.\frac{\partial f}{\partial x}\ ;$$

la relation entre j et le gradient de densité s'interprète comme une espèce de "loi de Fourier", où la constante de proportionalité dépend de la densité.

§3. Un lemme auxiliaire de la théorie des processus ponctuels dans la droite réelle.

Soit T un réel positif, Ω l'espace des mesures de comptage, finies, dans $(0,T]$, $N_t(\omega)$ la valeur de la mesure ω en $(0,t]$, $0 \le t \le T$. Désignons par $(\mathfrak{F}_t)$ la filtration naturelle de N_t, i.e. la tribu $\mathfrak{F}_t$ est engendrée par N_s, $s \le t$.

Nous considérons deux probabilités, P et Q, sur $(\Omega,\mathfrak{F}_T)$. On suppose qu'elles possèdent les intensités stochastiques a et b p.r. à la filtration $(\mathfrak{F}_t)$: (a_t) et (b_t) sont des processus adaptés, t.q.

(1) $$N_t - \int_0^t a_s d_s \quad \text{et} \quad N_t - \int_0^t b_s ds\ ,\ 0 \le t \le T\ ,$$

sont des martingales (locales) p.r. à P et Q, respectivement.

Pour simplifier l'argumentation, on suppose qu'il existe des constantes c_1 et c_2, t.q.

(2) $$0 \le c_1 \le a_t\ ,\ b_t \le c_2 \quad \text{pour tout } t\ .$$

(On verra plus tard que ces constantes n'entrent pas du tout dans l'énoncé du lemme 1 ou 2.) Par ε_p et ε_Ω on dénote les espérances respectives.

Rappelons la définition de la distance variationnelle (d.v.) des mesures P et Q :

(3) $$\mathrm{var}(P,Q) = \sup\{|P(E)-Q(E)| : E \in \mathfrak{F}_T\}\ .$$

Les quantités à l'aide desquelles on veut estimer cette distance seront les suivantes

(4) $$A := \varepsilon_Q\{\int_0^T (a_t-b_t)^2.b_t^{-1}dt\}\ ,\ B := \varepsilon_Q\{\int_0^T (a_t-b_t)^2.a_t^{-1}dt\}\ .$$

LEMME (première version). <u>Il existe une constante universelle</u> K <u>(qu'on peut choisir plus petite que</u> 5), <u>telle que</u>

(5) $$\operatorname{var}(P,Q) \leq K \,.\, A^{1/3} \,.$$

<u>Démonstration</u>. On commence suivant la ligne "canonique" de la démonstration d'un résultat pareil, établi par plusieurs auteurs ([2], [4], [5]). On désigne par Z_t , $t \leq T$, la Q-martingale du quotient de Radon-Nikodym $\frac{dP}{dQ}$ sur $\mathfrak{F}_t$, $t \leq T$, que l'on représente comme intégrale stochastique :

(6) $$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-} dL_s \,, \text{ où}$$

(7) $$dL_s = (a/b - 1).(dN_s - b.ds) \,.$$

L'accroissement du processus croissant naturel associé au carré de L est donc égal à

(8) $$d\langle L,L\rangle_s = (a/b - 1)^2.b.ds = (a-b)^2.b^{-1}.ds \,.$$

Prenons un $C \in (0,1)$ arbitraire et posons

(9) $S := \inf\{t : |Z_t - 1| > C\}$ (resp. T , si l'ensemble est vide).

Alors on a

(10) $$C^2.Q(\sup_{t \leq T} |Z_t - 1| > C) \leq C^2.Q(|Z_S - 1| \geq C) \leq \varepsilon_Q(Z_S - 1)^2 =$$
$$\varepsilon_Q\left(\int_0^S Z_{t-}^2.d\langle L,L\rangle_t\right) \leq (1+C)^2.A \,,$$

en vertu de (8). Comme P est absolument continue p.r. à Q (hypothèse (2) on a

(11) $$\operatorname{var}(P,Q) = \tfrac{1}{2}.\, \varepsilon_Q|Z_T - 1| = \varepsilon_Q(1 - Z_T)^+ =$$
$$\varepsilon_Q(1 - Z_T)[1_{\{Z_T < 1-C\}} + 1_{\{1-C \leq Z_T < 1\}}] \,.$$

L'application de (10) nous donne

(12) $$\operatorname{var}(P,Q) \leq (1+C)^2.C^{-2}.A + C \,.$$

Choisissant C dans (12) de manière appropriée, p.e. $C = A^{1/3}$, on obtient la borne

$$\operatorname{var}(P,Q) \leq 5.A^{1/3} \,, \text{ si } A \leq 1 \,,$$

de laquelle (5) suit immédiatement.

LEMME (seconde version). Supposons que les intensités a et b soient continues à gauche. Soit δ un réel positif et $E = \{\omega : \inf_{s \leq T} b_s/a_s(\omega) < \delta\}$. Alors on a l'inégalité suivante

(13) $$\mathrm{var}(P,Q) \leq Q(E) + K.(B/\delta)^{1/3}$$

(K : la même constante qui figure en (5)).

Démonstration. On commence comme dans la démonstration précédente. Au lieu de (10) on arrive à

(14) $$Q(\sup_{t \leq T} |Z_t - 1| > C) \leq Q(E) + Q(E^c \cap \{\sup_{t \leq T} |Z_t - 1| > C\}) .$$

Ici le deuxième terme à droite est majoré par

(15) $$C^{-2} . \varepsilon_Q \, 1_{\widetilde{E}^c} . (Z_S - 1)^2 ,$$

où $\widetilde{E} = \{\inf_{t \leq S} b_t/a_t < \delta\}$ est contenu dans E et $\mathcal{F}_S$ - mesurable.

Continuant comme ci-dessus, on majore la quantité (15) par

(16) $$(1+C)^2 . C^{-2} . \varepsilon_Q (1_{\widetilde{E}^c} \cdot \int_0^S (a-b)^2 . b^{-1} dt) ,$$

et finalement, par définition de $\widetilde{E}$, par

(17) $$(1+C)^2 . C^{-2} . \delta^{-1} . \varepsilon_Q (\int_0^T (a-b)^2 . a^{-1} dt)) .$$

Ainsi, au lieu de (12), on arrive à la borne

(18) $$\mathrm{var}(P,Q) \leq Q(E) + (1+C)^2 . C^{-2} . (B/\delta) + C ,$$

de laquelle on déduit le résultat voulu.

Deux exemples typiques.

a) Comparaison de deux processus de Poisson.

On observe pour tout n deux processus de Poisson dans un intervalle $(0,T_n]$; on suppose que leurs intensités stochastiques satisfont à

(19) $\qquad b_t = b$ (constante) pour tout n, $|a_t - b_t| \le c.n^{-1/2}$.

Alors la première version du lemme nous donne que leur d.v. converge vers 0 lorsque $T = O(n)$ si $n \to \infty$.

b) Comparaison d'un processus empirique à un processus de Poisson.

Soient $U_1,\dots,U_n$ des v.a. réelles indépendantes, de même loi, dont la densité et la f. de répartition sont notées f et F . La mesure Q est définie comme loi du processus ponctuel $\sum_i \delta_{U_i}$, restreint à l'intervalle $(0,T]$, T dépendant de n . P est la mesure de Poisson dans le même intervalle p.r. à l'intensité $a_t = n.f(t)$. Si l'on remplace la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$ par $(\mathcal{G}_t)$, où $\mathcal{G}_t$ est engendrée par $U_i \wedge t$, $i = 1,\dots,n$, on sait que l'intensité de Q est égale à

(20) $$\tilde{b}_t = \sum_i f(t).(1-F(t))^{-1}.1_{\{U_i \ge t\}} .$$

L'intensité b de Q p.r. à $(\mathcal{F}_t)$ s'en déduit comme espérance conditionnelle appropriée (voir [1], p. 32). Comme a_t est l'espérance inconditionnelle de $\tilde{b}_t$, on obtient ainsi

(21) $$B \le \varepsilon_Q\left(\int_0^T (a-\tilde{b})^2.a^{-1}dt = \int_0^T f.F.(1-F)^{-1}dt .\right.$$

Cette dernière expression converge vers 0 lorsque $n \to \infty$, sous des hypothèses assez faibles sur f ; continuité et positivité stricte dans un voisinage de 0 suffisent.

Pour conclure que $\mathrm{var}(P,Q) \to 0$, il reste à montrer, d'après la seconde version du lemme, qu'il existe un $\delta > 0$ t.q.

(22) $$Q(\inf b/a \ge \delta) \to 1 .$$

Or l'événement figurant dans (22) contient $E_1 = \{\inf \tilde{b}/a \ge \delta\}$ et celui-ci l'événement E_2 suivant :

"le nombre des indices i t.q. $U_i \ge T$ est plus grand que $n.\delta.(1-F(0))$" .

Pour chaque $\delta < 1$ fixe, la loi des grands nombres entraîne $Q(E_2) \to 1$, si $F(T) \to F(0)$, donc si $T \to 0$.

Suite de l'exemple.

Si l'on veut approximer Q par P', le processus de Poisson d'intensité constante $a = n.f(0)$, au lieu de P, ce qu'il faut vérifier, d'après la première version du lemme, c'est que la propriété

$$\lim_n \int_o^T (n.f(0) - n.f(t))^2 \cdot n^{-1} \cdot f(0)^{-1} dt = 0 \tag{23}$$

est vraie. Mais si l'on suppose f différentiable, la formule de Taylor montre que (23) est satisfait dès que $T = o(n^{-1/3})$, parce que l'intégrale dans (23) est de l'ordre de $n.T^3$.

D'où le résultat final :

Si f est positive et différentiable dans un voisinage de 0, le processus empirique dans $(0,T]$ est approximé en d.v. par un processus de Poisson homogène, pourvu que $T = o(n^{-1/3})$.

§4. Equilibre local.

Retournons à la construction de la dynamique du système ponctuel donnée ci-dessus (§2). Maintenant on s'intéresse à des propriétés microscopiques ; donc les v.a. qu'interviennent ici seront mesurées à l'échelle microscopique. De manière plus détaillée, les hypothèses et notations seront les suivantes :

(1) la configuration initiale x satisfait à $x_i - x_{i-1} \geq c$ pour $i \geq 2$; posons $y_i = x_i - ci$, $i \leq n$;

(2) $\frac{1}{n} \cdot \Sigma\, \delta_{x_i/n}$ tend faiblement vers $f_o(u)du$;

(3) les déplacements au temps fixé $t > 0$, $U_1, \ldots, U_n$, sont indépendants, de loi $N(0, n^2 \cdot t)$;

(4) la configuration aléatoire après le déplacement (ordonnée) est désignée par $X = (X_i)_{i=1,\ldots,n}$, où

$$X_i = Y_i' + c.i \ , \ Y_i = y_i + U_i \ , \ i \leq n \ ,$$

et Y' est l'arrangement des Y_i en ordre croissant.

Nous fixons un $u \in R$ ("macroscopique") et $T > 0$ et considérons les deux processus ponctuels (p.p.) suivants dans l'intervalle $I = [nu-T, nu+T] : \Sigma \delta_{X_i}$, le processus empirique au temps t , et le processus stationnaire (état d'équilibre) de loi $\mu_{f(t,u)}$, tous les deux restreints à I .

THEOREME 2. <u>La distance variationnelle entre ces deux processus (sur l'espace canonique des mesures de comptage dans</u> I , <u>muni de sa tribu canonique) tend vers zéro, lorsque</u> $n \to \infty$.

La démonstration sera le résultat d'une série de propositions auxiliaires. L'idée générale peut se résumer ainsi :

On exprime l'énoncé du théorème à l'aide des variables Y_i ; mais pour cette fin il faut comparer le p.p. $\Sigma \delta_{Y_i}$ à un processus de Poisson homogène dans un intervalle J suffisamment long pour que, avec grande probabilité, tous les points $X_i \in I$ proviennent d'un point $Y_i' = X_i - c.i$ situé dans J ; donc la longueur de J doit être d'un ordre supérieur à celui de $n^{1/2}$. Si l'on choisit cette longueur égale à n^{α} , $1/2 < \alpha < 2/3$, on peut montrer d'autre part, en utilisant le lemme établi en §3, que la d.v. entre le processus des Y_i et le Poissonien dans J converge vers zéro. L'assertion du théorème en suit presque immédiatement.

Sur l'espace de probabilités Ω' où les U_i et Y_i sont définis on introduit la filtration $(\mathcal{G}_r)$, en posant

$$(5) \qquad \mathcal{G}_r = \sigma(Y_i \wedge r \ , \ i = 1,\dots,n) \ , \ r \in R \ ,$$

et les v.a. (le processus de comptage)

$$(6) \qquad N_r = \sum_i 1_{\{Y_i \le r\}} \ , \ r \in R \ .$$

L'espérance de dN_r sera désignée par $n.dG(r)$, où

$$(7) \qquad G(r) = \frac{1}{n} \cdot \sum_i \Phi\left((r-y_i)/n\right)$$

$(\Phi, \varphi :$ f. de répartition et densité de la loi $N(0,1)$; on suppose $t = 1$ sans perte de généralité.)

PROPOSITION 1. L'intensité stochastique de dN p.r. à la filtration $(\mathcal{G}_r)$ est égale à

(8) $$b_r = \frac{1}{n}\cdot\sum_i H((r-y_i)/n).1_{\{Y_i \geq r\}} ,$$

où $H(s) = \varphi(s).(1-\Phi(s))^{-1}$.

Démonstration. Evidente.

On détermine alors l'intervalle J comme suit :

on définit v comme solution de

(9) $$v/n + c.G(v) = u ;$$

on fixe un α ; $1/2<\alpha<2/3$, et on pose

(10) $$J = (v_1,v_2] , \text{ avec } v_1 = v-n^\alpha , v_2 = v+n^\alpha .$$

On introduit une seconde filtration $(\mathcal{G}'_r)$ sur l'espace Ω' donné, moins riche que $(\mathcal{G}_r)$, définie par

(11) $$\mathcal{G}'_r = \sigma(N_w , v_1 \leq w \leq x) , r \in J .$$

Cela signifie que $(\mathcal{G}'_r)$ contient l'information de l'histoire de dN dans J et, de plus, de la v.a. N_{v_1} .

Sur la tribu $\mathcal{G}'_{v_2}$ on définit deux probabilités : P' , la mesure induite par le p.p. $\Sigma\,\delta_{Y_i}$, et Q' , qui est caractérisée comme suit :

(12) $$Q' = P' \text{ sur } \mathcal{G}'_{v_1} ;$$

sous Q' le processus $N_r - N_{v_1}$, $r \in J$, est un processus de Poisson d'intensité constante p.r. à $(\mathcal{G}'_r)$ égale à

(13) $$a: = n.\left.\frac{dG}{dr}\right|_{r=v} .$$

(Remarque : la quantité a dépend encore de n ; mais elle possède une limite pour $n \to \infty$, comme on verra plus tard.)

PROPOSITION 2. $\operatorname{var}(P',Q') \to 0$, lorsque $n \to \infty$.

Démonstration. Il s'agit d'une légère modification de l'exemple b), §3, qui concerne les points suivants :

La filtration $(\mathcal{G}'_r)$ n'est plus la naturelle $(\mathcal{F}_r)$; mais il est facile de voir que le lemme et les exemples restent valables pour toute filtration de la forme $(\mathcal{F} \vee \mathcal{F}_r)$, $\mathcal{F}$ fixe.

Les Y_i ne sont plus de même loi ; mais on vérifie sans peine que les propriétés essentielles ont été conservées : la variance de b_r est de l'ordre de $1/n$ et b_r est borné inférieurement à un ensemble de petite probabilité près. Pour se convaincre de la première assertion on calcule

$$\mathcal{E}(b_r - \mathcal{E}b_r)^2 = n^{-2} \cdot \sum_i (\Phi \cdot \varphi \cdot H)((r-y_i)/n) \tag{14}$$

et observe que $H(s) = O(s)$ pour $s \to \infty$; donc les termes à droite dans (14) sont bornés, uniformément en n et $r \in J$.

Avant de redilater le système ponctuel des y_i il est convénient d'élargir l'espace canonique des mesures de comptage associé au système des X_i .

Soit $\widetilde{\Omega}$ l'espace des applications croissantes $\widetilde{\omega}$ de R_+ dans $\{0,1,2,..\}$, continues à droite et dont les sauts sont bornés par 1. (On n'exige pas que $\widetilde{\omega}_0$ soit égal à zéro.) On munit $\widetilde{\Omega}$ de sa filtration naturelle $(\mathcal{G}_S)$: $\mathcal{G}_S = \sigma(\widetilde{N}_T , T \leq S)$, où $\widetilde{N}_T(\widetilde{\omega}) = \widetilde{\omega}_T$. Alors on introduit l'application aléatoire ("dilatation") S , de R dans R ,

$$S(r) := r + c.N(r) \tag{15}$$

et on définit

$$u_i := S(v_i) \ , \ i = 1,2 \ , \tag{16}$$

$$M_s := \sum_i 1_{\{X_i \leq u_1 + s\}} \ , \ s \geq 0 \ . \tag{17}$$

Si l'on interprète $M_\bullet$ comme application de Ω' dans $\widetilde{\Omega}$, on peut définir les mesures $\widetilde{P}$ et $\widetilde{Q}$ comme les images de P' et Q' sous cette application ;

elles sont définies sur la tribu $\widetilde{\mathcal{G}}_{u_2-u_1}$. (On note que u_2-u_1 est un temps d'arrêt p.r.à $(\widetilde{\mathcal{G}}_s)$.) Ainsi nous avons obtenu :

<u>Proposition 2 (formulation alternative)</u>. La d.v. de $\widetilde{P}$ et $\widetilde{Q}$ converge vers zéro.

<u>PROPOSITION 3</u>. Sous la mesure $\widetilde{Q}$, $\widetilde{N}_s-\widetilde{N}_o$, $s \geq 0$, est un processus de renouvellement, indépendant de $\widetilde{\mathcal{G}}_o$. Il est équivalent en loi au processus

(18) $$s \mapsto \sum_m 1_{\{S_m \leq s\}} ,$$

où les S_m sont des sommes partielles de variables i.i.d. D_k , avec $\mathrm{Prob}(D_k > s) = \exp(-a(s-c)^+)$, $s \in R$.

<u>Démonstration</u>. Evidente.

Définissons une troisième mesure $\widetilde{R}$ sur $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{G}}_{u_2-u_1})$: elle coïncide avec $\widetilde{P}$ et $\widetilde{Q}$ sur $\widetilde{\mathcal{G}}_o$; sous $\widetilde{R}$, le processus $\widetilde{N}_s-\widetilde{N}_o$, $s \geq 0$, est indépendant de $\mathcal{G}_o$ et sa loi est celle-ci du processus de renouvellement <u>stationnaire</u> correspondant au processus (18). Cette loi avait été désignée par μ_ρ dans l'introduction, où ρ est donné par

(19) $$\rho^{-1} = a^{-1} + c .$$

PROPOSITION 4. Pour toute suite (t_n) tendant vers l'infini, la d.v. de $\widetilde{Q}$ et $\widetilde{R}$ sur la tribu $\sigma(\widetilde{N}_s , s \geq t_n)$ tend vers zéro, lorsque $n \to \infty$.

<u>Démonstration</u>. Il s'agit d'une version du théorème classique de renouvellement ([3]) : le processus (18) et le processus stationnaire correspondant induisent la même probabilité sur la tribu des "événements lointains".

Fixons alors la suite (t_n) de sorte que $t_n = o(n^{1/2})$.

PROPOSITION 5. La probabilité (sous P') que l'intervalle $I = [nu - T , nu + T]$ soit contenu dans $[u_1 + t_n , u_2]$ converge vers 1 .

<u>Démonstration</u>. Par symétrie on se borne à montrer que

(20) $$P'(u_1 + t_n < nu - T) \to 1 \ .$$

En effet, l'événement $\{u_1 < nu - T - t_n\}$ contient $\{v+c.N_v < nu-T-t_n+n^{\alpha}\}$; par construction de v la v.a. $v + c.N_v$ est d'espérance nu et de variance bornée par $c^2.n/4$; donc appliquant l'inégalité de Tchebycheff on obtient (20).

Des Propositions 2 et 5 on conclut :

PROPOSITION 6. La d.v. entre le processus empirique $\sum_i \delta_{X_i} . 1_{\{X_i \in I\}}$ et le processus de loi μ_ρ , restreint à l'intervalle I aussi, converge vers 0 .

Pour achever la démonstration du théorème on remarque d'abord que la quantité ρ tend vers la limite $f(t,u) = f(1,u)$ pour $n \to \infty$. En effet, l'hypothèse (2) entraîne la convergence des fonctions de répartition G :

(21) $$\lim_n G(ny) = G(1,y) \quad \text{pour tout} \quad y \in R \ ,$$

où $G(t,.)$ est défini à la suite de (2.10). On a même convergence uniforme des densités correspondantes ; de plus,

(22) $$\lim_n v/n = y \ ,$$

où y est la solution de

(23) $$y + c.G(1,y) = u \ ,$$

donc

(24) $$a = n . \frac{dG}{dr}\bigg|_{r=v} \to g(1,y) \ ,$$

ou soit

(25) $$\rho \to f(1.u) \ .$$

Un deuxième argument, qui dit que les mesures μ_ρ restreintes à un intervalle fini dépendent de façon continue (en norme) du paramètre ρ , finit la démonstration.

<u>Remarque finale</u>. L'absence d'un énoncé sur la vitesse de convergence du processus empirique dans I est due simplement au fait qu'on n'a voulu faire aucune hypothèse concernant la qualité de l'approximation de la mesure

initiale macroscopique $f_o(x)dx$ par la mesure empirique initiale $\sum_i \frac{1}{n} \cdot \delta_{x_i/n}$.

REFERENCES.

[1] P. BREMAUD : Point processes and queues. New York, Heidelberg, Berlin : Springer 1981.

[2] T.C. BROWN : Some Poisson approximations. Preprint 1982. (A paraître dans Annals of Probability.)

[3] W. FELLER : An introduction to probability theory and its applications, Vol.II. New-York : Wiley 1966.

[4] J. MEMIN Distance en variation et conditions de contiguité pour des lois de processus ponctuels. Séminaire de Probabilités de l'Université de Rennes, 1981/82.

[5] YU.M. KABANOV, R.S. LIPTSER, A.N. SHIRYAYEV : Convergence faible et forte des lois de processus de comptage (en russe). Teoriya veroyatnostei 28, 288-319 (1983).

Des modèles pareils, unidimensionnels, sont présentés en

[6] T. HARRIS Diffusion with "collision" between particles. J. appl. Prob. 2, 323-338 (1965).

[7] R.L. DOBRUSHIN, YU M. SUKHOV : The asymptotics for some degenerate models of evolution of systems with an infinite number of particles. J. Sov. Math. 16, 1277-1340 (1981). Ch. 7.

Une introduction à la notion de la limite hydrodynamique se trouve dans l'article

[8] R.L. DOBRUSHIN, R. SIEGMUND-SCHULTZE : The hydrodynamic limit for systems of particles with independent motion. Math. Nachr. 105, 199-224 (1982).