Sheng-Wu He
Jia-An Yan
Wei-An Zheng

Sur la convergence des semimartingales continues dans $\mathbb{R}^n$ et des martingales dans une variété

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 179-184
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__179_0>

SUR LA CONVERGENCE DES SEMIMARTINGALES CONTINUES DANS $\mathbb{R}^n$

ET DES MARTINGALES DANS UNE VARIETE

par S.W. He , J.A. Yan*, W.A. Zheng

Soit $X_t = (X_t^1,\dots,X_t^n)$ une semimartingale continue à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et du type suivant :

$$(*) \qquad X_t^i = X_0^i + M_t^i + A_t^i = X_0^i + M_t^i + \Sigma_{j,k} \int_0^t H_{jk}^i(s)d\langle M^j,M^k\rangle_s$$

où les M^i sont des martingales locales continues, et les H_{jk}^i sont des processus prévisibles. Tout récemment, l'un d'entre nous a montré dans [3] que sur l'ensemble

$$\bigcap_{i,j,k} \{ \limsup_t |H_{jk}^i(t)| < \infty \}$$

la convergence de X_t ($t\to\infty$) entraîne p.s. la convergence séparée des parties martingales M_t^i et des variations totales $\int_0^t |dA_s^i|$. Cela permet de montrer que le crochet d'une martingale à valeurs dans une variété riemannienne V admet une limite finie là où la martingale converge.

Nous nous proposons dans cette note de préciser le résultat de convergence, pour des semimartingales qui ne sont pas nécessairement du type (*). Nous donnerons aussi une application géométrique : contrairement au cas de $\mathbb{R}^n$, où toute martingale bornée est p.s. convergente, une martingale à valeurs dans V dont les trajectoires sont contenues dans un compact K de V n'est pas nécessairement convergente (il suffit de penser au cas où V elle même est compacte : le mouvement brownien de V est récurrent). Mais nous montrerons que tout point de V possède un voisinage K pour lequel la propriété est vraie.

NOTATIONS. La décomposition canonique d'une semimartingale continue réelle X est notée $X=X_0+M+A$ (même notation avec des indices pour le cas de $\mathbb{R}^n$). Nous posons $[\![A]\!]_t = \int_0^t |dA_s|$, $\overset{+}{A} = \frac{1}{2}([\![A]\!]+A)$, $\bar{A} = \frac{1}{2}([\![A]\!]-A)$.

Nous adopterons dans cette note une terminologie commode en disant que X <u>converge</u> en $\omega\in\Omega$ si $\lim_t X_t(\omega)$ existe et est finie, et que X <u>converge parfaitement</u> en ω si $\lim_t M_t(\omega)$ et $\lim_t [\![A]\!]_t(\omega)$ existent et sont finies. L'ensemble de convergence parfaite dépend de la décomposition choisie, et n'est défini qu'à un ensemble de mesure nulle près.

(*) Boursier de la Alexander von Humboldt Stiftung à Heidelberg (RFA).

Ces définitions s'étendent évidemment aux semimartingales à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

REMARQUE. Il est bien connu qu'il existe des semimartingales convergentes sans être parfaitement convergentes, mais en voici un exemple particulièrement clair. On prend $X_t = B_t - C_t$ ($t \geq 1$), où B_t est le mouvement brownien et $C_t = e^t \int_{t-e^{-t}}^{t} B_s ds$. Alors $X_t \to 0$ p.s., mais B et C ne convergent pas.

RESULTATS SUR LES SEMIMARTINGALES REELLES

LEMME 1 . La semimartingale X est parfaitement convergente sur l'ensemble

$$U = \{ \liminf_t X_t > -\infty , \overset{+}{A}_\infty < \infty \} .$$

Démonstration. Comme $A \leqq \overset{+}{A}$ on a sur U $\limsup_t A_t < \infty$, donc $\liminf_t M_t > -\infty$. D'après un résultat de Lenglart [1], cela entraîne la convergence de M . On en déduit par différence $\liminf_t A_t > -\infty$, donc $\limsup_t |A_t| < \infty$. Comme $[\![A]\!] = 2\overset{+}{A} - A$, on a $\limsup_t [\![A]\!]_t < \infty$, et la variation totale est finie.

Nous allons améliorer le résultat de [3], en remplaçant (dans le cas réel) la condition bilatérale sur H par une condition unilatérale.

PROPOSITION 2. Supposons que X soit du type (*) à une dimension :

$$X_t = X_0 + M_t + A_t = X_0 + M_t + \int_0^t H_s d\langle M,M\rangle_s \tag{1}$$

Alors X converge parfaitement sur l'ensemble

$$V = \{ \sup_t |X_t| < \infty , \limsup_t H_t < \infty \} \tag{2}$$

Démonstration. Soit $k > 0$, et soit $V_k = \{ \sup_t |X_t| < \infty , \limsup_t H_t < k \}$.

Il nous suffit de montrer que X converge parfaitement sur V_k pour tout k fixé. Nous allons montrer que $\langle M,M\rangle_\infty < \infty$ p.s. sur V_k , cela entraînera (comme $A_t = \int_0^t H_s d\langle M,M\rangle_s$) que $\overset{+}{A}_\infty < \infty$ p.s. sur V_k , d'où la convergence parfaite grâce au lemme 1. Nous pouvons supposer que $X_0 = 0$.

Considérons la semimartingale $Y_t = e^{-2kX_t}$, de décomposition canonique $Y = 1+N+B$ donnée par la formule d'Ito

$$N_t = -2k \int_0^t e^{-2kX_s} dM_s , \quad B_t = 2k \int_0^t e^{-2kX_s}(k-H_s) d\langle M,M\rangle_s$$

Sur V_k on a $\limsup_t Y_t < +\infty$, $\bar{B}_\infty < \infty$, donc Y est parfaitement convergente d'après le lemme 1 . Donc $\langle N,N\rangle_\infty = 4k^2 \int_0^\infty e^{-4kX_s} d\langle M,M\rangle_s$ est fini sur V_k , et comme $e^{-4kX_\cdot}$ y est bornée inférieurement, $\langle M,M\rangle_\infty$ est fini sur V_k . La proposition est établie.

Nous passons à l'étude de semimartingales réelles qui ne sont pas du type (*) . Nous désignons par $\overline{S}_t$ et $\underline{S}_t$ les bornes supérieure et inférieure de X sur $[0,t]$, par λ l'oscillation de X à l'infini ($\lambda = \limsup_t X_t - \liminf_t X_t$).

LEMME 3. Sur l'ensemble $L = \{ \sup_t |X_t| < \infty \ , <M,M>_\infty = \infty \}$, on a p.s. pour tout $k > 0$

$$(3) \qquad \lim_t \frac{\int_0^t e^{-2kX_s} dA_s}{k\int_0^t e^{-2kX_s} d<M,M>_s} = 1$$

$$(4) \qquad \liminf_t \frac{1}{k} e^{2k(\overline{S}_t - \underline{S}_t)} \frac{\overset{+}{A}_t}{<M,M>_t} \geq 1$$

$$(5) \qquad \liminf_t \frac{\overset{+}{A}_t}{<M,M>_t} \geq ke^{-2k\lambda} \quad (\text{donc } \geq \sup_k ke^{-2k\lambda} = 1/2e\lambda)$$

<u>Démonstration</u>. Nous supposons toujours $X_0=0$, et considérons la même semimartingale $Y_t = e^{-2kX_t} = 1+N+B$ que plus haut. Cette fois

$$N_t = -2k \int_0^t e^{-2kX_s} dM_s \quad , \quad B_t = 2k\int_0^t e^{-2kX_s}(kd<M,M>_s - dA_s)$$

Comme $\sup_t |X_t| < \infty$ sur L , le rapport $<M,M>_t/<N,N>_t$ est borné supérieurement et inférieurement en t , et donc $<N,N>_\infty = \infty$ sur L . D'après le "lemme de Borel-Cantelli" de Lévy, $\lim_t N_t/<N,N>_t = 0$ p.s. sur L. Or $N_t = Y_t - 1 - B_t$, et donc $\lim_t B_t/<N,N>_t = 0$, soit

$$\lim_t \frac{\int_0^t e^{-2kX_s}(kd<M,M>_s - dA_s)}{\int_0^t e^{-4kX_s} d<M,M>_s} = 0 \quad \text{p.s. sur } L$$

Il n'y a aucun inconvénient à remplacer au dénominateur e^{-4kX_s} par e^{-2kX_s} , car $<M,M>$ est croissant et $|X|$ borné. On obtient alors (3). Pour en déduire (4) on majore le numérateur et minore le dénominateur respectivement par

$$e^{-2k\underline{S}_t} \overset{+}{A}_t \qquad \text{et} \quad ke^{-2k\overline{S}_t} <M,M>_t \quad .$$

Enfin, pour obtenir (5) on remplace X par $X_t^n = X_{n+t} - X_n$ et on fait tendre n vers l'infini : le premier facteur de (4), pour n assez grand, est voisin (uniformément en t) de $e^{2k\lambda}/k$, et l'on peut donc remplacer le second facteur par sa liminf, qui ne dépend pas de n.

On en déduit très facilement le résultat suivant, qui est le principal dans cette section :

PROPOSITION 4. a) Sur l'ensemble où $\liminf_t \overset{+}{A}_t/<M,M>_t < \infty$, la convergence de X entraîne la convergence parfaite.
b) Sur l'ensemble où $\liminf_t \overset{+}{A}_t/<M,M>_t = 0$, $<M,M>_\infty = \infty$, les trajectoires de X ne sont p.s. pas bornées.

c) Sur l'ensemble où M diverge ($<M,M>_\infty = \infty$) et X est bornée , la condition

$$\liminf_t \overset{+}{A}_t / <M,M>_t \leqq \theta < \infty$$

entraîne

$$\lambda = \limsup_t X_t - \liminf_t X_t \geqq 1/2e\,\theta.$$

Démonstration. a) Sur l'ensemble où

i) $\sup_t |X_t| < \infty$, ii) $\liminf_t \overset{+}{A}_t/<M,M>_t < \infty$, iii) $\lambda=0$ (X converge)

on ne peut p.s. pas avoir $<M,M>_\infty = \infty$, car cela contredirait ii) d'après (5). On a donc $<M,M>_\infty < \infty$, et ii) entraîne alors $\overset{+}{A}_\infty < \infty$. On conclut à la convergence parfaite par le lemme 1.

b) Sur l'ensemble où $\sup_t |X_t| < \infty$, donc $\lambda<\infty$, et $<M,M>_\infty = \infty$, l'inégalité (5) entraîne que $\liminf_t \overset{+}{A}_t/<M,M>_t > 0$.

c) ne fait que réénoncer l'inégalité (5).

RESULTATS SUR LES SEMIMARTINGALES VECTORIELLES

Rappelons d'abord le principal résultat de [3] : si X est une semimartingale vectorielle du type (*), la convergence de X entraîne la convergence parfaite sur l'ensemble $\{ \forall i,j,k \ \limsup_t |H^i_{jk}(t)|<\infty \}$. La proposition 2 suggère de remplacer la condition " X converge " par la condition " X est bornée" . Mais c'est impossible, comme le montre l'exemple très simple suivant.

Soit B_t un mouvement brownien réel, et soit $X_t=e^{iB_t}$, qui est borné dans $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$. On a

$$dM^1_s = -\sin(B_s)dB_s \ , \ dA^1_s = -\tfrac{1}{2}\cos(B_s)ds$$
$$dM^2_s = \cos(B_s)dB_s \ , \ dA^2_s = -\tfrac{1}{2}\sin(B_s)ds$$

et $d(<M^1,M^1>+<M^2,M^2>)_s = ds$, de sorte que X est du type (*) avec des coefficients H^i_{jk} tous bornés par 1/2 en valeur absolue. Cependant, X ne converge pas. On remarquera que l'application $t \mapsto e^{it}$ peut être considérée comme une géodésique de la sphère S^1 , donc X_t est une martingale à valeurs dans S^1 : c'est en fait le mouvement brownien de cette variété riemannienne compacte, et on constate élémentairement le fait mentionné dans l'introduction sur les martingales à valeurs dans une variété compacte . Cette remarque est due à Emery.

Voici tout de même un résultat analogue à la proposition 2, mais plus faible :

PROPOSITION 5. Soit X une semimartingale du type (*) à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout $k>0$ il existe $C=C(k,n)>0$ tel que X soit parfaitement convergente sur l'ensemble

$$\{ \sup_i \sup_t |X^i_t| \leqq k \ , \ \sup_{ijk} \limsup_t |H^i_{jk}(t)| \leqq C \} .$$

Démonstration. Posons $\langle M,M\rangle_t = \Sigma_i \langle M^i,M^i\rangle_t$, $H_t = \sup_{ijk} |H^i_{jk}(t)|$. Soit $Y_t = Y_0+N_t+B_t$ la semimartingale réelle $\Sigma_i e^{X^i_t}$; on a

$$dN_t = \Sigma_i e^{X^i_t} dM^i_t \quad , \quad dB_t = \tfrac{1}{2}\Sigma_i e^{X^i_t}(d\langle M^i,M^i\rangle_t+2\Sigma_{jk} H^i_{jk}(t)d\langle M^j,M^k\rangle_t)$$

sur l'ensemble où $\sup_{i,t} |X^i_t| \leqq k$, on a donc

$$2dB_t \geqq e^{-k}d\langle M,M\rangle_t -2ne^kH(t)\Sigma_{jk} |d\langle M^j,M^k\rangle_t|$$

et comme $|d\langle M^j,M^k\rangle| \leqq \frac{1}{2}(d\langle M^j,M^j\rangle+d\langle M^k,M^k\rangle)$

(6) $$2dB_t \geqq e^{-k}(1 - 2n^2e^{2k}H(t))d\langle M,M\rangle_t$$

Prenons alors $C < 1/2n^2e^{2k}$; sur l'ensemble

$$W = \{ \sup_{i,t} |X_t| \leqq k \text{ , } \limsup_t H_t \leqq C \}$$

montrons que X <u>converge parfaitement</u>. Il suffit de prouver que $\langle M,M\rangle_\infty$ y est fini , car cela entraîne la convergence de tous les M^i et $\int_0^\infty |d\langle M^i,M^j\rangle_s|$, et aussi des $\int_0^\infty |dA^i_s|$ puisque $dA^i = \Sigma_{jk} H^i_{jk} d\langle M^j,M^k\rangle$ et H^i_{jk} est borné à l'infini. Or sur l'ensemble $W\cap\{\langle M,M\rangle_\infty = \infty\}$ on a $\lim_t B_t = +\infty$ d'après (6) et le choix de C ; d'autre part, Y reste bornée ; donc $\lim_t N_t=-\infty$, ce qui est p.s. impossible pour une martingale locale. Autrement dit, $W\cap\{\langle M,M\rangle_\infty =\infty\}$ est de mesure nulle, et la proposition est établie.

REMARQUE (due à M. Emery). Nous avons vu que l'ensemble

$$\{ \sup_t|X_t| \leqq k \text{ , } \limsup_t H_t < e^{-2k}/2n^2\}$$

est un ensemble de convergence parfaite pour X . Remplaçant X par λX, H par H/λ , k par λk permet de remplacer $e^{-2k}/2n^2$ par $\lambda e^{-2\lambda k}/2n^2$. Prenant la réunion en λ (i.e., minimisant en λ) on voit que l'ensemble

$$\{ \sup_t|X_t| \leqq k \text{ , } \limsup_t H_t < 1/4\,en^2k \}$$

est un ensemble de convergence parfaite. Remplaçant $\sup_t$ par $\limsup_t$ et prenant la réunion sur k, on obtient finalement le même résultat pour l'ensemble

$$\{ \limsup_t |X_t| < \infty \text{, } \limsup_t H_t|X_t| < 1/4\,en^2 \}.$$

UNE APPLICATION GEOMETRIQUE

PROPOSITION 6. Soit V une variété de dimension n, munie d'une connexion Γ sans torsion. Alors tout point p de V admet un voisinage relativement compact U_p possédant la propriété suivante : pour toute Γ-martingale (X_t) à valeurs dans V , presque toute trajectoire $X_.(\omega)$ qui reste dans U_p pour t suffisamment grand est convergente.

Démonstration. En considérant les processus (X_{r+t}) arrêtés à la première sortie de U_p (r rationnel $\geqq 0$), on se ramène à démontrer que toute Γ-martingale (X_t) prenant ses valeurs dans U_p est convergente. Soit V_p le domaine d'une carte normale de centre p, que nous noterons $(x^i)_{i=1,..,n}$, et soient Γ^i_{jk} les symboles de Christoffel de la connexion Γ dans cette carte. Soit (X_t) une Γ-martingale à valeurs dans V_p ; nous désignerons aussi par (X_t) la semimartingale à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de composantes $X^i_t = x^i \circ X_t$. Par définition des Γ-martingales, nous avons (en écrivant $X^i = X^i_0 + M^i + A^i$ comme dans toute cette note)

$$dA^i_t = -\frac{1}{2}\Sigma_{jk}\,\Gamma^i_{jk}(X_t)d\langle M^j,M^k\rangle_t$$

Il est bien connu que tous les symboles de Christoffel sont nuls au centre de la carte. Soit donc U_p un voisinage de p de la forme $\{\sup_i |x^i| \leqq r\}$, contenu dans V_p, et tel que

$$|\Gamma^i_{jk}(x)| \leqq 1/3n^2e^{2r} \quad \text{pour tout } x \in U_p .$$

Alors la proposition 5 entraîne que si (X_t) prend ses valeurs dans U_p, elle est parfaitement convergente.

REMARQUE. Si (X_t) est une Γ-martingale à valeurs dans V, toute trajectoire qui converge vers un point de V se trouve contenue, pour t suffisamment grand, dans un voisinage de ce point du type de la prop. 6. Elle est donc parfaitement convergente (cf. plus loin la note d'Emery), et on peut à partir de là retrouver immédiatement le résultat principal de Zheng [3].

REMERCIEMENTS

Nous remercions M. Emery pour de fructueuses discussions au cours de la préparation du manuscrit, M. Emery et P.A. Meyer pour leurs remarques sur les versions préliminaires.

REFERENCES.

[1] LENGLART (E.). Sur la convergence presque sûre des martingales locales. CRAS Paris, t. 284, 1977, p. 1085.

[2] MEYER (P.A.). Le théorème de convergence des martingales dans les variétés riemanniennes, d'après Darling et Zheng. A paraître.

[3] ZHENG (W.-A.). Sur le théorème de convergence des martingales dans une variété riemannienne. A paraître.

HE Sheng Wu, ZHENG Wei An

Ecole Normale Supérieure de Chine Orientale

SHANGHAI, Chine et

Institut de Recherche Math. Avancée, Strasbourg, France

YAN Jia An

Institut de Mathématiques Appliquées, Académie des Sciences

PEKIN, Chine et

Institut fur Angew. Mathematik, Heidelberg (Allemagne Féd.)