SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL ÉMERY

Note sur l'exposé précédent

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 185-186

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__185_0>

NOTE SUR L'EXPOSÉ PRECEDENT

par M. Emery

Dans l'exposé qui précède, He, Yan et Zheng étudient la convergence parfaite d'une semimartingale continue vectorielle $X=X_0+M+A$, i.e. la convergence séparée des parties martingales et des variations totales. Nous allons montrer ici que

> L'ensemble sur lequel X converge parfaitement est le plus grand ensemble (aux ensembles négligeables près) sur lequel X est une semimartingale jusqu'à l'infini.

Cette remarque donne encore plus d'intérêt aux conditions suffisantes de convergence parfaite : elle montre en effet que, sur l'ensemble de convergence parfaite, toutes les constructions usuelles de la théorie des semimartingales (solutions d'équations différentielles stochastiques...[1]) peuvent être prolongées jusqu'à l'infini. Elle montre aussi que cet ensemble n'est pas modifié si l'on remplace la loi par une loi équivalente. Elle montre que la convergence parfaite est préservée par composition avec les applications de classe C^2, qu'elle a un sens pour les semimartingales continues à valeurs dans les variétés...

Démonstration. Pour simplifier, nous traiterons le cas des semimartingales continues $X=X_0+M+A$ à valeurs réelles, sur l'espace $(\Omega,F,\underline{F}_t,P)$

1) D'après le théorème de convexité de Jacod, il existe un plus grand ensemble U (défini à un ensemble négligeable près) tel que X soit une semimartingale jusqu'à l'infini pour la mesure $I_U P$. Sur cet ensemble, toute intégrale stochastique prévisible $H\cdot X$ (H borné) converge p.s., et le crochet $[X,X]$ converge p.s..

Comme $[X,X]=[M,M]$, on voit que $[M,M]$ converge, donc aussi $H^2\cdot[M,M]$. Donc la martingale locale $H\cdot M$ converge p.s. sur U . Par différence, $H\cdot A$ converge p.s..

Prenant $H=1$, on voit que M converge p.s. sur U ; prenant pour H une densité de $|dA|$ par rapport à dA, on voit que la variation totale $\int_0^t |dA_s|$ converge p.s. sur U. Finalement, X converge parfaitement sur U .

2) Soit V l'ensemble de convergence parfaite de X ; les temps d'arrêt

$$T_n = \inf\{\ t\ :\ |M_t|>n \text{ ou } \int_0^t |dA_s|>n\ \}$$

tendent vers $+\infty$ stationnairement sur V. Ils tendent donc stationnairement vers $+\infty$ p.s. pour la mesure $Q=I_V P$. D'autre part, X^{T_n} est une

1. En particulier, on peut établir ainsi la convergence de développements d'une semimartingale à valeurs dans une variété V, relativement à des connexions arbitraires sur V.

semimartingale jusqu'à l'infini sous la loi P, donc aussi sous la mesure Q . Finalement, X est une semimartingale jusqu'à l'infini sous la mesure Q, et l'on a $V\subset U$ p.s. ; comme la partie 1) a montré que $U\subset V$, la propriété annoncée est prouvée.