RAJAE ABOULAÏCH
CHRISTOPHE STRICKER

Variation des processus mesurables

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 298-305
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__298_0>

VARIATION DES PROCESSUS MESURABLES

par Rajae ABOULAICH et Christophe STRICKER

ABSRACT : In the first part of this paper we prove that if X is a measurable process then its variation is a random variable. In the second part we study the case of progressive, optional or predictable processes. At the end we study some examples. In particular we prove that f(B) is of bounded variation, where B is a brownian motion, if and only if f is constant.

I) VARIATION D'UN PROCESSUS.

THEOREME I.I Soient $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espace probabilisé complet, $X=(X_t)_{t\geq 0}$ un processus mesurable à valeurs dans un espace de Banach séparable E. Alors la variation de X, notée $v(X)$, est une variable aléatoire.

La démonstration se fera en plusieurs étapes.

LEMME I.2 Soit X un processus mesurable à valeurs réelles. Alors le nombre de montées de X par-dessus l'intervalle $[a,b]$, noté $M(X,[a,b])$, est une variable aléatoire.

Démonstration. Posons $T_1=0$, $T_2=\inf\{t\geq 0,\ X_t<a\}$ etpour $i>1$ $T_{2i-1}=\inf\{t>T_{2i-2},\ X_t>b\}$, $T_{2i}=\inf\{t>T_{2i-1},\ X_t<a\}$. X étant un processus mesurable et $\mathcal{F}$ une tribu complète, les T_n sont des variables aléatoires, si bien que pour $m\geq 0$ l'ensemble suivant: $A_m=\{M(X,[a,b])=m\}=\{T_{2m+1}<\infty\ ,\ T_{2m+3}=\infty\}$ appartient à $\mathcal{F}$. Ainsi $M(X,[a,b])$ est une variable aléatoire et le lemme I.2 est établi.

Notons que $B=\{\omega,$ X n'admet pas de discontinuité oscillatoire$\}=\bigcap_{a,b}\{M(X,[a,b])<\infty\}$ où a,b parcourent les rationnels, est un ensemble mesurable d'après le lemme I.2. Ainsi le processus $Y=I_B X$ est aussi mesurable. Comme $v(X)$ est infinie sur B^c, nous allons étudier $v(Y)$ qui est égale à $v(X)$ sur B.

LEMME I.3. Il existe une suite de subdivisions aléatoires : $\mathcal{S}_n=\{U_1\leq U_2\leq\ldots\leq U_n\}$ telles que $v(Y)=\lim\limits_n \sum\limits_{p=1}^{n} |Y_{U_{i+1}} - Y_{U_i}|$.

Démonstration. L'ensemble des temps de discontinuités de Y est un ensemble mesurable à coupes dénombrables. Il existe une suite (R_n) de variables aléatoires positives telles que $\{t,\ Y_t\neq Y_{t-}$ ou $Y_t\neq Y_{t+}\}$ soit contenu dans $\bigcup\limits_n [R_n]$. On note $S_s=s$ la variable aléatoire constante égale à s pour tout s rationnel positif. Lorsque $V_1,\ldots,V_n$ est une suite finie de variables positives, on construit aisément une suite croissante $U_1,\ldots,U_n$ de variables aléatoires positives telles que $\bigcup\limits_{i=1}^{n}[V_i] = \bigcup\limits_{i=1}^{n}[U_i]$. En effet $U_1=\inf\limits_i V_i$, $U_2=\inf\{t,\ t\in \bigcup\limits_{i=1}^{n} ([V_i]-[U_1])\}\wedge\sup\limits_i V_i$, etc... Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites croissantes ainsi construites à partir d'un nombre fini de variables aléatoires de la forme R_k ou S_s. $\mathcal{S}$ est la réunion d'une suite $\mathcal{S}_n$ de subdivisions aléatoires de plus en plus fines. Comme pour presque tout ω de Ω , $\mathcal{S}(\omega)$ est partout dense dans R^+ et contient les points de discontinuités de Y, $v(Y)=\lim\limits_n \sum\limits_{U_i\in\mathcal{S}_n} |Y_{U_{i+1}}-Y_{U_i}|$ ce qui achève la démonstration du lemme I.3.

En combinant les lemmes I.2 et I.3 on voit que si X est un processus mesurable à valeurs réelles, $v(X)$ est une variable aléatoire. Lorsque E est un espace de Banach séparable, on choisit une suite (x_n) de points de E qui sont partout denses. Alors les fonctions continues q_n, définies par $q_n(x)=\|x_n-x\|$, séparent les points de E. Soit $B=\bigcup_n\{\omega,\exists t, q_n\circ X$ admet une discontinuité oscillatoire au point $t\}$. C'est un ensemble mesurable d'après le lemme I.2. Comme $v(X)\geq v(q_n o X)$, $v(X)=\infty$ sur B.

Etudions maintenant la variation de $Y=I_{B^c} X$.

Soit $C=\bigcup\limits_n\{t,(q_n oY)(t+)\neq(q_n oY)(t)$ ou $(q_n oY)(t-)\neq(q_n oY)(t)\}$. Comme pour tout n, $q_n oY$ a des limites à droite et à gauche, C est un ensemble mesurable à coupes dénombrables, donc contenu dans la réunion des graphes d'une suite dénombrable de variables aléatoires (T_k). En dehors des points T_k le processus Y est continu et on procède alors comme pour le lemme I.3.

2) QUELQUES PROPRIETES DE LA VARIATION.

On suppose maintenant que l'espace probabilisé complet $(\Omega,\mathcal{F},P)$ est muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$ vérifiant les conditions habituelles. On note $v(X,t)$ la variation de X sur l'intervalle $[0,t]$.

PROPOSITION 2.1. Si (X_t) est progressif (resp. optionnel, prévisible), alors $v(X,t)$ est aussi progressif (resp. optionnel, prévisible).

Démonstration. On note $Y_t=v(X,t)$. Le processus Y est croissant, à valeurs dans $[0,\infty]$. Lorsque X est progressif, le théorème I.1 montre que Y l'est aussi, si bien que (Y_{t+}) et (Y_{t-}) sont optionnels. Comme l'ensemble où ces deux processus diffèrent est optionnel et à coupes dénombrables, il existe une suite de temps d'arrêt (T_n) tels que Y soit continu en dehors de la réunion des graphes des T_n et que pour tout n la variable $I_{\{T_n<\infty\}}Y_{T_n-}$ soit finie. Ainsi l'ensemble progressif $A=\{t,X_t\neq X_{t-}$ et Y_{t-}fini$\}$ qui est contenu dans la réunion des graphes des T_n, est lui aussi égal à la réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt (R_n). En outre lorsque X est prévisible, A est prévisible et les temps d'arrêt (R_n) peuvent être choisis prévisibles. Or pour $t>0$ $Y_t=Y_{t-}+\sum_n|X_{R_n}-X_{R_n-}|I_{\{t\geqslant R_n\}}$. Donc si X est progressif (resp. optionnel, prévisible), Y est aussi progressif (resp. optionnel, prévisible).

REMARQUES 2.2. i) Lorsque X est à variation finie et $X_0=0$, on sait qu'il existe une décomposition unique de $X=X'-X''$ où X' et X" sont des processus croissants positifs vérifiant $v(X,t)=X'_t+X''_t$ pour tout $t\geqslant 0$. La proposition 2.1. montre que si X est progressif (resp. optionnel, prévisible), alors X' et X" le sont aussi. Lorsque X n'est pas à variation finie, on introduit le temps d'arrêt $T=\inf\{t,\ Y_{t-}$ infini$\}$ et on procède à la même décomposition sur $[0,T[$. Toutefois dans le cas prévisible il y a une petite difficulté car T n'est pas nécessairement prévisible. Mais le lemme 1.0 de [4] assure l'existence d'une suite de temps d'arrêt prévisibles (T_n) tendant en croissant vers T tels que pour tout n Y_{T_n-} soit fini et on remplace $[0,T[$ par la réunion des $[0,T_n]$ qui est prévisible. On peut démontrer des résultats analogues pour les parties continue et purement discontinue de Y.

ii) Rappelons que si X est une semimartingale, X est à variation finie si et seulement si sa partie continue est nulle et si pour tout $t \geq 0$, $\sum_{s \leq t} |X_s - X_{s-}|$ est finie (on pourra trouver une démonstration de ce résultat dans [4]).

3) FONCTION OPERANT SUR LES PROCESSUS A VARIATION FINIE.

PROPOSITION 3.1. Soit f une fonction de R^p dans R. Pour toute fonction à variation finie g de R dans R^p, fog est à variation finie si et seulement si f est localement lipschitzienne.

Avant de passer à la démonstration de cette proposition, nous allons établir les deux lemmes suivants :

LEMME 3.2. S'il existe deux suites (x_n) et (y_n) de R^p telles que $\|x_n - y_n\| < 2^{-n-1}$, $\|x_n - x_{n-1}\| < 2^{-n-1}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > 2^n \|x_n - y_n\|$, alors il existe une fonction g de R dans R^p à variation bornée telle que fog ne soit pas à variation bornée.

Démonstration. Supposons qu'il existe deux telles suites et soit p_n le nombre entier $\sup\{p \in \mathbf{N},\ p\|x_n - y_n\| < 2^{-n}\} + 1$. On a $2^{-n-1} \leq p_n \|x_n - y_n\| \leq 2^{-n+1}$. Soient (t_n) une suite strictement décroissante tendant vers 0 et g une fonction nulle en dehors de $[0, t_o]$, prenant les valeurs x_n ou y_n au point t_n, affine par morceaux et oscillant p_n fois sur $[t_{2n+1}, t_{2n}]$ entre x_n et y_n. La fonction g est à variation bornée mais la variation de fog sur $[t_{2n+1}, t_{2n}]$ est égale à $p_n |f(x_n) - f(y_n)|$, donc supérieure à 2^{-1}. Ainsi la variation de fog sur $[0, t_o]$ est infinie.

LEMME 3.3. Si f opère sur les fonctions à variation bornée, alors f est localement bornée.

Démonstration. Si f n'est pas localement bornée, il existe une suite bornée (u_n) telle que $|f(u_n)| > 2^n + |f(u_{n-1})|$. On peut en extraire une sous-suite (u_{n_k}) vérifiant de plus $\|u_{n_k} - u_{n_{k-1}}\| < 2^{-k-1}$. Les suites $x_k = u_{n_k}$ et $y_k = u_{n_{k-1}}$ satisfont aux hypothèses du lemme 3.2. Donc f n'opère pas sur les fonctions à varation bornée, ce qui est absurde.

4) PROCESSUS EQUIVALENTS.

Nous dirons que deux processus X et Y sont équivalents si pour toute suite (t_i) les variables $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots)$ et $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots)$ ont mêm loi.
Si X et Y sont deux processus mesurables équivalents, v(X) et v(Y) n'ont pas né-

cessairement la même loi . Il suffit de prendre $\Omega=[0,1]$, pour P la mesure de Lebesgue sur Ω, $X_t=1_{\{t\}}$ et $Y_t=0$ pour tout t. Ces deux processus ont même loi mais $v(X)=2$ et $v(Y)=0$. Toutefois lorsque X et Y sont deux processus continus à droite (ou à gauche) ayant même loi , v(X) et v(Y) sont deux variables aléatoires de même loi car il suffit de calculer la variation sur les rationnels par exemple.

PROPOSITION 4.1. Soient X et Y deux processus continus à droite, équivalents, à valeurs dans un espace de Banach séparable E et f une fonction borélienne de E dans R. Alors les variables aléatoires v(foX) et v(foY) ont même loi.

Démonstration. Les processus X et Y étant continus à droite et équivalents, ils déterminent la même loi sur l'espace canonique W des fonctions continues à droite de R^+ dans E. Si U est une fonction universellement mesurable sur W et si U[X] désigne la variable aléatoire $\omega \longrightarrow U(t \longrightarrow X_t(\omega))$, on voit que U[X] et U[Y] ont même loi. En particulier soit U la fonction définie par : U(w) est la variation de la fonction f(w). U est une fonction universellement mesurable sur W d'après le théorème I.I, si bien que U[X] et U[Y] ont même loi, ce qui démontre la proposition 4.1.

5) ETUDE D'UN EXEMPLE.

Soient B un mouvement brownien réel et V un processus continu, nul en 0, adapté, à variation finie. Dans ce paragraphe, nous étudions les fonctions f de R dans R telles que f(X) soit à variation bornée lorsque X=B+V. Rappelons d'abord le théorème 5.5 de [2].

THEOREME 5.1. Si B est un mouvement brownien réel et si f(B) est une semimartingale, alors f est la différence de deux fonctions convexes.

Lorsque f est continue, le théorème 5.1. et la formule d'Ito généralisée montrent que Y=f(B) est à variation finie si et seulement si f est une constante. En effet, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 5.2. Si f est la différence de deux fonctions convexes et si f(X) est à variation finie, alors f est constante sur $I=\{x,\ P[\exists t,\ X_t=x]>0\}$.

LEMME 5.3. Si (L_t^x) désigne la famille des temps locaux de X, pour tout intervalle ouvert non vide J inclus dans I, $\{x$ de J, $P[L_\infty^x>0]>0\}$ a une mesure de Lebesgue strictement positive.

Démonstration. Rappelons d'abord la formule de densité d'occupation des temps locaux. Pour toute fonction borélienne positive h et tout $t\geqslant 0$ on a l'égalité $\int_0^t h(X_s)ds=\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)L_t^x dx$. En prenant $h=I_J$ et $t=\infty$ on a $P[\int_0^\infty I_{\{X_s\in J\}}ds>0]>0$, c'est-à-dire $P[\int_J L_\infty^x dx>0]>0$. Donc $\{x$ de J, $P[L_\infty^x>0]>0\}$ a une mesure de Lebesgue strictement positive.

Démonstration de la proposition 5.2. D'après la formule d'Ito généralisée, il existe un processus continu à variation finie A tel que $f(X)=f_g'(x).B+A$. Comme $f(X)$ est à variation finie, sa partie martingale continue est nulle ; donc $\int_0^\infty (f_g'(X_s))^2 ds=0$. Grâce à la formule de densité d'occupation des temps locaux et grâce aussi au lemme 5.3. on en déduit que f_g' est nulle sur un ensemble partout dense dans I, donc $f_g'=0$ sur I et f est constante sur I.

PROPOSITION 5.4. Soit f une fonction borélienne. Si $f(X)$ est à variation finie, alors f est à variation finie sur I, sa partie continue f^c est localement constante sur $K=\{x,P[L_\infty^x>0]>0\}$ et la partie purement discontinue de f, notée f^d, ne charge pas $E=\{x,\ P[L_\infty^x L_\infty^{x-}>0]>0\}$.

LEMME 5.5. Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans R et g une fonction continue de R^+ dans R, nulle en 0. Si $f\circ g$ est à variation finie, f est à variation finie sur l'image de g.

Démonstration. Soit $I=\mathrm{Im}\ g$. Comme g est continue, I est un intervalle contenant $g(0)$. Considérons une subdivision $x_1<x_2<\ldots<x_p\leqslant 0<x_{p+1}<\ldots<x_n$ de I et posons pour $1\leqslant i\leqslant m$ $t_i=\inf\{t\geqslant 0,\ g(t)=x_i\}$. Alors $t_p<t_{p-1}<\ldots<t_1$ et $t_{p+1}<t_{p+2}<\ldots<t_n$. D'où l'inégalité : $\sum_{i=1}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|\leqslant 2v(f\circ g)$. Et par conséquent, la variation de f sur l'image de g est inférieure ou égale à $2v(f\circ g)$ qui est finie.

Démonstration de la proposition 5.4. Grâce au lemme 5.5. f est à variation finie sur I. Comme la somme des sauts de $f(X)$ converge absolument, $f^d(X)$ est à variation finie, donc aussi $f^c(X)$. En vertu de la continuité à droite des temps locaux, K est une réunion d'intervalles de la forme $[a,b[$ et si x appartient à K, il existe $t>0$ et $\varepsilon>0$

tel que $P[\forall y\in[x,x+\varepsilon],\ L_t^y>0]>0$. Or d'après [3], L_t^y est la limite p.s. de la suite $n^{-1}M(X^t,]y,y+n^{-1}[)$ lorsque n tend vers ∞ et L_t^{y-} est la limite p.s. de la suite $n^{-1}M(X^t,]y-n^{-1},y[)$, si bien que f^d ne charge pas E. En outre si $L_t^y>0$, le cardinal, noté Card, de $\{u,X_u=y\}$ est infini. Comme $v(f^c oX)=\int \mathrm{Card}\{u,f^c(X_u)=y\}dy$, la mesure de Lebesgue de $f^c(K)$ est nulle, c'est-à-dire f^c est localement constante sur K.

REMARQUES 5.6. i) On peut retrouver, grâce à la proposition 5.4., que f(B) est à variation finie si et seulement si f est constante. En effet, K=E=R lorsque X=B, si bien que f^d est nulle et f^c est constante lorsque f(B) est à variation finie.

ii)Toutefois, lorsque V n'est pas absolument continu, f(X) peut être à variation finie sans que f^d soit nulle. Si $T=\inf\{t,B_t=1\}$, $V_t=I_{\{T\leq t\}}\sup_{s\leq t}(1-B_s)^+$ et $f=aI_{]-\infty,1[}+bI_{[1,+\infty[}$, alors f(B+V) est un processus continu à droite, à variation finie.

iii) On peut se poser le problème plus général : quelles sont les fonctions f de R^n dans R telles que f(X) soit une semimartingale pour toute semimartingale à valeurs dans R^n ? Nous ne sommes pas parvenus à caractériser cette classe de fonctions mais le paragraphe 3 nous permet d'affirmer qu'une telle fonction est nécessairement localement lipschitzienne. En effet si A est un processus déterministe à variation finie à valeurs dans R^n, f(A) est une semimartingale déterministe; mais une semimartingale déterministe est aussi une semimartingale par rapport à sa filtration naturelle, si bien que f(A) est à variation finie. Donc f est localement lipschitzienne d'après la proposition 3.1.

REFERENCES

[1] ABOULAICH R. et STRICKER C. : Quelques compléments à l'étude des fonctions semimartingales. C.R.A.S. Paris, t. 294 (15 mars 1982), p. 373-375.

[2] CINLAR E., JACOD J., PROTTER P., SHARPE M.J. : Semimartingales and Markov processes. Z.W. 54, 161-219 (1980).

[3] EL KAROUI N. : Sur les montées des semimartingales. Le cas continu. Astérisque 52-53, Société Mathématique de France, (1978), 63-73.

[4] LENGLART E., LEPINGLE D. et PRATELLI M. : Présentation unifiée de certaines iné-

galités de la théorie des martingales. Séminaires de probabilités XIV, Lecture Notes in M., (1980), 26-48.

[5] YOEURP C. : Décomposition des martingales locales et formules exponentielles. Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in M.,(1976), 432-479.

R. ABOULAICH
Ecole Normale Supérieure de Souissi
Département de Mathématiques
B.P. 773
RABAT (Maroc)

C. STRICKER
Département de Mathématiques
Université de Besançon
Route de Gray
25030 BESANCON CEDEX