

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PIERRE VALLOIS

Le problème de Skorokhod sur \mathbb{R} : une approche avec le temps local

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 227-239

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__227_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LE PROBLEME DE SKOROKHOD SUR \mathbb{R} :
UNE APPROCHE AVEC LE TEMPS LOCAL

Pierre VALLOIS

1.- INTRODUCTION

$(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ désigne, dans tout ce travail, un mouvement brownien sur \mathbb{R} , issu de 0, $(L_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ son temps local en 0, $S_t \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{s \leq t} X_s$, et μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} . Lorsque μ vérifie $\int |x| d\mu(x) < +\infty$ et $\int_{\text{def}} x d\mu(x) = 0$, Azéma et Yor ont introduit ([1],[2]) le temps d'arrêt $T_\mu = \inf \{t \mid S_t \geq \Psi_\mu(X_t)\} = \inf \{t \mid \Phi_\mu(S_t) \geq X_t\}$, où Ψ_μ est la fonction "barycentre" de μ et Φ_μ son inverse continue à droite, et ont montré que X_{T_μ} a pour loi μ ; si de plus

$\int |x|^2 d\mu(x) < +\infty$, alors $E(T_\mu) = E(X_{T_\mu}^2) = \int x^2 d\mu(x)$.

Jeulin et Yor ([3]) ont étudié les temps d'arrêt $T^{h,k} \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{t \mid X_t^+ h(L_t) + X_t^- k(L_t) = 1\}$, ce qui, compte tenu de l'équivalence en loi des processus $(S_t - X_t, S_t)$ et $(|X_t|, L_t)$ généralise l'étude faite par Azéma et Yor.

La construction d'Azéma-Yor est très asymétrique : les grandes valeurs de (S_t) y jouent un rôle privilégié. L'objet de notre travail est de donner, dans le cadre de [3], une construction plus symétrique pour laquelle le résultat suivant sera vrai : lorsque $\mu(\{0\}) > 0$, S_{T_μ} est intégrable si et seulement si :

$\int_0^\infty \frac{\rho^-(x) - \rho^+(x)}{x} 1_{\{\rho^-(x) > \rho^+(x)\}} dx < +\infty$, et $\int |x| d\mu(x) < +\infty$ (avec

$$\rho^+(x) = \int_{[0,x]} t d\mu(t) \text{ et } \rho^-(x) = - \int_{[-x,0]} t d\mu(t), x > 0.$$

2.- RAPPELS DES RESULTATS DE L'ARTICLE DE JEULIN et YOR

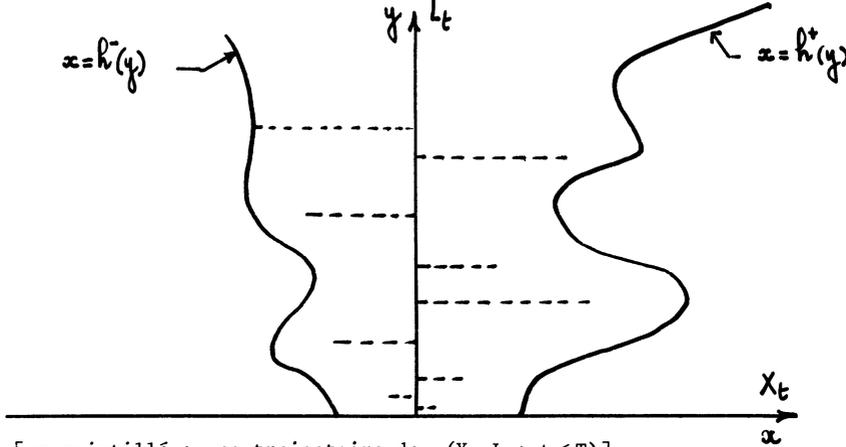
a) Soient h^+ et h^- deux fonctions boréliennes de \mathbb{R}_+ , à valeurs dans \mathbb{R}_+^* sur $[0, \delta[$ et nulles sur $[\delta, +\infty[$, $0 \leq \delta \leq +\infty$ et vérifiant :

$$(2.1) \quad \forall x, 0 \leq x < \delta, \quad \int_0^x \left(\frac{1}{h^+} + \frac{1}{h^-} \right) (u) \, du < +\infty,$$

$$(2.2) \quad \int_0^\infty \left(\frac{1}{h^+} + \frac{1}{h^-} \right) (u) \, du = +\infty \quad (\text{avec la convention } \frac{1}{0} = +\infty).$$

On note $T_x = \inf\{t \mid L_t = x\}$ pour $x \geq 0$, et $T = T_\delta \wedge (\inf\{t > 0; X_t^+ = h^+(L_t) \text{ ou } X_t^- = h^-(L_t)\})$ (avec la convention $\inf(\emptyset) = +\infty$).

b) On peut donner une traduction géométrique de T :



[en pointillé : une trajectoire de $(X_t, L_t; t \leq T)$]

c) La loi de X_T est donnée :

$$(2.3) \quad E(f(X_T)) = f(0) \exp -\frac{1}{2} \int_0^\delta \left(\frac{1}{h^+} + \frac{1}{h^-} \right) (t) dt + \\ + \frac{1}{2} \int_0^\delta dx \left\{ \frac{f(h^+(x))}{h^+(x)} + \frac{f(h^-(x))}{h^-(x)} \right\} \exp -\frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{h^+} + \frac{1}{h^-} \right) (u) du$$

pour toute fonction f borélienne, positive.

On dispose aussi de la loi du couple (X_T, T) :

$$(2.4) \quad E[f(X_T) \exp -\frac{p}{2} T] = f(0) \exp -\frac{1}{2} \int_0^\delta p(\coth(ph^+(x)) + \coth(ph^-(x))) dx \\ + \frac{p}{2} \int_0^\delta dx \left[\frac{f(h^+(x))}{\text{sh}(ph^+(x))} + \frac{f(h^-(x))}{\text{sh}(ph^-(x))} \right] \exp -\frac{p}{2} \int_0^x (\coth(ph^+(s)) + \coth(ph^-(s))) ds$$

pour toute fonction f borélienne positive et tout réel p .

3.- RESOLUTION DU PROBLEME DE SKOROKHOD

a) Soit μ^+ la restriction de μ à \mathbb{R}_+ . Si X_T a pour loi μ et si l'on fait les hypothèses simplificatrices suivantes : $\mu(0) = 0$, h^+ continue à droite et strictement croissante, en notant \tilde{h}^+ l'inverse continue à droite de h^+ et en prenant f fonction borélienne de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ , d'après (2.3), il existe

$$\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ telle que : } \int f(x) d\mu^+(x) = \int \frac{f(h^+(x))}{h^+(x)} \phi(x) dx = \\ = \int \frac{f(x)}{x} \phi(\tilde{h}^+(x)) d\tilde{h}^+(x) ; \text{ on en déduit que } \tilde{h}^+ \text{ vérifie l'équation} \\ d\tilde{h}^+(x) = \phi(\tilde{h}^+(x)) d \left[\int_{[0,x]} t d\mu^+(t) \right], \text{ ce qui met en évidence } \tilde{h}^+ \text{ (et non } h^+) \text{ et} \\ \text{suggère de poser } \tilde{h}^+(x) = F \left(\int_{[0,x]} t d\mu(t) \right).$$

NOTATIONS :

$$\cdot \quad \rho^+(t) = \int_{[0,t]} u d\mu(u) \quad ; \quad \rho^-(t) = - \int_{[-t,0]} u d\mu(u) \quad ; \quad a_0 = \rho^+(+\infty) \vee \rho^-(-\infty)$$

• si f est une fonction croissante et continue à droite, on note \tilde{f} son inverse continue à droite.

THEOREME 3.1 : Il existe δ , $0 \leq \delta \leq +\infty$ et une fonction F définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$, finie sur $[0, \delta[$, tels que si l'on pose $\tilde{h}^+ = \tilde{\rho}^+ \circ \tilde{F}$ et $\tilde{h}^- = \tilde{\rho}^- \circ \tilde{F}$ sur $[0, \delta[$, $h^+ = \tilde{h}^- \equiv 0$ sur $[\delta, +\infty[$ et $T \stackrel{\text{def}}{=} T_\delta \wedge (\inf \{t > 0 \mid X_t^+ = h^+(L_t) \text{ ou } X_t^- = h^-(L_t)\})$, alors X_T a pour loi μ .

Démonstration : On remarque que $\int_0^{\rho^+(\infty)} \frac{dt}{\tilde{\rho}^+(t)} = \mu(\mathbb{R}_+^*)$ et $\int_0^{\rho^-(\infty)} \frac{dt}{\tilde{\rho}^-(t)} = \mu(\mathbb{R}_-^*)$; on peut alors définir la fonction λ :

$$(3.2) \quad \begin{cases} \lambda(t) = 1 - \int_0^t \left(\frac{1}{\tilde{\rho}^+(s)} + \frac{1}{\tilde{\rho}^-(s)} \right) ds & \text{pour } 0 \leq t < a_0 \\ \lambda(t) = \mu(\{0\}) & \text{pour } a_0 \leq t < +\infty \end{cases}$$

λ est continue sur \mathbb{R}_+ .

Notons F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{2 du}{\lambda(u)} & \text{pour } x \in [0, a_0[\\ +\infty & \text{pour } x \in [a_0, +\infty[\text{ si } \mu(\{0\}) = 0 \\ \int_0^{a_0} \frac{2 du}{\lambda(u)} < +\infty & \text{pour } x \in [a_0, +\infty[\text{ si } \mu(\{0\}) > 0 \end{cases}$$

F est croissante sur $[0, +\infty]$, strictement croissante, continue et dérivable sur $[0, a_0[$.

On introduit les deux fonctions H^+ et H^- définies par :

$$(3.3) \quad H^+(x) = F(\rho^+(x)) \quad \text{et} \quad H^-(x) = F(\rho^-(x)) \quad \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}_+.$$

Nous pouvons à présent définir les deux fonctions h^+ et h^- :

$$(3.4) \quad * \text{ si } \mu(\{0\}) = 0, \text{ on note } h^+ = \tilde{H}^+ \text{ et } h^- = \tilde{H}^-, \text{ et on prend } \delta = +\infty.$$

$$* \text{ si } \mu(\{0\}) > 0, \text{ on pose } \delta = F(a_0) < +\infty, \quad h^+ = \tilde{H}^+ \text{ et } h^- = \tilde{H}^- \\ \text{sur } [0, \delta[, \text{ et } h^+ = h^- \equiv 0 \text{ sur } [\delta, +\infty[.$$

Pour montrer que X_T a pour loi μ , nous procédons en quatre lemmes. Le premier permet de simplifier les expressions de h^+ et h^- :

LEMME (3.5) : Pour tout x de \mathbb{R}_+ , on a : $h^+(x) = \tilde{\rho}^+(\tilde{F}(x))$ et $h^-(x) = \tilde{\rho}^-(\tilde{F}(x))$

Démonstration : Il suffit bien sûr d'établir la première formule. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

1) si $x < H^+(+\infty) = F(\rho^+(\infty)) \leq F(a_0)$, alors $x < F(a_0)$, et donc $x = F(\tilde{F}(x))$.

$$\text{Mais, } h^+(x) = \tilde{H}^+(x) = \inf \{t \mid H^+(t) > x\} = \inf \{t \mid F(\rho^+(t)) > F(\tilde{F}(x))\} = \\ = \inf \{t \mid \rho^+(t) > \tilde{F}(x)\},$$

d'où $h^+(x) = \tilde{\rho}^+(\tilde{F}(x))$.

2) si $x \geq H^+(+\infty)$, alors $\tilde{F}(x) \geq \rho^+(+\infty)$, et donc $\tilde{\rho}^+(\tilde{F}(x)) = +\infty = \tilde{H}^+(x) = h^+(x)$.

Le lemme (3.5) permet de montrer le résultat intermédiaire suivant :

LEMME (3.6) : Si x est un réel positif, $x < F(a_0)$, on pose

$$\beta(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{h^+(t)} + \frac{1}{h^-(t)} \right) dt, \text{ alors } \beta(x) = -2 \log [\lambda(\tilde{F}(x))].$$

Grâce à ce résultat, les fonctions h^+ et h^- vérifient les deux conditions (2.1) et (2.2) nécessaires pour la définition de T :

LEMME (3.7) : Pour tout x de \mathbb{R}_+ , $x < \delta$, on a $\int_0^x \left(\frac{1}{h^+} + \frac{1}{h^-} \right) (u) du < +\infty$ et $\int_0^\infty \left(\frac{1}{h^+} + \frac{1}{h^-} \right) (u) du = +\infty$.

Enfin, on a le :

LEMME (3.8) : Si f est borélienne positive, on a $E(f(X_T)) = \int f(x) d\mu(x)$.

Démonstration : Notons $I_1 = \frac{1}{2} \int_0^\delta \frac{f(h^+(t))}{h^+(t)} \exp - \frac{\beta(t)}{2} dt$ et

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^\delta \frac{f(-h^-(t))}{h^-(t)} \exp - \frac{\beta(t)}{2} dt$$

en utilisant successivement les lemmes (3.5), (3.6) et la définition de F :

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\rho^+(\infty)} \frac{f(\tilde{\rho}(t))}{\tilde{\rho}(t)} \lambda(t) dF(t) = \int_0^{\rho^+(\infty)} \frac{f(\tilde{\rho}(t))}{\tilde{\rho}(t)} dt = \int_{]0, +\infty[} f(t) d\mu(t)$$

On obtient de même $I_2 = \int_{]-\infty, 0[} f(t) d\mu(t)$, mais d'après (3.6), $\mu(\{0\})$ est donnée par $\mu(\{0\}) = \exp - \frac{1}{2} \int_0^\delta (\frac{1}{h^+} + \frac{1}{h^-})(t) dt$.

QUELQUES EXEMPLES

Exemple 1 : $\mu(dx) = \frac{1}{2\alpha} 1_{[-\alpha, \alpha]}(x) dx$, $\alpha > 0$; alors, $H^+(x) = H^-(x) = -x - \alpha \log(1 - \frac{x}{\alpha})$ (dans [1], les formules obtenues pour cette loi sont plus simples).

Exemple 2 : $\mu(dx) = \alpha \delta_a + (1 - \alpha) \delta_b$; $0 \leq \alpha \leq 1$, a et b réels, $a \leq b$. On distingue :

1) $a = b$; alors, $T = \inf \{t \mid X_t = a\}$;

2) $0 \leq a < b$; $0 < \alpha < 1$.

Si $0 < a < b$ et si $c = -2a \log(1 - \alpha)$, alors sur $[0, T_c[$, $T = \inf \{t \mid X_t = a\}$ et sur $[T_c, +\infty[$, $T = \inf \{t \mid X_t = b\}$.

Si $a = 0 < b$ et $c = -2b \log \alpha$, alors $T = \inf \{t \mid X_t = b\} \wedge T_c$.

3) $a < 0 < b$; $0 < \alpha < 1$

en notant $c = \begin{cases} \frac{2ab}{b-a} \log \left(\frac{\alpha a + (1-\alpha)b}{a} \right) & \text{si } \int x d\mu(x) \leq 0 \\ \frac{2ab}{b-a} \log \left(\frac{\alpha a + (1-\alpha)b}{b} \right) & \text{si } \int x d\mu(x) \geq 0 \end{cases}$

Si $\int x d\mu(x) \leq 0$, alors, sur $[0, T_c[$, $T = \inf \{t \mid X_t = a \text{ ou } X_t = b\}$ et sur $[T_c, +\infty[$, $T = \inf \{t \mid X_t = a\}$; si $\int x d\mu(x) > 0$, il suffit de changer a en b et b en a.

Exemple 3 : $\mu(dx) = A[1_{\{x \geq a\}} \frac{dx}{x^2} + 1_{\{x \leq -b\}} \frac{dx}{x^2}]$ avec $a > 0$, $b > 0$ et A réel vérifiant $A(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) = 1$. Alors

$$h^+(x) = a(1 + \frac{x}{2A}) \quad \text{et} \quad h^-(x) = b(1 + \frac{x}{2A}) .$$

Exemple 4 : $\mu(dx) = \frac{1}{a} \exp - \frac{2|x|}{a} dx$, alors $h^+(x) = h^-(x) = a\sqrt{x}$.

4.- QUELQUES QUESTIONS D'INTEGRABILITE

Rappelons que μ est une mesure de probabilité sur \mathbb{R} , et T le temps d'arrêt défini par le théorème (3.1).

a) Uniforme intégrabilité de $(X_{t \wedge T})_{t \in \mathbb{R}_+}$

On se propose ici de donner une condition nécessaire et suffisante portant sur μ pour que $(X_{t \wedge T})_{t \in \mathbb{R}_+}$ soit uniformément intégrable. Lorsque la loi μ est symétrique et ne charge pas 0, la condition cherchée est très simple à établir ; nous obtenons :

PROPOSITION (4.1) : Si μ est une loi symétrique : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\mu[0,x] = \mu[-x,0]$ et $\mu(\{0\}) = 0$; alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $(X_{t \wedge T})_{t \in \mathbb{R}_+}$ appartient à H^1 ;
- (ii) $(X_{t \wedge T})_{t \in \mathbb{R}_+}$ est uniformément intégrable ;
- (iii) $\int |x| d\mu(x) < +\infty$.

Démonstration : Il suffit bien sûr de prouver iii) \implies ii). Mais si $\int |x| d\mu(x) < +\infty$, μ étant symétrique, on a $\rho^+(\infty) = \rho^-(\infty)$ et $h^+ = h^-$; de plus, $\mu(\{0\}) = 0$, donc $\forall s, s \leq T$, $|X_s| \leq h^+(L_s) \leq h^+(L_T) = |X_T|$; X_T admettant pour loi μ et $\int |x| d\mu(x) < +\infty$, alors i) est réalisé.

Si μ n'est pas symétrique, on procède par approximation ; d'après la définition de T , on a le :

LEMME (4.2) : Si μ est une mesure à support compact vérifiant $\int x d\mu(x) = 0$, alors $(X_{t \wedge T})_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une martingale bornée.

Remarque (4.3) Si μ vérifie $\int |x| d\mu(x) < +\infty$ et $\int x d\mu(x) = 0$, et μ n'est pas à support compact, par exemple sur \mathbb{R}_+ , alors pour tout n de \mathbb{N} , il existe ε_n , réel positif tel que $\rho^-(\varepsilon_{n-}) \leq \rho^+(n) \leq \rho^-(\varepsilon_n)$.

Définissons à présent une suite de mesures μ_n qui approxime μ :

LEMME (4.4) : Soit μ vérifiant $\int |x| d\mu(x) < +\infty$ et $\int x d\mu(x) = 0$. Si μ est à support compact, on pose $\mu_n = \mu$ pour tout n de \mathbb{N}^* , sinon on peut supposer par exemple que $\mu|_{\mathbb{R}_+^n}$ n'est pas à support compact. On définit K_n^+ et K_n^- par :

$$K_n^+(x) = h^+(x) \text{ et } K_n^-(x) = h^-(x) \text{ pour } x \in [0, H^+(n-)] , K_n^+(x) = K_n^-(x) = 0$$

pour $x \in [H^+(n-), +\infty[$; on note $\delta_n = H^+(n-)$ (les fonctions h^+ , h^- , H^+ étant relatives à μ). Alors :

- 1°. les fonctions K_n^+ et K_n^- et le réel δ_n vérifient les conditions (2.1) et (2.2). On note T_n le temps d'arrêt défini par $T_n = \inf(T, T_{\delta_n})$ (il est associé à K_n^+ et K_n^-) et μ_n la loi de X_{T_n} .
- 2°. $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de temps d'arrêt qui converge vers T .
- 3°. pour tout n de \mathbb{N}^* , μ_n est à support compact et $\int x d\mu_n(x) = 0$.

Grâce au lemme précédent, on a, à l'aide du principe de démonstration du théorème (3.4) de [1] :

PROPOSITION (4.5) : La martingale $(X_{t \wedge T})_{t \in \mathbb{R}_+}$ est uniformément intégrable si et seulement si : $\int |x| d\mu(x) < +\infty$ et $\int x d\mu(x) = 0$.

PROPOSITION (4.6) : Si μ vérifie les conditions $\int |x| d\mu(x) < +\infty$ et $\int x d\mu(x) = 0$, alors $E(X_T^2) = E(T)$.

Démonstration : Il suffit en effet de remarquer que, si f est borélienne, $f(0) = 0$, on a : $E(f(X_{T_n})) = E(f(X_T)1_{\{L_T < \delta_n\}})$ ou (T_n) est défini en (4.4), 1°, et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(f(X_{T_n})) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f(x) d\mu_n(x) = \int f(x) d\mu(x).$$

b) Appartenance de $(X_{t \wedge T})_{t \in \mathbb{R}_+}$ à H^1

Soit S_t le processus défini par $S_t = \sup_{s \leq t} X_s$. Afin de mettre en évidence le caractère symétrique de notre étude, donnons une condition nécessaire et suffisante portant sur μ pour que S_T soit intégrable :

PROPOSITION (4.7) : Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $E(S_T) < +\infty$;

$$\text{ii) } \begin{cases} E(X_T^-) \leq E(X_T^+) \text{ et } E[(X_T^+ \log^+(X_T^+)] < +\infty \text{ si } \mu(\{0\}) > 0 \\ E(X_T^+) + \int_0^\infty \left[\frac{\rho^-(x) - \rho^+(x)}{x} \right] 1_{\{\rho^-(x) \leq \rho^+(x)\}} dx < +\infty \text{ si } \mu(\{0\}) = 0. \end{cases}$$

Démonstration : D'après [3], si $R \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{s \mid s \leq T, X_s = 0\}$, on remarque que : $S_T = X_T^+$ sur $\{X_T^+ > 0\}$, $S_T = S_R$ sur $\{X_T^+ < 0\}$ et $S_T = S_{T_\delta}$ sur $\{X_T^+ = 0\}$ et on peut alors expliciter la loi de S_T :

$$(4.8) \quad E[f(S_T)] = \int_0^\infty f(x) d\mu(x) + \frac{1}{2} \int_0^\delta \frac{1}{h^-(u)} E[f(S_{T_u})] 1_{\{T_u \leq T\}} du + E[f(S_{T_\delta})] 1_{\{T_\delta = T\}},$$

pour toute fonction f borélienne de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ .

Introduisons les notations suivantes :

$$(4.9) \quad \alpha(u, x) = P(S_{T_u} < x, T_u \leq T) \text{ avec } u \in \overline{\mathbb{R}_+}, u \leq \delta, x \in \mathbb{R}_+$$

$$g_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^\delta \frac{1}{h^-(u)} [\lambda(\tilde{F}(u)) - \alpha(u, x)] dx$$

en appliquant la formule (4.8) avec $f = 1_{[x, +\infty[}$, puis le lemme (3.6), il vient :

$$(4.10) \quad P(S_T \geq x) = \mu[x, +\infty[+ g_1(x) + \mu(\{0\}) - \alpha(\delta, x).$$

Remarque : Si $E(S_T) < +\infty$, alors $E(X_T^-) = \rho^-(\infty) \leq E(X_T^+) = \rho^+(\infty) < +\infty$, si $E(S_T) < +\infty$. Sachant que $X_t^+ - \frac{1}{2} L_t$ est une martingale locale continue, et que de plus : $X_t^+ \leq S_T$ pour tout $t \in [0, T]$, et $E(S_T) < +\infty$, il vient, en localisant :

$$E(X_T^+) = \frac{1}{2} E(L_T) \leq E(S_T) < +\infty.$$

Mais en raisonnant cette fois avec $X_t^- - \frac{1}{2} L_t$, en localisant à nouveau, et en appliquant le lemme de Fatou, on obtient : $E(X_T^-) \leq \frac{1}{2} E(L_T) = E(X_T^+)$.

On supposera dans la suite de la démonstration $\rho^-(\infty) \leq \rho^+(\infty) < +\infty$.

Le lemme suivant nous donne l'expression de $\alpha(u, x)$:

LEMME (4.11) : Pour tout $u, u \in \overline{\mathbb{R}_+}$, $u \leq \delta$, et tout x de \mathbb{R}_+ , on a :

$$\alpha(u, x) = P(S_{T_u} < x, T_u \leq T) = \exp - \frac{1}{2} \int_0^u \left(\frac{1}{h^+(t) \wedge x} + \frac{1}{h^-(t)} \right) dt$$

Démonstration : Soit $u \in [0, \delta]$; notons $h_1^+(t) = h^+(t) \wedge x$ et $h_1^-(t) = h^-(t)$ pour $t < u$ et $h_1^+(t) = h_1^-(t) = 0$ pour $t \geq u$. (les fonctions h^+ et h^- étant relatives à μ). On introduit le temps d'arrêt $T_1' = \inf \{t \mid t \geq 0, X_t^+ = h_1^+(L_T)\}$ ou $X_t^- = h_1^-(L_T)\} \wedge T_u$. Alors, $\{S_{T_u} < x\} \cap \{T_u \leq T\} = \{X_{T_1'} = 0\}$. Il suffit maintenant d'appliquer la formule (4.1) de [3] et (4.9).

On constate que pour $u \in [0, H^+(x) \wedge H^-(x)[$, on a : $h^-(u) \leq x$, $h^+(u) \leq x$ et $\alpha(u, x) = \lambda(\tilde{F}(u))$; en utilisant le lemme (3.5), on peut modifier g_1 :

$$(4.12) \quad g_1(x) = \int_{\rho^+(x)}^a \frac{1}{\tilde{\rho}^+(t)} (1 - \exp - b(t, x)) dt, \quad \text{avec}$$

$$b(t, x) = 1_{\{t \geq \rho^+(x)\}} \int_{\rho^+(x)}^t \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tilde{\rho}^+(s)} \right) \frac{ds}{\lambda(s)} .$$

Remarque (4.13) : Puisque $\rho^-(\infty) \leq \rho^+(\infty) < +\infty$, $\int_{\rho^+(x)}^a \frac{1}{\tilde{\rho}^+(t)} dt = \mu[x, +\infty[$ et $\int_{\rho^-(x)}^a \frac{1}{\tilde{\rho}^-(t)} dt = \mu] -\infty, x]$ sont intégrables par rapport à $(1_{\mathbb{R}_+} dx)$.

LEMME (4.14) : Soit ϕ la fonction définie par : $\phi(x) = \frac{a_0 - \rho^+(x)}{x}$ si $\mu(\{0\}) > 0$, $\phi(x) = \frac{[\rho^-(x) - \rho^+(x)] \vee 0}{x}$ si $\mu(\{0\}) = 0$. Alors, il existe $c, 0 < c \leq \frac{1}{2}$, tel que pour tout $x, x \geq 1$:

$$c \phi(x) - \frac{3}{2} P(|X_T| \geq x) \leq P(S_T \geq x) \leq \phi(x) + 2 P(|X_T| \geq x)$$

Démonstration du lemme (4.14) : D'après (4.12), (4.13), et en notant

$$g_2(x) = \int_{\rho^+(x)}^a \left(\frac{1}{\tilde{\rho}^+(t)} + \frac{1}{\tilde{\rho}^-(t)} \right) (1 - \exp - b(t, x)) dt, \text{ on a :}$$

$$(4.15) \quad g_2(x) - \mu[x, +\infty[\leq g_1(x) \leq g_2(x) .$$

En intégrant g_2 par parties avec $\lambda'(t) = -\left(\frac{1}{\tilde{\rho}^+(t)} + \frac{1}{\tilde{\rho}^-(t)}\right)$ et en remarquant que $\lambda(a_0) \exp - b(a_0, x) = \alpha(\delta, x)$ et $\mu(\{0\}) = \lambda(a_0)$, il vient :

$$g_2(x) + \mu(\{0\}) - \alpha(\delta, x) = \int_{\rho^+(x)}^a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tilde{\rho}^+(t)} \right) \exp - b(t, x) dt.$$

Si l'on utilise (4.10), (4.15) et (4.13), on obtient les inégalités :

$$(4.16) \quad g_3(x) - \mu[x, +\infty[\leq P(S_T \geq x) \leq g_3(x) + \mu[x, +\infty[, \text{ avec :}$$

$$(4.17) \quad g_3(x) = \frac{1}{x} \int_{\rho^+(x)}^a \exp - b(t, x) dt .$$

Nous distinguerons deux cas :

$$1^\circ. - \underline{\mu(\{0\})} > 0$$

Mais $\lambda(t) \geq \mu(\{0\})$; pour $x \geq 1$ et $t \geq \rho^+(x)$, il suffit alors de remarquer :

$$b(t, x) \leq \int_{\rho^+(x)}^t \frac{1}{x} \cdot \frac{ds}{\lambda(s)} \leq \frac{1}{x\mu(\{0\})} (t - \rho^+(x)) \leq \frac{a_0}{\mu(\{0\})} < +\infty$$

$$2^\circ. - \underline{\mu(\{0\})} = 0$$

Soit $t, t \geq \rho^+(x) \vee \rho^-(x)$, $\lambda_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mu]^{-\infty, -x}] + \int_t^a \frac{ds}{\tilde{\rho}^+(s)}$, on a successive-

ment : $\lambda(t) \leq \lambda_1(t)$ et $b(t, x) \geq \int_{\rho^+(x) \vee \rho^-(x)}^t \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tilde{\rho}^+(s)}\right) \frac{ds}{\lambda_1(s)}$, on en déduit

$$\frac{1}{x} \int_{\rho^+(x) \vee \rho^-(x)}^a \exp - b(t, x) dt \leq \lambda_1(\rho^+(x) \vee \rho^-(x)) \left[1 - \exp - \frac{1}{x} \int_{\rho^+(x) \vee \rho^-(x)}^a \frac{ds}{\lambda_1(s)}\right]$$

$$\leq \lambda_1(\rho^+(x) \vee \rho^-(x)) ;$$

en utilisant de plus la remarque (4.13), il vient :

$$(4.18) \quad g_4(x) \leq g_3(x) \leq g_4(x) + \mu]^{-\infty, -x}] + \mu[x, +\infty[, \text{ avec}$$

$$(4.19) \quad g_4(x) = 1_{\{\rho^+(x) < \rho^-(x)\}} \int_{\rho^+(x)}^{\rho^-(x)} \exp - b(t, x) dt .$$

Mais la définition de g_4 prouve :

$$(4.20) \quad g_4(x) \leq \frac{1}{x} 1_{\{\rho^+(x) < \rho^-(x)\}} (\rho^-(x) - \rho^+(x)) = \phi(x).$$

Soit $t \in [\rho^+(x), \rho^-(x)]$, alors $\tilde{\rho}^-(t) \leq x$, $\lambda(t) \geq \lambda_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(\rho^-(x)) +$

$$+ \int_t^{\rho^-(x)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\tilde{\rho}^+(s)}\right) ds \text{ et } b(t, x) \leq \int_{\rho^+(x)}^t \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tilde{\rho}^+(t)}\right) \frac{dt}{\lambda_2(t)} = \frac{2}{x} \int_{\rho^+(x)}^t \frac{ds}{\lambda_2(s)}$$

$- \log \left[\frac{\lambda_2(\rho^+(x))}{\lambda_2(t)} \right]$; en intégrant, on obtient :

$$(4.21) \quad \frac{1}{x} \int_{\rho^+(x)}^{\rho^-(x)} \exp - b(t, x) dt \geq \frac{\lambda_2(\rho^+(x))}{2} \left(1 - \exp - \frac{2}{x} \int_{\rho^+(x)}^{\rho^-(x)} \frac{ds}{\lambda_2(s)} \right) .$$

$$\text{Mais } \log(\lambda_2(\rho^+(x))) - \log(\lambda_2(\rho^-(x))) - \frac{2}{x} \int_{\rho^+(x)}^{\rho^-(x)} \frac{ds}{\lambda_2(s)} = \int_{\rho^+(x)}^{\rho^-(x)} \left(\frac{1}{\tilde{\rho}^+(s)} - \frac{1}{x} \right) \frac{ds}{\lambda_2(s)} \leq 0,$$

donc :

$$(4.22) \quad \lambda_2(\rho^+(x)) \exp - \left(\frac{2}{x} \int_{\rho^+(x)}^{\rho^-(x)} \frac{ds}{\lambda_2(s)} \right) \leq \lambda_2(\rho^-(x)) = \lambda(\rho^-(x)) \leq \mu[x, +\infty[+ \mu]-\infty, -x] .$$

En remarquant que $\lambda_2(\rho^+(x)) \geq \frac{1}{x}(\rho^-(x) - \rho^+(x)) = \phi(x)$, et en utilisant (4.22), (4.21) et (4.19), on montre $g_4(x) \geq \frac{1}{2} [\phi(x) - \mu(y \mid |y| \geq x)]$. Grâce à (4.18), (4.20) et (4.16), il vient :

$$\frac{1}{2} \phi(x) - \frac{3}{2} P(|X_T| \geq x) \leq P(S_T \geq x) \leq \phi(x) + 2 P(|X_T| \geq x) ,$$

ce qui achève les démonstrations du lemme (4.14), et de la proposition (4.7), en utilisant (4.14) et à nouveau (4.13).

L'énoncé suivant donne une caractérisation de l'appartenance à H^1 de $(X_{t \wedge T})_{t \in \mathbb{R}_+}$:

PROPOSITION (4.23) : La martingale $(X_{t \wedge T})_{t \in \mathbb{R}_+}$ appartient à H^1 si et seulement si :

- X_T appartient à $L \log L$ lorsque $P(X_T = 0) > 0$
- $E|X_T| + \int_0^\infty \frac{1}{x} |E[X_T, |X_T| \geq x]| dx < +\infty$ lorsque $P(X_T = 0) = 0$.

Remarque (4.24) : Lorsque $\mu(\{0\}) = 0$ et μ symétrique, en notant $X_T^* = \sup_{s \leq T} |X_s|$, on a l'égalité : $X_T^* = |X_T|$; il est ainsi clair que $(X_{t \wedge T})_{t \in \mathbb{R}_+}$ appartient à H^1 si et seulement si $\int |t| d\mu(t) < +\infty$.

5.- CALCUL DE LA LOI DU COUPLE (X_T, T) .

Etudions d'abord le cas symétrique.

PROPOSITION (5.1) : Si μ est une mesure de probabilité symétrique ($\mu[0, x] = \mu[-x, 0] \quad \forall x > 0$) sur \mathbb{R} , ne chargeant pas les points, on a :

$$E [f(X_T) \exp - \frac{p^2}{2} T] = \int_0^\infty \left\{ (f(x) + f(-x)) \frac{px}{\text{sh}(px)} \frac{1}{(1-2\mu[0,x])} \right. \\ \left. \exp - 2p \int_0^x \frac{u \coth pu}{1-2\mu[0,u]} d\mu(u) \right\} d\mu(x),$$

pour toute fonction f borélienne de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ et tout réel p , $p \neq 0$.

Pour l'étude du cas général, on utilisera le :

LEMME (5.2) : Si f_1 et g_1 sont deux fonctions boréliennes de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ que l'on prolonge à \mathbb{R}_+ en posant $f_1(+\infty) = g_1(+\infty) = 0$, alors :

$$\int_0^a f_1(\tilde{\rho}^+(t)) g_1(t) dt = \int_{\mathbb{R}_+^*} f_1(u) u g_1^+(u) d\mu(u) \quad \text{et} \\ \int_0^a f_1(\tilde{\rho}^-(t)) g_1(t) dt = - \int_{\mathbb{R}_-^*} f_1(-u) u g_1^-(u) d\mu(u)$$

$$\text{avec } g_1^+(t) = g_1(\rho^+(t)) \text{ si } t \geq 0 \text{ et } \mu(\{t\}) = 0 ; g_1^+(t) = \frac{1}{\Delta \rho^+(t)} \int_{\rho^+(t-)}^{\rho^+(t)} g_1(u) du \text{ si}$$

$$t \geq 0, \mu(\{t\}) > 0$$

$$g_1^-(t) = g_1(\rho^-(-t)) \text{ si } t \leq 0 \text{ et } \mu(\{t\}) = 0 ; g_1^-(t) = \frac{1}{\Delta \rho^-(-t)} \int_{\rho^-((-t)-)}^{\rho^-(-t)} g_1(u) du \text{ si}$$

$$t \leq 0 \text{ et } \mu(\{t\}) > 0 .$$

On peut alors énoncer le résultat général :

$$\text{PROPOSITION (5.3) : Notons } a_p(x) = \frac{1}{\lambda(x)} \exp[-p \int_0^x \{ \coth(p\tilde{\rho}^+(t)) +$$

$+ \coth(p\tilde{\rho}^-(t)) \} \frac{dt}{\lambda(t)}]$ où $p \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq x$. Pour toute fonction borélienne positive de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+ , et tout réel p non nul, on a :

$$E[f(X_T) \exp(-\frac{p^2}{2} T)] = f(0) \exp[-p \int_0^a \{ \coth(p\tilde{\rho}^+(t)) + \coth(p\tilde{\rho}^-(t)) \} \frac{dt}{\lambda(t)}] + \\ + \int_{\mathbb{R}^*} f(u) \frac{pu}{\text{sh}(pu)} \bar{a}_p(u) d\mu(u)$$

$$\text{avec } \bar{a}_p(u) = a_p^+(u) \text{ si } u > 0 \text{ et } \bar{a}_p(u) = a_p^-(u) \text{ si } u < 0 \text{ et } \coth(p\infty) = 0.$$

Dans le cas où μ est diffuse, on a le :

COROLLAIRE (5.4) : Si μ ne charge pas les points, on a :

$$E[f(X_T) \exp(-\frac{p^2}{2} T)] = \int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{pu}{\operatorname{sh} pu} \bar{a}_p(u) d\mu(u) ,$$

pour toute fonction f borélienne de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+ et tout réel p, non nul, avec $\bar{a}_p(u) = a_p(\rho^+(u))$ si $u > 0$ et $\bar{a}_p(u) = a_p(\rho^-(-u))$ si $u < 0$, a_p étant la fonction définie en (5.3).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. AZEMA et M. YOR : Une solution simple au problème de Skorokhod. Séminaire de probabilités XIII, Lecture Notes in Math., 721 Springer (1979).
- [2] J. AZEMA et M. YOR : Le problème de Skorokhod : compléments à l'exposé précédent. Même référence.
- [3] T. JEULIN et M. YOR : Sur les distributions de certaines fonctionnelles du mouvement brownien. Séminaire de probabilités XV, Lecture Notes, 850, Springer (1981).

Pierre VALLÖIS
3, rue Victor Hugo
92700 COLOMBES.