MICHEL LEDOUX

Arrêt par régions de $\{S_{\mathbf{n}}/|\mathbf{n}|, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^2\}$

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 384-397
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__384_0>

ARRET PAR REGIONS DE $\{S_{\underline{n}} / |\underline{n}| , \underline{n} \in \mathbb{N}^2\}$

M. Ledoux

1. INTRODUCTION

L'étude de l'arrêt des suites $\{X_n / n , n \in \mathbb{N}\}$ et $\{S_n / n , n \in \mathbb{N}\}$ où $\{X_n , n \in \mathbb{N}\}$ désigne une famille de variables aléatoires indépendantes et réparties comme une variable aléatoire X et S_n la somme partielle $X_1 + \ldots + X_n$, a permis à B. Davis [3] et B.J. McCabe et L.A. Shepp [8] de prouver que la condition d'intégrabilité sur X :

$$(1.1) \qquad E\{|X| \log^+ |X|\} < \infty \quad ,$$

équivaut à la condition :

$$(1.2) \qquad E\left\{\frac{|X_\sigma|}{\sigma}\right\} < \infty \quad \text{pour tout temps d'arrêt } \sigma \ ,$$

ainsi qu'à :

$$(1.3) \qquad E\left\{\frac{|S_\sigma|}{\sigma}\right\} < \infty \quad \text{pour tout temps d'arrêt } \sigma \ .$$

Abordant ce problème dans le cadre d'une suite multiple $\{X_{n_1,\ldots,n_d} , (n_1,\ldots,n_d) \in \mathbb{N}^d\}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X , R.Cairoli et J.-P. Gabriel [1] ont étendu à plusieurs indices la première de ces deux équivalences en prouvant que (1.1) équivaut à :

$$(1.4) \qquad E\left\{\frac{|X_{\tau_1,\ldots,\tau_d}|}{\tau_1\cdot\ldots\cdot\tau_d}\right\} < \infty \quad \text{pour tout point d'arrêt } (\tau_1,\ldots,\tau_d) \ .$$

La question de l'équivalence dans ce cadre des propriétés (1.1) et (1.3), laissée ouverte dans [1] , a été résolue récemment par U. Krengel et L. Sucheston [7] par l'intermédiaire d'un plongement linéaire permettant de ramener le problème multidimensionnel sur la ligne et de lui appliquer alors le résultat connu à un indice ; ils ont ainsi prouvé que la condition (1.1) est satisfaite si, et seulement si :

(1.5) $\quad E\left\{\dfrac{|S_{\tau_1,\dots,\tau_d}|}{\tau_1\cdot\dots\cdot\tau_d}\right\} < \infty$ pour tout point d'arrêt $(\tau_1,\dots,\tau_d)$ engendré par une tactique (pour tout point d'arrêt si $d = 2$).

Dans le présent article, nous nous proposons de montrer que le principe du plongement linéaire s'applique également pour le deuxième procédé d'arrêt multidimensionnel, à savoir celui par régions. Nous limitant à la dimension $d = 2$, nous obtiendrons ainsi l'équivalence de la condition (1.1) et de :

(1.6) $\quad E\left\{\dfrac{|S(A)|}{|A|}\right\} < \infty$ pour toute région d'arrêt A ,

où l'on aura posé, pour tout sous-ensemble E de $\mathbb{N}^2$, $S(E) = \sum_{(n_1,n_2)\in E} X_{n_1,n_2}$, $|E|$ désignant le cardinal de E .

Diverses interprétations sont possibles en ce qui concerne l'analogue de la condition (1.4) pour les régions d'arrêt. L'une d'elles consiste à substituer, dans (1.6), $S(L_A)$ à $S(A)$ où L_A désigne la ligne d'arrêt associée à la région A (en d'autres mots, son bord supérieur droit) ; nous n'avons pu établir l'équivalence de (1.1) et de cette nouvelle condition. Cependant, le point (τ_1,τ_2) de la condition (1.4) ($d = 2$) peut également être considéré comme point maximal du rectangle $\{(n_1,n_2)\in\mathbb{N}^2 : n_1 \leq \tau_1 , n_2 \leq \tau_2\}$ et cette observation conduit à étudier l'ensemble M_A des points maximaux de la région d'arrêt A ((n_1,n_2) est maximal s'il appartient à A et si ni (n_1+1,n_2) ni (n_1,n_2+1) n'appartiennent à A). Nous prouverons ainsi que (1.1) équivaut aussi à :

$$(1.7) \qquad E\left\{\frac{|S(M_A)|}{|A|}\right\} < \infty \quad \text{pour toute région d'arrêt } A .$$

2. NOTATIONS ET DEFINITIONS

Notre ensemble d'indices sera le produit $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ noté plus brièvement $\mathbb{N}^2$, où $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers positifs. Un élément générique de $\mathbb{N}^2$ sera noté $\underline{n} = (n_1,n_2)$ et le produit $n_1 \cdot n_2$ désigné par $|\underline{n}|$. De la même façon, si E est une partie de $\mathbb{N}^2$, $|E|$ désignera son cardinal. L'ensemble $\mathbb{N}^2$ sera supposé muni de l'ordre partiel $\underline{m} \prec \underline{n}$ qui signifie $m_1 \leq n_1$ et $m_2 \leq n_2$, ainsi que de son ordre dual $\underline{m} \curlywedge \underline{n}$ qui signifie quant à lui $m_1 \leq n_1$ et $n_2 \leq m_2$. Son plus petit élément pour l'ordre $\prec$ est le point $\underline{1} = (1,1)$ alors que $\underline{\infty}$ désignera un élément plus grand que tous les points de $\mathbb{N}^2$. Nous munirons enfin $\mathbb{N}^2$ d'un ordre total quelconque $\lhd$.

Sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},P)$, considérons une suite double $\{X_{\underline{n}} , \underline{n} \in \mathbb{N}^2\}$ de variables aléatoires réelles indépendantes et réparties comme une variable aléatoire X . L'espace $(\Omega,\mathcal{F},P)$ sera équipé de la filtration naturelle $\{\mathcal{F}_{\underline{n}} , \underline{n} \in \mathbb{N}^2\}$ associée à la famille $\{X_{\underline{n}} , \underline{n} \in \mathbb{N}^2\}$. Si E est une partie aléatoire de $\mathbb{N}^2$, nous poserons, pour tout ω tel que $|E(\omega)|$ est fini, où $E(\omega)$ désigne la coupe de E suivant ω , $S(E)(\omega) = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^2} I_{\{\underline{n} \in E(\omega)\}} X_{\underline{n}}(\omega)$; On conviendra que $S(E)(\omega) / |E(\omega)| = 0$ pour tout ω tel que $|E(\omega)|$ est infini. Nous poserons en outre $S_{\underline{n}} = \sum_{\underline{m} \prec \underline{n}} X_{\underline{m}}$.

L'arrêt à deux paramètres se caractérise essentiellement à l'aide des deux notions suivantes : un point d'arrêt est une variable aléatoire $\underline{\tau} = (\tau_1,\tau_2)$ à valeurs dans $\mathbb{N}^2 \cup \{\underline{\infty}\}$ telle que, pour tout $\underline{n}$,

$\{\underline{\tau} = \underline{n}\}$ est un événement de la tribu $\mathcal{F}_{\underline{n}}$. Un région d'arrêt au sens large (respectivement une région d'arrêt) est un sous-ensemble A de $\mathbb{N}^2 \times \Omega$ vérifiant les propriétés suivantes :

(a) pour tout ω de Ω , si $\underline{n} \in A(\omega)$, alors $\underline{m} \in A(\omega)$ pour tout $\underline{m} \prec \underline{n}$;

(b) pour tout élément $\underline{n} = (n_1, n_2)$ de $\mathbb{N}^2$, $\{(n_1+1, n_2+1) \in A\}$ appartient à $\mathcal{F}_{n_1+1,n_2} \vee \mathcal{F}_{n_1,n_2+1}$ (respectivement à $\mathcal{F}_{\underline{n}}$), avec en outre les conditions aux bords : $\{\underline{n} \in A\}$, $\{(n_1+1, n_2) \in A\}$ et $\{(n_1, n_2+1) \in A\}$ appartiennent à $\mathcal{F}_{\underline{n}}$. Ici $\{\underline{n} \in A\}$ désigne la coupe de A suivant $\underline{n}$.

A la notion de région d'arrêt est attachée celle de ligne d'arrêt. Une ligne d'arrêt L est une partie aléatoire de $\mathbb{N}^2$ totalement ordonnée pour $\curlywedge$ et telle que $\{\underline{n} \in L\}$ appartient à $\mathcal{F}_{\underline{n}}$ pour tout $\underline{n}$. L'ensemble L_A des points $\underline{n} = (n_1, n_2)$ d'une région d'arrêt A tels que (n_1+1, n_2+1) n'appartient pas à A est une ligne d'arrêt ; c'est la ligne de séparation associée à A . Toute ligne d'arrêt peut être obtenue de la sorte. Une région d'arrêt A est finie presque sûrement si $|A(\omega)| < \infty$ pour presque tout ω de Ω .

3. PLONGEMENT LINEAIRE ET ARRET DE $\{ S_{\underline{n}} / |\underline{n}| , \underline{n} \in \mathbb{N}^2 \}$

La technique du plongement linéaire a été introduite par U. Krengel et L. Sucheston [7] dans le problème de l'arrêt par points de la suite $\{ S_{\underline{n}} / |\underline{n}| , \underline{n} \in \mathbb{N}^2 \}$. Nous allons constater, dans ce paragraphe, que cette méthode permet également d'aborder la question de l'arrêt de cette même suite par des régions et d'obtenir des résultats analogues. Les arguments principaux sont identiques à ceux de l'article de U. Krengel et L. Sucheston auquel il pourrait être fait référence à tout instant. En particulier, nous supposerons, sans perte de la généralité, que l'espace Ω est l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^2}$ de toutes les applications ω de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{R}$ et que, pour tout $\underline{n}$ de $\mathbb{N}^2$, la variable aléatoire $X_{\underline{n}}$ désigne l'application coordonnée : $X_{\underline{n}}(\omega) = \omega_{\underline{n}}$.

Théorème 1. Soit $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^2\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et réparties comme X ; les assertions suivantes sont équivalentes :

(3.1) $\quad E\{|X|\log^+|X|\} < \infty$;

(3.2) $\quad E\left\{\dfrac{|S(A)|}{|A|}\right\} < \infty$ pour toute région d'arrêt au sens large A.

Remarque. Comme il est indifférent de considérer des temps d'arrêt finis presque sûrement ou non dans la condition (1.3), il ressort de la démonstration ci-dessous que l'équivalence du théorème subsiste avec des régions d'arrêt (non nécessairement larges) finies presque sûrement.

Démonstration. Supposons que (3.2), dans sa variante explicitée dans la remarque précédente, soit satisfaite et considérons un temps d'arrêt fini σ relatif à la suite $\{X_{n_1,1}, n_1 \in \mathbb{N}\}$. Alors $A = \{(n_1,1) \in \mathbb{N}^2 : n_1 \leq \sigma\}$ est une région d'arrêt finie presque sûrement et :

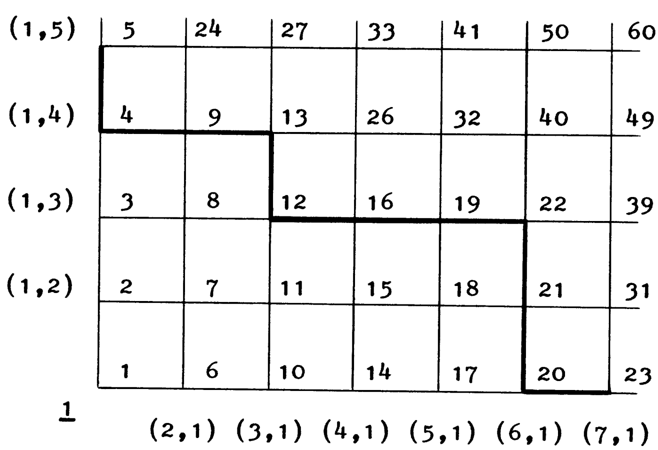
$$E\left\{\frac{|S(A)|}{|A|}\right\} = E\left\{\frac{1}{\sigma}\left|\sum_{n_1 \leq \sigma} X_{n_1,1}\right|\right\}.$$

Le résultat de B. Davis, B.J. McCabe et L.A. Shepp permet de conclure que (3.1) a lieu.

Réciproquement, supposons la condition (3.1) remplie et considérons une région d'arrêt au sens large A. Nous associons à A une famille aléatoire $\varphi = \{\varphi_\omega, \omega \in \Omega\}$ d'applications de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ définie de la façon suivante : fixons tout d'abord un élément ω de Ω tel que $|A(\omega)| < \infty$; il existe une suite finie (dépendant de

ω mais nous omettrons de l'indiquer explicitement) $\underline{n}(0) \curlywedge \underline{n}(1) \curlywedge \ldots$ $\ldots \curlywedge \underline{n}(k)$ de points de $\mathbb{N}^2$, suite qui désigne la ligne de séparation associée à $A(\omega)$. $\underline{n}(0)$ est un élément de l'axe vertical de $\mathbb{N}^2$ alors que $\underline{n}(k)$ appartient à l'axe horizontal. Posons alors $\varphi_\omega(\underline{1}) = 1$ et énumérons les points de $A(\omega)$ comme suit : sur la verticale $\{(1,n_2)\ ,\ n_2 \in \mathbb{N}\}$, on numérote les points de $A(\omega)$ de 1 jusqu'à $|\underline{n}(0)|$, puis, sur la seconde verticale, on poursuit cette numérotation jusqu'à atteindre le dernier point dans $A(\omega)$ et ainsi de suite. Parvenu au point $\underline{n}(k)$, on complète cette numérotation linéaire de $\mathbb{N}^2$ à l'aide de l'ordre total $\lhd$ fixé au départ. Si $|A(\omega)| = \infty$, le plongement linéaire se perd à l'infini, soit sur l'axe vertical, soit sur l'axe horizontal.

Illustrons sur un dessin l'application φ_ω . L'ordre total est le suivant : $(1,1) \lhd (2,1) \lhd (1,2) \lhd (3,1) \lhd (2,2) \lhd (1,3) \lhd (4,1) \lhd \ldots$ La ligne d'arrêt associée à A est représentée par un trait gras. Les couples (n_1,n_2) représentent les points de $\mathbb{N}^2$ dont seuls quelques éléments sont indiqués ; les entiers correspondent aux $\varphi_\omega(\underline{n})$.



A partir de la famille $\varphi = \{\varphi_\omega\ ,\ \omega \in \Omega\}$, définissons à présent une application Ψ de $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^2}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \Omega'$ de la manière suivante : si ρ_ω est l'application inverse de φ_ω , posons, pour $\omega = \{\omega_{\underline{n}} , \underline{n} \in \mathbb{N}^2\}$:

$$\Psi(\omega) = \eta = \{\eta_k , k \in \mathbb{N}\} \quad \text{avec} \quad \eta_k = \omega_{\rho_\omega(k)} \ .$$

Il n'est pas difficile de constater que Ψ est bijective sur $\{\omega \in \Omega , |A(\omega)| < \infty\}$. Considérons en effet un élément $\eta = \{\eta_k , k \in \mathbb{N}\}$ de Ω' ; il est associé à un unique $\omega = \{\omega_{\underline{n}} , \underline{n} \in \mathbb{N}^2\}$ construit de la façon suivante : il est bien clair que $\omega_{\underline{1}} = \eta_{\underline{1}}$. Comme $\{(1,2) \in A\}$ et $\{(2,1) \in A\}$ sont des événements de la tribu $\mathcal{F}_{\underline{1}}$ engendrée par la variable aléatoire $X_{\underline{1}} = \omega_{\underline{1}}$, cette dernière détermine la situation de ω dans $\{(1,2) \in A\}$ et $\{(2,1) \in A\}$, ou autrement dit, la position des points $(1,2)$ et $(2,1)$ par rapport à $A(\omega)$. Suivant les cas, ω n'appartient ni à $\{(1,2) \in A\}$ ni à $\{(2,1) \in A\}$ et $A(\omega)$ se limite à l'ensemble formé de l'unique élément $\underline{1}$ et les autres coordonnées de ω sont déterminées à l'aide de $\eta_2, \eta_3, \ldots$ et l'ordre total, ou ω appartient à l'un de ces deux événements (ou aux deux) déterminant ainsi $\omega_{(1,2)}$ ou $\omega_{(2,1)}$. L'argumentation précédente peut alors être répétée pour fournir la conclusion.

Même si Ψ n'est pas nécessairement bijective sur tout Ω , elle reste surjective sur cet ensemble et permet ainsi de définir de manière unique une variable aléatoire σ_A sur $\Omega' = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en posant $\sigma_A = |A \circ \Psi^{-1}|$. Ω' sera muni par la suite de la tribu $\mathcal{F}'$ engendrée par les variables aléatoires coordonnées $X'_k(\eta) = \eta_k$ et de la filtration associée $\{\mathcal{F}'_k , k \in \mathbb{N}\}$. Nous poserons en outre $P' = P \circ \Psi^{-1}$.

La proposition suivante est la clef du plongement linéaire.

__Proposition__. σ_A est un temps d'arrêt de la filtration $\{\mathcal{F}'_k , k \in \mathbb{N}\}$ et la famille $\{X'_k , k \in \mathbb{N}\}$ de variables aléatoires sur $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ est formée de variables indépendantes de même loi que X .

<u>Démonstration de la proposition</u>. Nous débutons cette démonstration en prouvant que σ_A est un temps d'arrêt de la filtration $\{\mathcal{F}'_k , k \in \mathbb{N}\}$; il suffit de prouver à cet effet que si $\eta = \{\eta_k , k \in \mathbb{N}\}$ est un point de Ω' tel que $\sigma_A(\eta) = j$ et si $\bar{\eta} = \{\bar{\eta}_k , k \in \mathbb{N}\}$ appartient également à Ω' et vérifie $\bar{\eta}_1 = \eta_1$, ... , $\bar{\eta}_j = \eta_j$, alors $\sigma_A(\bar{\eta}) = j$. Soient ω et $\bar{\omega}$ tels que $\Psi(\omega) = \eta$ et $\Psi(\bar{\omega}) = \bar{\eta}$. Si $j = 1$, $A(\omega)$ se réduit au point $\underline{1}$, c'est-à-dire que $\omega \in \{(1,2) \notin A\} \cap \{(2,1) \notin A\}$. Or, ce dernier ensemble est mesurable par rapport à la tribu engendrée par $\omega_{\underline{1}} = \eta_1 = \bar{\eta}_1 = \bar{\omega}_{\underline{1}}$; il s'ensuit que $\bar{\omega} \in \{(1,2) \notin A\} \cap \{(2,1) \notin A\}$ et $\sigma_A(\bar{\eta}) = 1$. Si $j > 1$, l'égalité $\omega_{\underline{1}} = \bar{\omega}_{\underline{1}}$ implique que ω et $\bar{\omega}$ sont en même temps dans l'un des trois ensembles suivants : $\{(1,2) \in A\} \cap \{(2,1) \in A\}$ $\{(1,2) \in A\} \cap \{(2,1) \notin A\}$, $\{(1,2) \notin A\} \cap \{(2,1) \in A\}$. S'ils sont par exemple tous les deux dans le second, $\omega_{(1,2)} = \eta_2 = \bar{\eta}_2 = \bar{\omega}_{(1,2)}$ et cette égalité supplémentaire nous permet de connaître la position commune de ω et $\bar{\omega}$ dans $\{(1,3) \in A\}$. Ce raisonnement peut être poursuivi pour conclure à la première affirmation de la proposition.

Nous démontrons à présent la seconde partie de l'énoncé en prouvant tout d'abord l'égalité :

$$P'\{X'_1 \in B_1 , X'_2 \in B_2\} = P\{X_{\underline{1}} \in B_1\} \, P\{X_{\underline{1}} \in B_2\}$$

pour tout couple (B_1, B_2) de boréliens de $\mathbb{R}$. Il est clair que X'_1 et $X_{\underline{1}}$ ont même loi ; par suite :

$$\begin{aligned} & P'\{X'_1 \in B_1 , X'_2 \in B_2\} \\ &= P\{\Psi^{-1}(\{X'_1 \in B_1 , X'_2 \in B_2\})\} \\ &= P\{\omega \in \Omega : X_{\underline{1}}(\omega) \in B_1 , \Psi(\omega)_2 \in B_2\} \end{aligned}$$

$$= P\{X_{\underline{1}} \in B_1 , X_{(1,2)} \in B_2 , (1,2) \in A\}$$

$$+ P\{X_{\underline{1}} \in B_1 , X_{(2,1)} \in B_2 , (1,2) \notin A , (2,1) \in A\}$$

$$+ P\{X_{\underline{1}} \in B_1 , X_{\underline{n}_o} \in B_2 , (1,2) \notin A , (2,1) \notin A\}$$

où $\underline{n}_o$ est le premier point de $\mathbb{N}^2 - \{\underline{1}\}$ dans son énumération à l'aide de l'ordre total $\lhd$. Or, les ensembles $\{(1,2) \in A\}$ et $\{(2,1) \in A\}$ sont mesurables par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{\underline{1}}$ qui est indépendante des variables $X_{(1,2)}$, $X_{(2,1)}$ et $X_{\underline{n}_o}$; par conséquent :

$$P'\{X'_1 \in B_1 , X'_2 \in B_2\}$$

$$= P\{X_{(1,2)} \in B_2\} \, P\{X_{\underline{1}} \in B_1 , (1,2) \in A\}$$

$$+ P\{X_{(2,1)} \in B_2\} \, P\{X_{\underline{1}} \in B_1 , (1,2) \notin A , (2,1) \in A\}$$

$$+ P\{X_{\underline{n}_o} \in B_2\} \, P\{X_{\underline{1}} \in B_1 , (1,2) \notin A , (2,1) \notin A\}$$

$$= P\{X_{\underline{1}} \in B_1\} \, P\{X_{\underline{1}} \in B_2\} .$$

Dans le cas général, on calcule $P'\{X'_1 \in B_1 ,\dots, X'_k \in B_k\}$ en partageant l'espace en sous-ensembles sur lesquels $X'_k \circ \Psi$ est égal au même $X_{\underline{n}}$; ces sous-ensembles étant indépendants de $X_{\underline{n}}$, on en déduit aisément, en répétant les arguments développés ci-dessus dans le cas $k = 2$, l'égalité :

$$P'\{X'_1 \in B_1 ,\dots, X'_k \in B_k\}$$

$$= P'\{X'_1 \in B_1 ,\dots, X'_{k-1} \in B_{k-1}\} \, P\{X_{\underline{1}} \in B_k\} .$$

Ceci achève la démonstration de la proposition.

Pour terminer celle du théorème, il ne reste plus qu'à constater que $S(A) = S'_{\sigma_A} \circ \Psi$ où $S'_k = \sum_{j \leqslant k} X'_k$; par conséquent, la loi de $S(A)$ sous P est la même que celle de S'_{σ_A} sous $P' = P \circ \Psi^{-1}$ et en particulier :

$$E_P\left\{\frac{|S(A)|}{|A|}\right\} = E_{P'}\left\{\frac{|S'_{\sigma_A}|}{|A|}\right\},$$

ce qui permet de conclure en vertu de la proposition précédente et du résultat à une dimension rappelé en introduction.

Le prochain théorème est en un certain sens l'analogue de l'équivalence entre les conditions (1.1) et (1.4) pour les régions d'arrêt. Rappelons que si A est une région d'arrêt, l'ensemble de ses points maximaux est constitué des points $\underline{n} = (n_1, n_2)$ dans A pour lesquels ni (n_1+1, n_2) ni (n_1, n_2+1) n'appartiennent à A.

<u>Théorème 2</u>. Soit $\{X_{\underline{n}}\ ,\ \underline{n} \in \mathbb{N}^2\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et réparties comme X ; les conditions suivantes sont équivalentes :

(3.3) $\qquad E\{|X|\log^+|X|\} < \infty$;

(3.4) $\qquad E\left\{\frac{|S(M_A)|}{|A|}\right\} < \infty$ pour toute région d'arrêt A.

<u>Démonstration</u>. La seconde implication est une conséquence immédiate des résultats de B. Davis, B.J. McCabe et L.A. Shepp : soit en effet un temps d'arrêt fini σ de la suite $\{X_{n_1,1}\ ,\ n_1 \in \mathbb{N}\}$; alors $A = \{(n_1,1) \in \mathbb{N}^2 : n_1 \leq \sigma\}$ est une région d'arrêt finie presque sûrement, $M_A = \{\sigma\}$ et :

$$E\left\{\frac{|S(M_A)|}{|A|}\right\} = E\left\{\frac{|X_{\sigma,1}|}{\sigma}\right\}.$$

La première espérance étant finie par hypothèse, la deuxième l'est aussi et par conséquent (3.3) a lieu. Sous réserve d'avoir démontré l'implication réciproque, nous voyons que (3.3) est aussi équivalent à la condition (3.4) où seules interviennent des régions d'arrêt finies presque sûrement.

L'outil essentiel dans la preuve de l'implication inverse est à nouveau le plongement linéaire. Fixons une région d'arrêt A. En vue du but que nous poursuivons, nous allons tout d'abord nous affranchir des éléments de M_A situés sur les axes de $\mathbb{N}^2$ en substituant à M_A l'ensemble $\hat{M}_A$ constitué des points maximaux de A hors des axes. Pour vérifier que cette substitution est licite, notons $\underline{\tau}_A$ le point maximal (éventuellement infini) de A situé sur l'axe horizontal de $\mathbb{N}^2$: $\underline{\tau}_A$ est un point d'arrêt. On s'aperçoit alors en reprenant la démonstration du théorème 1 que $X_{\underline{\tau}_A} = X'_{\sigma_A} \circ \Psi$, et donc :

$$E_P\left\{\frac{|X_{\underline{\tau}_A}|}{|A|}\right\} = E_{P'}\left\{\frac{|X'_{\sigma_A}|}{\sigma_A}\right\} .$$

Le principe du plongement linéaire ainsi que l'équivalence des conditions (1.1) et (1.2) de l'introduction nous permettent d'inférer que si X vérifie l'hypothèse d'intégrabilité (3.3), la première des deux espérances précédentes est finie. Il en va bien entendu de même pour le point maximal de l'axe vertical quitte à remplacer l'énumération verticale des points de A dans la démonstration du théorème 1 par une énumération horizontale. Ceci justifie l'utilisation de $\hat{M}_A$.

Définissons à présent l'ensemble aléatoire $\hat{A} = A - \hat{M}_A$. Il est aisé de constater que $\hat{A}$ est une région d'arrêt au sens large ; par exemple, pour tout $\underline{n} = (n_1,n_2)$ de $\mathbb{N}^2$:

$$\begin{aligned}&\{(n_1+1,n_2+1) \in \hat{A}\}\\ &= \{(n_1+1,n_2+1) \in A\} \cap \{(n_1+2,n_2+1) \notin A\} \cap \{(n_1+1,n_2+2) \notin A\}\end{aligned}$$

et ce dernier ensemble appartient à $\mathcal{F}_{n_1+1,n_2} \vee \mathcal{F}_{n_1,n_2+1}$. Il ne reste plus alors qu'à écrire $S(\hat{M}_A) = S(A) - S(\hat{A})$ et à appliquer le théorème 1 pour conclure que sous l'hypothèse (3.3) :

$$E\left\{\frac{|S(\hat{M}_A)|}{|A|}\right\} \leqslant E\left\{\frac{|S(A)|}{|A|}\right\} + E\left\{\frac{|S(\hat{A})|}{|A|}\right\} < \infty .$$

Ceci achève la démonstration du théorème 2 .

Remarque.Afin de nous débarrasser des points maximaux sur les bords de $\mathbb{N}^2$, nous avons utilisé, dans la démonstration du théorème 2 , une propriété d'arrêt par points. Celle-ci s'énonce plus généralement de la façon suivante. Si L est une ligne d'arrêt, on désigne par $\underline{\tau}_L$ un point d'arrêt porté par L . Avec cette notation, on a équivalence entre (3.3) et :

(3.5) $\quad E\left\{\frac{|X_{\underline{\tau}_L}|}{|L|}\right\} < \infty$ pour toute ligne d'arrêt L et tout point d'arrêt $\underline{\tau}_L$ sur L .

Cette observation ne résulte pas du plongement linéaire mais de la technique développée par R. Cairoli et J.-P. Gabriel dans leur article [1] où il est prouvé que (p. 190) sous la condition (3.3) :

(3.6) $\quad E\left\{\frac{|X_{\underline{\tau}}|}{\tau_1 + \tau_2}\right\} < \infty$ pour tout point d'arrêt $\underline{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$.

Dans l'espoir de remplacer $X_{\underline{\tau}_L}$ par $S(L)$ dans la condition (3.5), peut-être vaut-il de noter que, contrairement aux chemins croissants aléatoires [1], la famille $\{X_{\underline{n}} , \underline{n} \in \mathbb{N}^2\}$ ne se transforme pas nécessairement en une suite de copies indépendantes de X le long d'une ligne d'arrêt.

Comme pour les les points d'arrêt [7], le principe du plongement linéaire offre quelques applications à l'optimalité par régions de $\{S_{\underline{n}} / |\underline{n}| , \underline{n} \in \mathbb{N}^2\}$ ainsi qu'à l'équation de Wald.

Corollaire (région optimale). Si X est centrée et de carré intégrable (ou seulement de puissance p-ième intégrable pour un $p > 1$), il existe une région d'arrêt A_o finie presque sûrement optimale pour $\{S_{\underline{n}} / |\underline{n}| , \underline{n} \in \mathbb{N}^2\}$, i.e. telle que :

$$E\left\{\frac{|S(A_o)|}{|A_o|}\right\} = \sup E\left\{\frac{|S(A)|}{|A|}\right\} ,$$

le supremum portant sur toutes les régions d'arrêt au sens large A .

<u>Corollaire</u> (équation de Wald). Pour toute région d'arrêt au sens large A finie presque sûrement pour laquelle $E\{S(A)\}$ est bien définie, $E\{S(A)\} = E\{|A|\} E\{X\}$ si $E\{X\}$ est non nul ou $E\{|A|\}$ est fini. On a également, si $E\{X\} = 0$ et $E\{|A|\} < \infty$, $E\{|S(A)|^2\} = E\{|A|\} E\{|X|^2\}$.

Ces corollaires sont des conséquences immédiates du plongement linéaire et des résultats correspondant à un indice dus, pour l'optimalité, à A. Dvoretzky [5] (B. Davis [4] sous l'hypothèse d'intégrabilité plus faible), à H.E. Robbins et E. Samuel [9] pour l'équation de Wald [10] et à Y.S. Chow, H.E. Robbins et H. Teicher [2] pour cette identité dans sa forme prise au carré.

Signalons enfin des applications du plongement linéaire à l'arrêt (par points ou régions) de sommes partielles de variables aléatoires indépendantes de même loi normalisées par d'autres dénominateurs que $|\underline{n}|$, tels $|\underline{n}|^p$ $(1 \leq p < 2)$ ou $(|\underline{n}| \log^+ \log^+ |\underline{n}|)^{1/2}$, étudié par A. Gut [6] à un paramètre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Cairoli, J.-P. Gabriel. Arrêt de certaines suites multiples de variables aléatoires indépendantes. Séminaire de Probabilités XIII . Lecture Notes in Math. 721 , 174-198 (1979).

[2] Y.S. Chow, H.E. Robbins, H. Teicher. Moments of randomly stopped sums. Ann. Math. Statist. 36 , 789-799 (1965).

[3] B. Davis. Stopping rules for S_n / n and the class LlogL . Z. Wahr. verw. Geb. 17 , 147-150 (1971).

[4] B. Davis. Moments of random walk having infinite variance and the existence of certain optimal stopping rules for S_n / n . Illinois J. Math. 17 , 75-81 (1973).

[5] A. Dvoretzky. Existence and properties of certain optimal stopping rules. Proc. 5th Berkeley Symposium, 441-452 (1967).

[6] A. Gut. Moments of the maximum of normed partial sums of random variables with multidimensional indices. Z. Wahr. verw. Geb. 46 , 205-220 (1979).

[7] U. Krengel, L. Sucheston. Stopping rules and tactics for processes indexed by a directed set. J. Multivariate Analysis 11 , 199-229 (1981).

[8] B.J. McCabe, L.A. Shepp. On the supremum of S_n / n . Ann. Math Statist. 41 , 2166-2168 (1970).

[9] H.E. Robbins, E. Samuel. An extension of a lemma of Wald. J. Appl. Prob. 3 , 272-273 (1966).

[10] A. Wald. Sequential Analysis. Wiley, New-York (1947).

Université Louis-Pasteur,
Département de Mathématique,
7, rue René-Descartes,
F-67084 Strasbourg Cédex.