Michel Ledoux

Une remarque sur la convergence des martingales à deux indices

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 377-383
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__377_0>

UNE REMARQUE SUR LA CONVERGENCE DES MARTINGALES A DEUX INDICES

M. Ledoux

Dans un article récent sur la convergence presque sûre des processus à plusieurs paramètres [10] , L. Sucheston retrouve le théorème de convergence des martingales de R. Cairoli [1] à partir d'un résultat général sur certains opérateurs dans les espaces d'Orlicz. Ce résultat étend plus particulièrement des théorèmes de convergence presque sûre d'espérances conditionnelles où fonctions et tribus varient simultanément. Dans cette courte note, nous nous proposons de préciser certains aspects du travail de L. Sucheston et d'en situer la portée dans l'étude de la convergence des martingales indexées par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Nous supposerons donnés un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et une famille $\{\mathcal{F}_{mn} , (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ indexée par $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et croissante pour l'ordre partiel usuel sur cet ensemble. Nous poserons $\mathcal{F}_{m\infty} = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{mn}$ et $\mathcal{F}_{\infty n} = \bigvee_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{mn}$.

Nous appellerons martingale un processus intégrable $X = \{X_{mm} , (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_{mn} , (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ tel que $E\{X_{m'n'} \mid \mathcal{F}_{mn}\} = X_{mn}$ pour tout $m \leq m'$ et $n \leq n'$. Nous dirons que X est une 1-martingale s'il est adapté et si pour tout entier n fixé, $\{X_{mn} , m \in \mathbb{N}\}$ est une martingale ordinaire de la filtration $\{\mathcal{F}_{m\infty} , m \in \mathbb{N}\}$. La notion de 2-martingale se définit de façon analogue et un processus X sera une bi-martingale s'il est à la fois une 1-martingale et une 2-martingale. Enfin, suivant A.Millet et L. Sucheston [9] , nous dirons que X est une martingale (1) (resp. (2)) s'il est une martingale et une 1-martingale (resp. 2-martingale). On remarquera que toute bi-martingale est à la fois une martingale (1) et (2) et donc également une martingale.

La filtration $\{\mathcal{F}_{mn}\ ,\ (m,n)\in \mathbb{N}^2\}$ satisfait à l'hypothèse d'indépendance conditionnelle si pour tout couple (m,n) de $\mathbb{N}^2$, les tribus $\mathcal{F}_{m\infty}$ et $\mathcal{F}_{\infty n}$ sont conditionnellement indépendantes sachant $\mathcal{F}_{mn}$. Cette hypothèse, à laquelle il est fait le plus souvent référence sous l'appellation (F4) introduite dans [4] , a été rebaptisée condition de commutation dans [8] exprimant en cela que les opérateurs d'espérances conditionnelles $E\{\,.\,|\mathcal{F}_{m\infty}\}$ et $E\{\,.\,|\mathcal{F}_{\infty n}\}$ commutent et ont pour produit $E\{\,.\,|\mathcal{F}_{mn}\}$. Sous cette condition, une martingale est un bi-martingale de sorte que toutes les notions de martingales considérées précédemment coïncident. Pour plus de généralité , cette condition ne sera pas postulée par la suite, sauf mention du contraire.

Dans un souci de simplicité, nous supposerons toutes nos martingales nulles sur les bords de $\mathbb{N}^2$, ce qui ne constitue pas une réelle restriction dans le problème de la convergence puisque l'on peut toujours remplacer un processus X par X' défini par $X'_{mn} = X_{mn} - X_{m0} - X_{0n} + X_{00}$.

Nous introduisons à présent quelques définitions supplémentaires afin de rappeler un théorème de convergence dû à R. Cairoli [2] .

Un ensemble prévisible est un sous-ensemble A de $\mathbb{N}^2 \times \Omega$ tel que $\{(m+1,n+1)\in A\} \in \mathcal{F}_{mn}$ pour tout (m,n) de $\mathbb{N}^2$, et, sur les bords de $\mathbb{N}^2$, $\{(m+1,n)\in A\}$, $\{(m,n+1)\in A\}$, $\{(m,n)\in A\} \in \mathcal{F}_{mn}$, $\{(m,n)\in A\}$ désignant la coupe de A suivant (m,n) . Si X est une martingale et A un ensemble prévisible, le processus $I_A.X$ défini, pour tout (m,n) de $\mathbb{N}^2$, par :

$$(I_A.X)_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} I_{\{(i,j)\in A\}}\, d_{ij}$$

où $d_{ij} = X_{ij} - X_{i-1,j} - X_{i,j-1} + X_{i-1,j-1}$, est également une martingale; c'est la transformée de Burkholder de X par A . Le théorème précité de R. Cairoli assure que sous l'hypothèse :

(I) pour tout ensemble prévisible A , $I_A.X$ est uniformément intégrable,

la martingale X converge p.s.. Enoncé à l'origine pour les bi-martingales, ce résultat subsiste, après un examen détaillé de la preuve, pour les martingales. Essentiellement, si X est une martingale uniformément intégrable, elle converge en moyenne quand m ou n ou les deux tendent vers l'infini et les limites respectives $X_{\infty n}$, $X_{m\infty}$ et X_∞ ferment la martingale. En vertu d'un simple argument de classe monotone, il est aisé de constater que $\{X_{m\infty}\ , m\in\mathbb{N}\}$ (resp. $\{X_{\infty n}\ , n\in\mathbb{N}\}$) est une martingale de la filtration $\{\mathcal{F}_{m\infty}\ , m\in\mathbb{N}\}$ (resp. $\{\mathcal{F}_{\infty n}\ , n\in\mathbb{N}\}$) , ce qui est bien entendu trivialement le cas si X est une bi-martingale. Forte de cette observation, la démonstration de R. Cairoli s'étend alors sans difficulté.

La condition (I) , sans pour autant exiger l'uniforme intégrabilité par rapport aux ensembles prévisibles, exprime en un certain sens que la variation quadratique $S(X) = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} d_{ij}^2\right)^{1/2}$ de X est intégrable. Plus précisément, si X est une martingale (1) (ou (2)) et si :

(II) $E\{S(X)\} < \infty$,

la famille de v.a. $(I_A.X)_{mn}$, (m,n) parcourant $\mathbb{N}^2$ et A les ensembles prévisibles, est uniformément intégrable, de sorte que X

vérifie (I) . Initialement démontré là encore pour des bi-martingales [7] , ce résultat reste vrai dans le cas de martingales (1) (ou (2)) grâce à des modifications évidentes dans les démonstrations de certaines inégalités de [6] .

Après ces quelques rappels, nous présentons le lemme de L. Sucheston ([10] , Proposition 1.1) (sous une forme simplifiée) qui présidera à nos observations ultérieures. Comme déjà noté, ce lemme généralise des théorèmes de convergence presque sûre d'espérances conditionnelles, tel par exemple celui de G.A. Hunt ([5] , p. 47) .

__Lemme__. Soit $\{Y_m , m\in \mathbb{N}\}$ une suite de v.a., majorées en valeur absolue par une v.a. intégrable Y , qui converge p.s. vers une v.a. Y_∞ et soit $\{\mathcal{G}_n , n\in \mathbb{N}\}$ une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$ de réunion $\mathcal{G}_\infty$. Alors, le processus à deux paramètres $\{ E\{Y_m | \mathcal{G}_n\} , (m,n)\in \mathbb{N}^2\}$ converge p.s. vers $E\{Y_\infty | \mathcal{G}_\infty\}$ quand m et n tendent vers l'infini.

__Démonstration__. Pour chaque entier p , on définit $Z_p = \sup_{m \geqslant p} | Y_m - Y_\infty |$. On a :

$$\limsup_{m,n \to \infty} |E\{Y_m | \mathcal{G}_n\} - E\{Y_\infty | \mathcal{G}_\infty\}|$$

$$\leq \limsup_{m,n \to \infty} |E\{Y_m - Y_\infty | \mathcal{G}_n\}| + \limsup_{n \to \infty} |E\{Y_\infty|\mathcal{G}_n\} - E\{Y_\infty|\mathcal{G}_\infty\}|$$

$$\leqslant \limsup_{n \to \infty} E\{Z_p | \mathcal{G}_n\} = E\{Z_p | \mathcal{G}_\infty\} .$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre p vers l'infini pour conclure à l'affirmation du lemme.

Comme le note L. sucheston, ce lemme contient, au moins sous l'hypothèse d'indépendance conditionnelle, le théorème de convergence des martingales de la classe LlogL de R. Cairoli [1] . En effet, si X est une martingale bornée dans $L\log L$, par uniforme intégrabilité il existe une v.a. X_∞ telle que $E\left\{|X_\infty| \log^+|X_\infty|\right\} < \infty$ fermant X à droite. Or, sous l'hypothèse de commutation, $X_{mn} = E\left\{X_\infty \mid \mathcal{F}_{mn}\right\} = E\left\{X_\infty \mid \mathcal{F}_{m\infty} \mid \mathcal{F}_{\infty n}\right\}$ et la conclusion s'ensuit.

Mais une analyse plus précise du lemme permet en fait d'énoncer le théorème suivant.

<u>Théorème</u>. Soit X une martingale (1) telle que :

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} \text{pour tout entier } n \text{ , la famille } \left\{X_{mn}\ ,\ m \in \mathbb{N}\right\} \text{ est} \\ \text{uniformément intégrable et } \sup\limits_{m \in \mathbb{N}} E\left\{\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |X_{mn}|\right\} < \infty \ . \end{cases}$$

Alors X converge p.s.. En échangeant les rôles de m et n dans (III) , la même conclusion a lieu pour les martingales (2) .

<u>Démonstration</u>. Fixons un entier n ; par uniforme intégrabilité, la martingale $\left\{X_{mn}\ ,\ \mathcal{F}_{m\infty}\ ,\ m \in \mathbb{N}\right\}$ converge p.s. et en moyenne vers une v.a. intégrable $X_{\infty n}$ telle que $X_{mn} = E\left\{X_{\infty n} \mid \mathcal{F}_{m\infty}\right\}$ pour tout m de $\mathbb{N}$. Comme déjà observé, $\left\{X_{\infty n}\ ,\ n \in \mathbb{N}\right\}$ est une martingale de la filtration $\left\{\mathcal{F}_{\infty n}\ ,\ n \in \mathbb{N}\right\}$, et, en vertu du lemme de Fatou :

$$E\left\{\sup_{n \in \mathbb{N}} |X_{\infty n}|\right\} \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} E\left\{\sup_{n \in \mathbb{N}} |X_{mn}|\right\} < \infty \ .$$

Le lemme s'applique à nouveau dans les mêmes conditions que précédemment.

Sans hypothèse de commutation cette fois, le théorème ci-dessus inclut celui de R. Cairoli [1] ainsi que le résultat de A. Millet et L. Sucheston [9] sur les martingales (1) puisque, par une simple application de l'inégalité de Doob, la bornitude dans $L\log L$ entraîne (III) . Il inclut également une condition suffisante de R.Cairoli

[3] , à savoir :

$$E\left\{\sup_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}|X_{mn}|\right\} < \infty ,$$

ainsi que l'hypothèse (II) faisant intervenir la variation quadratique de la martingale en vertu de l'inégalité de Davis [6] .

En conclusion, cette courte étude met plus particulièrement en évidence deux conditions suffisantes pour la convergence presque sûre des martingales à deux paramètres qu'il paraît a priori difficile de comparer, sauf peut-être au travers de (II) . La condition (III) , historiquement la première bien qu'apparaissant ici sous une forme un peu nouvelle, met en jeu à la fois une propriété d'intégrabilité d'un supremum sur l'un des indices et une propriété de martingale uniformément intégrable par rapport à une filtration unidimensionnelle suivant l'autre paramètre. La seconde, (I) , la plus intéressante à n'en pas douter, suppose une uniforme intégrabilité de la martingale ainsi que de toutes les martingales obtenues à partir de celle-ci par une simple pertubation des accroissements bidimensionnels la composant.

Tous mes remerciements à Messieurs les Professeurs R. Cairoli, H. Föllmer et L. Sucheston pour de profitables échanges sur cette question.

<u>Références</u>.

[1] R. Cairoli. Une inégalité pour martingales à indices multiples et ses applications. Séminaire de Probabilités IV . Lecture Notes in Math. 124 , 1-27 (1970) .

[2] R. Cairoli. Sur la convergence des martingales indexées par N x N . Séminaire de Probabilités XIII . Lecture Notes in Math. 721 , 162-173 (1979) .

[3] R. Cairoli. Eléments de la théorie des processus à deux indices. Cours de 3ème cycle, Université de Strasbourg (1979-80) .

[4] R. Cairoli, J.B. Walsh. Stochastic integrals in the plane. Acta Math. 134 , 111-183 (1975) .

[5] G.A. Hunt. Martingales et processus de Markov.Dunod,Paris (1966).

[6] M. Ledoux. Inégalités de Burkholder pour martingales indexées par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Processus aléatoires à deux indices. Lecture Notes in Math. 863 , 122-127 (1981) .

[7] M. Ledoux. Transformées de Burkholder et sommabilité de martingales à deux paramètres. A paraître in Math. Zeitsch. (1982) .

[8] P.A. Meyer. Théorie élémentaire des processus à deux indices. Processus aléatoires à deux indices. Lecture Notes in Math. 863 , 1-39 (1981) .

[9] A. Millet, L. Sucheston. On regularity of multiparameter amarts and martingales. Z. Wahr. verw. Geb. 56 , 21-45 (1981) .

[10] L. Sucheston. On one-parameter proofs of almost sure convergence of multiparameter processes. Preprint (1982) .

Comme le signale H. Föllmer (Almost sure convergence of spatial martingales for weakly interacting random fields, preprint (1982)), le lemme présenté ci-dessus apparaît déjà dans l'article de D. Blackwell et L. Dubins : Merging of opinions with increasing information (Theorem 2), Ann. Math. Statist. 33 , 882-886 (1962) .

Université Louis-Pasteur,
Département de Mathématique,
7, rue René-Descartes,
F-67084 Strasbourg Cédex.