SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

J.-Y. CALAIS
M. GÉNIN

Sur les martingales locales continues indexées par $]0,\infty[$

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 162-178
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__162_0>

SUR LES MARTINGALES LOCALES CONTINUES

INDEXÉES PAR $]0,\infty[$

J.Y. CALAIS ; M. GENIN

0. INTRODUCTION

Dans un article publié en 1980, Sharpe a étudié le comportement en 0 des martingales locales continues indexées par $]0,\infty[$ (cf. [9]).

Si $(M_t)_{t>0}$ désigne une telle martingale, Sharpe a montré, qu'en 0, trois possibilités s'offraient à M :

i) $\lim_{t\downarrow o} M_t$ existe dans $\mathbb{R}$.

ii) $\lim_{t\downarrow o} |M_t| = +\infty$.

iii) $\underline{\lim}_{t\downarrow o} M_t = -\infty$ et $\overline{\lim}_{t\downarrow o} M_t = +\infty$.

Dans la première partie de cet article, nous proposons de nouvelles démonstrations des résultats de Sharpe, en particulier du théorème précédent.

Dans la deuxième partie, nous étudions le cas $\lim_{t\downarrow o} M_t = +\infty$. Nous donnerons un théorème de représentation pour de tels processus. Plus précisément, nous montrerons, qu'à un changement de temps près, les trajectoires de M sont celles du processus $-\mathrm{Log}(\rho)$, où ρ est un processus de Bessel de dimension 2, issu de 0.

Si, de plus, $M > 0$ (condition toujours réalisée au voisinage de 0), nous montrerons, qu'à un changement de temps près, les trajectoires de M sont celles du processus $\frac{1}{\rho}$ où ρ est un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0.

Ce dernier résultat nous permettra de généraliser un théorème de Pitman ([8]).

Walsh s'est intéressé, dans un article publié en 1977 (cf.[11]) au comportement en 0 des martingales conformes indexées par $]0,\infty[$.

Si $(Z_t)_{t>o}$ désigne une telle martingale, Walsh a montré qu'une des éventualités suivantes était réalisée :

i) $\lim_{t\downarrow o} Z_t$ existe dans $\mathbb{C}$

ii) $\lim_{t\downarrow o} |Z_t| = +\infty$

iii) $\forall\ \delta > 0$, $\{Z_t(\omega)\ ;\ 0 < t < \delta\}$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Ce théorème est démontré très simplement dans la première partie de cet article.

Dans la troisième partie nous montrerons que dans le cas ii), les trajectoires de Z sont, à un changement de temps près, celle du processus $\frac{1}{U}$ où U est un mouvement brownien complexe issu de 0.

Nous montrerons aussi qu'on ne peut trouver de théorème de représentation pour le cas iii).

Enfin, soit $M_t = (M_t^i)_{\substack{t>o \\ 1\leq i\leq n}}$ $(n \geq 3)$ une martingale locale, continue, indexée par $]0,\infty[$ telle que :

$$d\langle M^i,M^j\rangle = 0 \ (i \neq j) \quad \text{et} \quad d\langle M^i\rangle = d\langle M^j\rangle \quad (1 \leq i,j \leq n) .$$

Nous montrerons que cette martingale converge nécessairement lorsque t tend vers 0.

1. DEMONSTRATION NOUVELLE DE RESULTATS CONNUS

Dans cette première partie, nous nous proposons de démontrer plus simplement un théorème de Walsh [11], les principaux théorèmes de Sharpe sur $\mathcal{L}_c^{open}$, et d'améliorer le théorème (3.16;[9]) sur $\mathcal{L}_c^{inc}$.

Rappelons quelques définitions et résultats dont nous aurons besoin (cf. [9]).

Soit $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathcal{F}, P)$ l'espace de probabilité filtré de référence, supposé satisfaire les conditions habituelles.

$\mathcal{L}_c^{open}$ désigne l'ensemble des processus $(M_t)_{t>o}$ tels que :

i) pour presque toute trajectoire : $t \to M_t$ est continue

ii) $\forall\ \varepsilon > 0$, $(M_{\varepsilon+t})_{t\geq o}$ est une $(\mathcal{F}_{\varepsilon+t})_{t\geq o}$ martingale locale

$\mathcal{L}_c^{inc}$ désigne l'ensemble des processus $(M_{s,t})_{o<s\leq t}$ tels que :

i) $\forall\ s > 0$, $(M_{s,t})_{t\geq s}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq s}$ martingale locale continue

ii) pour tout triplet (r,s,t) tel que $0 < r \leq s \leq t$, on a : $M_{r,t} = M_{r,s} + M_{s,t}$.

A un processus $M \in \mathcal{L}_c^{open}$ (resp. $M \in \mathcal{L}_c^{inc}$), est associée une unique mesure aléatoire positive $d\langle M\rangle$ sur $]0,\infty[$, telle que :

$\forall\ \varepsilon > 0$, $\{M_{\varepsilon+t}^2 - \langle M\rangle(.,]\varepsilon,\varepsilon+t])\}$ est une $(\mathcal{F}_{\varepsilon+t})_{t\geq o}$ martingale locale continue (resp. $M_{s,t}^2 - \langle M\rangle\ (.,]s,t])$, $t \geq s$, est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq s}$ martingale locale continue.

La classe $\mathcal{L}_c^{open}$ est stable par les opérations suivantes :

1) Arrêt : $M \in \mathcal{L}_c^{open}$ et T un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq o}$ temps d'arrêt, alors $M^T 1_{\{T>0\}} \in \mathcal{L}_c^{open}$

2) Localisation : si $M \in \mathcal{L}_c^{open}$ et $A \in \mathcal{F}_o$ alors $1_A \cdot M \in \mathcal{L}_c^{open}$.

De plus, nous utiliserons fréquemment le raisonnement suivant :

Soient $A \in \mathcal{F}_o$, $B \in \mathcal{F}_o$; pour établir que $A \subset B$ p.s., on peut, quitte à changer de probabilité (prendre $P_A = P(./A)$) supposer que $A = \Omega$ p.s. et montrer qu'alors $P(B) = 1$.

I.1.- LEMME : Soit $X_t = X_o + M_t + A_t$ la décomposition canonique d'une sous-martingale continue, positive, bornée par une constante c. On a :

$$E(A_\infty) \leq c,\ A \text{ admet des moments de tous ordres et } M \in BMO.$$

Démonstration : On se ramène par arrêt, au cas où M est bornée, ce qui entraîne $\forall\ t > 0\ \ E(A_t) \leq c$ et donc :
$E(A_\infty) \leq c$. De plus, $E(A_\infty - A_t | \mathcal{F}_t) \leq c$ et $E(|M_\infty - M_t| \mid \mathcal{F}_t) \leq 3c$; d'après [2], A admet des moments de tous ordres, et $M \in BMO$.

Le théorème des surmartingales inverses permet de démontrer simplement la proposition suivante :

I.2.- PROPOSITION : ([9] , 2-15(i)). Soit $M \in \mathcal{L}_c^{open}$; notons $A = \{\omega\ ;\ \lim\limits_{t \downarrow o} M_t(\omega)$ existe dans $\mathbb{R}\}$ et $B = \{\omega\ ; <M>(\omega\ ;\ ]0,1]) < \infty\}$, alors : $A = B$ p.s. et $1_A M$ est une martingale locale continue.

Démonstration : A l'évidence, $A \in \mathcal{F}_o$. Supposons que $A = \Omega$ p.s. Par localisation et arrêt, on se ramène au cas où M est bornée par c. D'après le théorème des surmartingales inverses, M est alors une martingale continue bornée, donc: $<M>(.,]0,1]) < \infty$ p.s. et $P(B) = 1$.

De même, $B \in \mathcal{F}_o$; supposons que $B = \Omega$ p.s. ; pour tout $t \geq 0$, $C_t = <M>(.,]0,t])$ est un processus croissant, continu, nul en 0. Par arrêt, on se ramène au cas où $C_\infty \leq k$ $(k > 0)$. Puisque M et $M^2 - C$ appartiennent à $\mathcal{L}_c^{open}$, on a, lorsque $0 < u \leq s \leq t$:

$$E(M_t - M_s)^2 = E(C_t - C_s) \leq k \quad \text{et} \quad E(M_t - M_u \mid \mathcal{F}_s) = M_s - M_u \ .$$

Soit $s_n \downarrow 0$ avec $s_o < 1$; notons $Z_n = M_1 - M_{s_n}$. On a :

$$E(Z_n - Z_m)^2 = E(|C_{s_n} - C_{s_m}|) \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0, \quad \text{donc } Z_n \xrightarrow[n \to \infty]{L^2} Z \ .$$

Il existe donc une suite $u_n \downarrow 0$ et $M_o \in \mathcal{F}_o$ tels que : $M_{u_n} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} M_o$, $M_1 - M_o = Z$ p.s. $\forall\ t \geq 0$, $M_t - M_o = (M_t - M_1) + Z \in L^2$, et on a, lorsque $s < t$ et $u_n \leq s$:

$$E(M_t - M_o \mid \mathcal{F}_s) = E(M_t - M_{u_n} + M_{u_n} - M_o \mid \mathcal{F}_s) = M_s - M_{u_n} + M_{u_n} - M_o = M_s - M_o \ .$$

D'après le théorème des surmartingales inverses, $\lim\limits_{t \downarrow o} M_t = M_o$ p.s., donc $P(A) = 1$.

I.3.- THEOREME : ([9] ; 2-4). Soit $M \in \mathcal{L}_c^{open}$. Pour presque tout ω, une des éventualités suivantes est réalisée :

i) $\lim_{t\downarrow o} M_t(\omega)$ existe et est finie

ii) $\lim_{t\downarrow o} |M_t(\omega)| = +\infty$

iii) $\underline{\lim}_{t\downarrow o} M_t(\omega) = -\infty$ et $\overline{\lim}_{t\downarrow o} M_t(\omega) = +\infty$.

Démonstration : Soient $C = \{\omega \; ; \; \overline{\lim}_{t\downarrow o} M_t(\omega) \in \mathbb{R}\}$ et $D = \{\omega \; ; \; \lim_{t\downarrow o} M_t(\omega)$ existe et est finie$\}$. Pour démontrer le théorème, il suffit, quitte à changer M en $-M$, de montrer que $C = D$ p.s.

On a, de toute évidence, $D \subset C$ et $C \in \mathcal{F}_o$; supposons que $C = \Omega$ p.s. Par localisation et arrêt, on se ramène à : $M_t \leq k$, $\forall\, t > 0$.

Appliquons la formule d'Ito à M et à $x \to (k+1-x)^{-1}$; on a :

$$(1)\qquad \frac{1}{k+1-M_t} = \frac{1}{k+1-M_\varepsilon} + \int_\varepsilon^t \frac{dM_s}{(k+1-M_s)^2} + \int_\varepsilon^t \frac{d<M>_s}{(k+1-M_s)^3} \qquad (0 < \varepsilon \leq t)$$

Remarquons que : $\forall\, t > 0$, $0 < \frac{1}{k+1-M_t} \leqslant 1$; on déduit alors du lemme I.1 que :

$\forall\, \varepsilon > 0$, $E(\int_\varepsilon^1 \frac{d<M>_s}{(k+1-M_s)^3}) \leq 1$ et donc que : $\int_o^1 \frac{d<M>_s}{(k+1-M_s)^3} < \infty$ p.s.

Soit $A_t = \int_o^t \frac{d<M>_s}{(k+1-M_s)^3}$. A est un processus croissant continu, nul en 0, à valeurs finies. Posons $V_t = \frac{1}{k+1-M_t} - A_t$ pour $t > 0$.

D'après (1), $V \in \mathcal{L}_c^{open}$ et $<V>(.,]0,1]) = \int_o^1 \frac{d<M>_s}{(k+1-M_s)^4} \leq A_1$. On déduit alors de la proposition I.2 que $\lim_{t\downarrow o} V_t$ existe dans $\mathbb{R}$, ce qui entraîne que $\lim_{t\downarrow o} M_t$ existe p.s. dans $\mathbb{R}$ et donc que $P(D) = 1$.

Soit $\mathscr{C}_c^{open} \overset{def}{=} \{Z = X + iY \; ; \; X,Y \in \mathcal{L}_c^{open}, \; d<X> = d<Y>$ et $d<X,Y> = 0\}$. Remarquons que $Z \in \mathscr{C}_c^{open}$ si et seulement si $\forall\, \varepsilon > 0$, $(Z_{\varepsilon+t})_{t\geq o}$ est une $(\mathcal{F}_{\varepsilon+t})_{t\geq o}$ martingale conforme (cf. [3]).

I.4.- PROPOSITION : Soit $Z \in \mathscr{C}_c^{open}$; alors :

$$\{\omega \; ; \; \overline{\lim}_{t\downarrow o} |Z_t(\omega)| < \infty\} \overset{p.s.}{=} \{\omega \; ; \; \lim_{t\downarrow o} Z_t(\omega) \text{ existe dans } \mathbb{C}\}.$$

Démonstration : Soient $A = \{\omega \; ; \; \overline{\lim}_{t\downarrow o} |Z_t(\omega)| < \infty\}$ et $B = \{\omega \; ; \; \lim_{t\downarrow o} Z_t(\omega)$ existe dans $\mathbb{C}\}$. On a $B \subset A$ et $A \in \mathcal{F}_o$; supposons que $A = \Omega$ p.s. Par localisation et arrêt, on se ramène au cas où $|Z_t| \leq k$, $\forall\, t > 0$; donc : $X_t^2 \leq k^2$ et $Y_t^2 \leq k^2$ $\forall\, t > 0$; d'après le théorème I.3, $\lim_{t\downarrow o} X_t$ et $\lim_{t\downarrow o} Y_t$ existent dans $\mathbb{R}$ p.s., donc $\lim_{t\downarrow o} Z_t$ existe p.s. dans $\mathbb{C}$ et $P(B) = 1$.

A l'aide de cette proposition, nous pouvons démontrer simplement le théorème suivant :

I.5.- THEOREME : (Walsh [11]). *Soit* $Z \in \mathcal{C}_c^{open}$; *pour presque tout* ω, *une des éventualités suivantes est réalisée* :

i) $\lim_{t \downarrow o} Z_t(\omega)$ *existe dans* $\mathbb{C}$

ii) $\lim_{t \downarrow o} |Z_t(\omega)| = +\infty$

iii) $\forall\, \delta > 0$, $\{Z_t(\omega)\ ;\ 0 < t < \delta\}$ *est dense dans* $\mathbb{C}$.

Démonstration : Supposons i) et ii) non réalisées p.s. Soit $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $T = \inf\{t>0\ ;\ |Z_t - z| < r\}$. T est un $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt et, $\mathbb{C}$ étant à base dénombrable, le théorème sera démontré si : $P\{T > 0\} = 0$. Supposons que $P\{T > 0\} > 0$. $\{T > 0\} \in \mathcal{F}_o$; supposons donc que $\{T > 0\} = \Omega$ p.s.

Soit $V = \dfrac{1}{Z^T - z}$; d'après la formule d'Ito, $V \in \mathcal{C}_c^{open}$ et $|V_t| \le \frac{1}{r}$ pour $t > 0$. D'après la proposition I.4, $\lim_{t \downarrow o} V_t$ existe dans $\mathbb{C}$ p.s. ce qui est impossible.

Nous allons établir maintenant, pour les processus de $\mathcal{L}_c^{inc}$, un théorème analogue du théorème I.3 relatif à $\mathcal{L}_c^{open}$. $\mathcal{L}_c$ désigne l'espace des martingales locales continues.

Commençons par démontrer quelques résultats sur $\mathcal{L}_c^{inc}$.

I.6.- PROPOSITION : *Soit* $M \in \mathcal{L}_c^{inc}(\mathcal{F}_t)$, T *un* $(\mathcal{F}_t)$ *temps d'arrêt tel que* $P\{T > 0\} = 1$. *Alors* :

$$N = (M_{s\wedge T,\, t\wedge T}\ ;\ 0 < s \le t) \in \mathcal{L}_c^{inc}(\mathcal{F}_{t\wedge T}) .$$

Démonstration : Soit $s > 0$ fixé ; $s \wedge T$ est un $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt, et $P(0 < s \wedge T < \infty) = 1$. $t \to N_{s,t}$ est continue sur $[s,\infty[$ et $N_{r,t} = N_{r,s} + N_{s,t}$ pour $0 < r \le s \le t$. Reste à montrer que : $\forall\, s > 0$, $(N_{s,t})_{t \ge s}$ est une $(\mathcal{F}_{t\wedge T})_{t\ge s}$ martingale locale.

D'après le lemme (3.7;[9]), $M_{s\wedge T,(s\wedge T)+u}$ est une $(\mathcal{F}_{(s\wedge T)+u})$martingale locale continue, $T - s\wedge T$ est un $(\mathcal{F}_{(s\wedge T)+u})_{u\ge o}$ temps d'arrêt ; donc :

$$(M_{s\wedge T,(s\wedge T)+(u\wedge(T-s\wedge T))})_{u\ge o} \text{ est une } (\mathcal{F}_{(s\wedge T)+(u\wedge(T-s\wedge T))})_{u\ge o} \text{ martingale}$$
locale continue.

La proposition résulte alors de l'égalité : $(s \wedge T) + (u \wedge (T - s \wedge T)) = (s + u) \wedge T$.

Etablissons l'analogue, pour les processus de $\mathcal{L}_c^{inc}$ de la proposition I.2 relatif à $\mathcal{L}_c^{open}$.

I.7.- PROPOSITION : ([9], 3.8,9 et 10). Soit $M \in \mathcal{L}_c$, $A = \{\omega \; ; \; \exists N \in \mathcal{L}_c$, $\forall s < t, N_t - N_s = M_{s,t}\}$, $B = \{\omega ; \lim_{t \downarrow o} M_{s,1}$ existe dans $\mathbb{R}\}$ et $C = \{\omega \; ; <M>(\omega \; ; \;]0,1]) < \infty\}$

On a : $A = B = C$ p.s.

Démonstration : On a : $A \subset B$, $B \in \mathcal{F}_o$; supposons que $B = \Omega$ p.s. ; et soit $N_t = \lim_{s \downarrow o} M_{s,t}$, alors : $N_t - N_s = M_{s,t}$, donc $N \in \mathcal{L}_c^{open}$; puisque $\lim_{t \downarrow o} N_t = 0$, $N \in \mathcal{L}_c$ et par conséquent $P(A) = 1$.

On a d'autre part : $A \subset C$ et $C \in \mathcal{F}_o$; supposons que $C = \Omega$ p.s. Soit $J_t = <M>(., \;]0,t])$ J est un processus croissant continu, nul en 0, à valeurs finies. Par arrêt, on se ramène, à l'aide de la proposition I.6, à : $J_\infty \le c$ $(c > 0)$. On a pour $0 < s \le t$: $E(M^2_{s,t}) = E(J_t - J_s) \le c$. Soit $s_n \downarrow 0$ avec $s_o < 1$, posons $Z_n = M_{s_n,1}$. On a : $E(Z_n - Z_p)^2 = E(|J_{s_n} - J_{s_p}|) \xrightarrow[n,p \to \infty]{} 0$, donc $Z_n \xrightarrow[n \to \infty]{L^2} Z$.

Il existe donc une suite $u_n \downarrow 0$ telle que : $M_{u_n,1} \xrightarrow[L^2]{p.s.} Z$. Posons, pour $t > 0$, $V_t = (M_{1,t} + Z)1_{t \ge 1} + (Z - M_{t,1})1_{t<1}$; $V_t = \lim_{n \to \infty} M_{u_n,t}$ et $V_t - V_s = M_{s,t}$, donc $V \in \mathcal{L}_c^{open}$. Comme $<V>(., \;]0,1]) = J_1 < \infty$ p.s., il en résulte que $V \in \mathcal{L}_c$ et donc que $P(A) = 1$.

Nous pouvons maintenant démontrer, pour les éléments de $\mathcal{L}_c^{inc}$, l'analogue du théorème I.3.

I.8.- THEOREME : Soit $M \in \mathcal{L}_c^{inc}$; pour presque tout ω, une des éventualités suivantes est réalisée :

i) $\lim_{s \downarrow o} M_{s,1}$ existe dans $\mathbb{R}$.

ii) $\lim_{s \downarrow o} M_{s,1} = \pm \infty$

iii) $\underline{\lim}_{s \downarrow o} M_{s,1} = -\infty$ et $\overline{\lim}_{s \downarrow o} M_{s,1} = +\infty$.

Démonstration : Soient $A = \{\omega \; ; \; \overline{\lim}_{s \downarrow o} M_{s,1} \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{\omega \; ; \; \lim_{s \downarrow o} M_{s,1}$ existe dans $\mathbb{R}\}$. Pour démontrer le théorème il suffit, quitte à changer M en $-M$, de montrer que $A = B$ p.s. On a : $B \subset A$, $A \in \mathcal{F}_o$; supposons que $A = \Omega$ p.s. et soit $X = \overline{\lim}_{s \downarrow o} M_{s,1}$.

Pour $t > 0$, posons

$$V_t = (M_{1,t} + X)1_{t \ge 1} + (X - M_{t,1})1_{t<1} \; ; \; V_t = \overline{\lim}_{s \downarrow o} M_{s,t} \text{ et } V_t - V_s = M_{s,t}$$

$(0 < s \le t)$, donc $V \in \mathcal{L}_c^{open}$; comme $\underline{\lim}_{t \downarrow 0} V_t = 0$, on déduit du théorème I.3 que $V \in \mathcal{L}_c$ et donc, d'après la proposition I.7, que $P(B) = 1$.

II. REPRESENTATION ET PROPRIETES DES MARTINGALES OUVERTES QUI CONVERGENT VERS $+\infty$

Dans cette deuxième partie, nous nous proposons d'étudier l'ensemble :

$$\mathcal{H} \overset{def}{=} \{M \in \mathcal{L}_c^{open} \; ; \; \lim_{t \downarrow 0} M_t = +\infty\}$$

Rappelons tout d'abord qu'un processus de Bessel ρ, de dimension $q \ge 2$, issu de 0, est l'unique solution trajectorielle (et donc en loi) [cf. Yamada-Watanabe, [4], théorème 3.2, p.168) de l'équation :

$$\rho_t = \beta_t + \frac{1}{2}(q-1)\int_0^t \frac{ds}{\rho_s} \qquad (\beta \text{ mouvement brownien réel, issu de } 0)$$

<u>Notation</u> : Nous désignons par BES(q) tout processus de Bessel de dimension $q \ge 2$ issu de 0.

Rappelons ensuite le théorème de caractérisation des mouvements browniens arrêtés.

<u>THEOREME</u> : <u>Soit</u> M <u>une</u> $(\mathcal{F}_t, P)$ <u>martingale locale continue</u>, <u>issue de</u> 0 ; T <u>un</u> $(\mathcal{F}_t)$ <u>temps d'arrêt tel que</u> : $\langle M \rangle_t = t \wedge T$.

<u>Soit</u> $B' = (\Omega', (\mathcal{F}'_t), B'_t, P')$ <u>un mouvement brownien réel issu de 0. Alors sur l'espace</u> $\bar{\Omega} = \Omega \times \Omega'$, <u>muni de la filtration</u> $(\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{F}'_t)_{t \ge 0}$ <u>convenablement complétée pour la probabilité</u> $P \otimes P'$, <u>il existe un mouvement brownien réel issu de</u> 0, $\bar{B}$, <u>tel que si on pose</u> $\bar{M}_t(\omega,\omega') = M_t(\omega)$, $\bar{T}(\omega,\omega') = T(\omega)$, <u>on ait</u> :

$$\bar{M}_t = B_{t \wedge \bar{T}} \quad .$$

N.B.-Dans ce qui suit, le lecteur doit avoir à l'esprit que, si nécessaire, nous utilisons le théorème ci-dessus et les techniques de relèvement d'espace (cf. [4], p.89-91 et [3], p.292 (cas complexe)) sans le préciser, de manière à obtenir des énoncés plus concis et à éviter des changements inutiles de notations.

Voici une représentation des éléments de $\mathcal{H}$.

II.1.- <u>THEOREME</u> : <u>Soit</u> $M \in \mathcal{H}$. <u>Alors le processus croissant continu</u> $A_t = \int_0^t \exp(-2M_s)\, d\langle M \rangle_s$ <u>est à valeurs finies et il existe</u> ρ, BES(2), <u>tel que</u>

$$\exp(-M_t) = \rho_{A_t} \quad .$$

Démonstration : Appliquons la formule d'Ito à $x \to \exp(-x)$ et à $M \in \mathcal{H}$, on a :

$$(2)\quad \exp(-M_t) = \exp(-M_\varepsilon) - \int_\varepsilon^t \exp(-M_s)\, dM_s + \frac{1}{2}\int_\varepsilon^t \exp(-M_s)\, d\langle M\rangle_s \qquad (0<\varepsilon\leq t)$$

Quitte à arrêter M, on peut supposer $M \geq 0$ donc $0 \leq \exp(-M_t) \leq 1$ et on déduit du lemme I.i que $\int_0^t \exp(-M_s)\, d\langle M\rangle_s < \infty$ p.s. donc que $\int_0^t \exp(-2M_s)\, d\langle M\rangle_s < \infty$.

De la proposition I.7, il résulte que $N_t = -\int_0^t \exp(-M_s)\, dM_s \in \mathcal{L}_c$. On a :

$$\langle N\rangle_t = \int_0^t \exp(-2M_s)\, d\langle M\rangle_s$$

Lorsque l'on fait tendre ε vers 0 dans l'égalité (2), il vient, en faisant apparaître $d\langle N\rangle_s$:

$$\forall\, t \geq 0,\ \exp(-M_t) = N_t + \frac{1}{2}\int_0^t \exp(M_s)\, d\langle N\rangle_s \quad .$$

Soit τ l'inverse à droite de $\langle N\rangle$; $\tau(0) = 0$, car $\langle N\rangle_t > 0$, $\forall\, t > 0$. On a :

$$\forall\, t \geq 0,\ \exp(-M_{\tau(t)}) = N_{\tau(t)} + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\langle N\rangle_\infty} \exp(M_{\tau(s)})\, ds$$

$(N_{\tau(t)})_{t\geq 0}$ étant un mouvement brownien réel, issu de 0, arrêté à $\langle N\rangle_\infty$, $\exp(-M_{\tau(t)})_{t\geq 0}$ est, d'après le théorème de Yamada-Watanabe, un BES(2) arrêté à $\langle N\rangle_\infty$. On termine la démonstration en remarquant que les intervalles de constance de M et de $\langle N\rangle$ sont les mêmes.

Ce théorème montre, qu'à un changement de temps près, les trajectoires de $M \in \mathcal{H}$ sont celles du processus $(-\mathrm{Log}(\rho_t))_{t>0}$ où ρ est un BES(2).

II.2.- COROLLAIRE : Soit ρ un BES(q), $q > 2$. Il existe un processus croissant continu, nul en 0, A, et ρ' un BES(2) tels que : $\exp\left(-\frac{1}{\rho_t^{q-2}}\right) = \rho'_{A_t}$.

Démonstration : D'après la formule d'Ito, $\frac{1}{\rho^{q-2}} \in \mathcal{H}$. Le résultat se déduit du théorème II.1 avec $A_t = (q-2)^2 \int_0^t \exp\left(-\frac{2}{\rho_s^{q-2}}\right) \frac{ds}{\rho_s^{2(q-1)}}$

Le résultat suivant est l'analogue d'un théorème de F. Knight [5] sur la représentation de deux martingales continues, orthogonales.

II.3.- PROPOSITION : Soient M et $M' \in \mathcal{H}$ telles que $d\langle M,M'\rangle = 0$. Alors il existe ρ et ρ' deux BES(2) indépendants tels que :

$$\exp(-M_t) = \rho_{A_t} \ ;\ \exp(-M'_t) = \rho'_{A'_t} \quad .$$

Démonstration :

$\exp(-M_t) = N_t + \frac{1}{2}\int_0^t \exp(M_s)\, d\langle N\rangle_s$, $\exp(-M'_t) = N'_t + \frac{1}{2}\int_0^t \exp(M'_s)\, d\langle N'\rangle_s$

avec $N_t = -\int_0^t \exp(-M_s)\, dM_s \in \mathcal{L}_c$ et $N'_t = -\int_0^t \exp(-M'_s)\, dM'_s \in \mathcal{L}_c$.

On a : $d\langle N,N'\rangle = 0$ car $d\langle M,M'\rangle = 0$; d'après le théorème de Knight [5], N_τ et $N'_{\tau'}$ sont deux mouvements browniens réels, arrêtés, issus de 0, indépendants, τ et τ' désignant les inverses à droite respectifs de $\langle N\rangle$ et $\langle N'\rangle$. On en déduit donc que ρ et ρ' sont deux BES(2) indépendants.

Remarque : Soit $M \in \mathcal{H}$, $M > 0$; en appliquant la formule d'Ito à $x \mapsto \frac{1}{x}$ et à M, le lemme I.1., et le théorème de Yamada-Watanabe pour caractériser BES(3), on obtient le théorème suivant, qui est une représentation des éléments positifs de $\mathcal{H}$.

II.4.- THEOREME : Soit $M \in \mathcal{H}$, $M > 0$. Alors le processus croissant continu $A_t = \int_0^t \frac{d\langle M\rangle_s}{M_s^4}$ est à valeurs finies et il existe un BES(3) noté ρ, tel que

$$\frac{1}{M_t} = \rho_{A_t} .$$

De ce théorème, on déduit, en suivant le raisonnement du corollaire II.2 et de la proposition II.3, le corollaire et la proposition suivants :

II.5.- COROLLAIRE : Soit ρ un BES(q), $q > 2$; il existe un processus croissant continu A, nul en 0, et un BES(3), ρ', tels que : $\rho_t^{q-2} = \rho'_{A_t}$ avec $A_t = (q-2)^2 \int_0^t \rho_s^{2(q-3)}\, ds$.

II.6.- PROPOSITION : Soient M et M' orthogonales, $M > 0$, $M' > 0$, alors $\frac{1}{M_t} = \rho_{A_t}$, $\frac{1}{M'_t} = \rho'_{A'_t}$, ρ et ρ' étant deux BES(3) indépendants.

Le théorème de représentation II.4 des processus strictement positifs de l'ensemble $\mathcal{H}$ permet de généraliser le théorème de Pitman ([8]) dont nous rappelons une version :

Soit ρ un $(\mathcal{F}_t)$ processus de Bessel de dimension 3, issu de 0 et $J_t(\rho) = \inf_{s\geq t} \rho_s$. Alors $B_t = 2\,J_t(\rho) - \rho_t$ est un $(\mathcal{F}_t \vee \sigma(J_t))$ mouvement brownien.

II.7.- THEOREME :

1) Soit $M \in \mathcal{H}$, $M > 0$. Alors $\frac{2}{J_t(-M)} + \frac{1}{M_t}$ est une martingale locale continue

<u>nulle en</u> 0.

2) <u>En particulier</u>, <u>soit</u> X <u>une diffusion strictement positive</u>, $X(0) = 0$, $X(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$, s <u>sa fonction d'échelle telle que</u> $s(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. <u>Alors</u> :

$\frac{2}{s(J_t(X))} - \frac{1}{s(X_t)}$ <u>est une martingale locale continue</u>, <u>nulle en</u> 0.

<u>Démonstration</u> :

1) D'après le théorème II.4, on a : $\frac{1}{M_t} = \rho_{A_t}$ où ρ est un BES(3) et $A_t = \int_0^t \frac{d\langle M\rangle_s}{M_s^4} < \infty$. Alors :

$2\,J_t(\frac{1}{M}) - \frac{1}{M_t} = 2J_t(\rho_A) - \rho_{A_t} = \beta_{A_t}$; A_t est un $(\mathcal{F}_t \vee \sigma(J_t))$ temps d'arrêt,

donc $2J_t(\frac{1}{M}) - \frac{1}{M_t}$ est une martingale locale continue, nulle en 0.

De l'égalité $J_t(\frac{1}{M}) = -\frac{1}{J_t(-M)}$ on déduit la première partie du théorème.

2) On choisit s de sorte que $s < 0$ ([10]). Dans ce cas, $-s(X_t) \in \mathcal{H}$ et $-s(X_t) > 0$. Par application de 1) à $-s(X_t)$, on obtient :

$$\frac{2}{J_t(s(X))} - \frac{1}{s(X_t)} \text{ est une martingale locale continue, nulle en 0.}$$

s étant continue et croissante, $J_t(s(X)) = s(J_t(X))$, la deuxième partie en résulte.

Nous allons maintenant démontrer une propriété de la mesure aléatoire $d\langle M\rangle$ associée à $M \in \mathcal{H}$, qui permettra de montrer que $d\langle M\rangle$ n'est pas déterministe.

Commençons par une remarque :

Soit $M \in \mathcal{H}$, $M > 0$; alors en appliquant la formule d'Ito à $x \to \mathrm{Log}\, x$, puis à $x \to \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$, on obtient :

$$\int_{0^+}^{\cdot} \frac{d\langle M\rangle_s}{M_s^{2+\alpha}} \begin{cases} = +\infty & (\alpha \le 0) \\ < \infty & (\alpha > 0) \end{cases}$$

II.8.- <u>PROPOSITION</u> : <u>Soient</u> $M \in \mathcal{H}$, $N \in \mathcal{L}_c^{open}$ <u>telles que</u> $d\langle M\rangle = d\langle N\rangle$. <u>Alors</u> $MN \notin \mathcal{L}_c^{open}$.

<u>Démonstration</u> : Quitte à arrêter M, on peut supposer $M > 0$. Supposons $MN \in \mathcal{L}_c^{open}$ ce qui équivaut à $d\langle M,N\rangle = 0$, et appliquons la formule d'Ito à $(n,m) \to \mathrm{Arctg}\,(\frac{n}{m})$ et à (N,M). On obtient :

$$\operatorname{Arctg} \frac{N_t}{M_t} = \operatorname{Arctg} \frac{N_\varepsilon}{M_\varepsilon} + \int_\varepsilon^t \frac{M_s\, dN_s - N_s\, dM_s}{N_s^2 + M_s^2} \qquad (0 < \varepsilon \leq t).$$

On a bien sûr : $|\operatorname{Arctg} \frac{N_t}{M_t}| \leq \frac{\pi}{2}$. On déduit alors, du théorème I.3 et de la proposition I.2, que :

$$\lim_{t \downarrow o} \operatorname{Arctg} \frac{N_t}{M_t} \in \mathbb{R}, \text{ donc que } \lim_{t \downarrow o} \frac{N_t}{M_t} \in \overline{\mathbb{R}} \text{ et que } \operatorname{Arctg} \frac{N}{M} \in \mathcal{L}_c.$$

Il découle alors de la proposition I.2 que :

$$(3) \qquad \int_{o+}^{\cdot} \frac{d < M >_s}{N_s^2 + M_s^2} < \infty$$

En étudiant les différents comportements en 0 de N (par application du théorème I.3), nous allons montrer que (3) n'a pas lieu, ce qui terminera la démonstration.

a) $N \in \mathcal{L}_c$

Ceci est impossible car $d < N > = d < M >$ et $M \in \mathcal{H}$.

b) $\lim\limits_{t \downarrow o} N_t = + \infty$

Au voisinage de 0, $\frac{1}{N_s^2 + M_s^2} \geq \frac{1}{(N_s + M_s)^2}$ donc

$\int_{o+}^{\cdot} \frac{d < N + M >_s}{(N_s + M_s)^2} \leq 2 \int_{o+}^{\cdot} \frac{d < M >_s}{N_s^2 + M_s^2} < \infty$, ce qui, d'après la remarque précédente, est impossible puisque $N + M \in \mathcal{H}$.

c) $\lim\limits_{t \downarrow o} N_t = - \infty$

On applique le raisonnement du cas b) à (-N).

d) $\underline{\lim}_{t \downarrow o} N_t = - \infty$ et $\overline{\lim}_{t \downarrow o} N_t = + \infty$

Dans ce cas, $\lim\limits_{t \downarrow o} \frac{N_t}{M_t} = 0$, donc, au voisinage de 0, $N_s^2 \leq M_s^2$, et par conséquent : $\frac{1}{N_s^2 + M_s^2} \geq \frac{1}{2 M_s^2}$. Donc : $\int_{o+}^{\cdot} \frac{d < M >_s}{M_s^2} \leq 2 \int_{o+} \frac{d < M >_s}{N_s^2 + M_s^2} < \infty$ ce qui contredit encore la même remarque.

II.9.- <u>COROLLAIRE</u> : <u>Soit</u> $M \in \mathcal{H}$. <u>Alors</u>, <u>la mesure de Radon</u> $d < M >$ <u>n'est pas déterministe</u>.

Démonstration : Supposons qu'il existe $(\Omega,(\mathcal{F}_t),\mathcal{F},P,(M_t)_{t>o})$ "processus" tel que : $M \in \mathcal{H}(\Omega,(\mathcal{F}_t),\mathcal{F},P), M>0$ (ce à quoi on peut toujours se ramener par arrêt), et $\langle M\rangle(.,]\varepsilon,t]) = \mu(]\varepsilon,t])$, avec μ mesure de Radon déterministe, positive, sur $]0,\infty[$, $\mu(]\varepsilon,1]) \underset{\varepsilon\downarrow o}{\nearrow} +\infty$.

Soit $(\Omega',(\mathcal{F}'_t),\mathcal{F}',(M'_t),P')$ une copie du processus précédent. Sur l'espace produit convenablement complété, posons : $X_t(\omega,\omega') = M_t(\omega)$ et $Y_t(\omega,\omega') = M'_t(\omega')$. Alors :

$$X \in \mathcal{H},\ Y \in \mathcal{H},\ X > 0,\ Y > 0,\ \langle X\rangle\ (.,]\varepsilon,t]) = \mu(]\varepsilon,t]) = \langle Y\rangle\ (.,]\varepsilon,t]).$$

De plus, par construction, $XY \in \mathcal{H}$, ce qui, d'après la proposition II.8 est impossible.

III.- REPRESENTATION DE CERTAINES MARTINGALES CONFORMES OUVERTES, ET APPLICATIONS

Dans cette troisème partie, nous nous proposons d'étudier, pour $n \geq 2$, l'espace :

$$\mathcal{C}_c^{open}(\mathbb{R}^n) \overset{def}{=} \{M = (M^i)_{1\leq i\leq n}\ ;\ \forall\ i \in \{1,..,n\},\ M^i \in \mathcal{L}_c^{open},$$
$$d\langle M^i\rangle = d\langle M^j\rangle\ ,\ d\langle M^i,M^j\rangle = 0,\ i \neq j\}$$

Cette étude nous permettra de résoudre le problème suivant :

Soient B un mouvement brownien réel, issu de 0, et $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue. Sous quelles hypothèses existe-t-il $V \in \mathcal{L}_c^{open}$ telle que :

$$V_t - V_s = \int_s^t f(u)\ dB_u \qquad (0 < s \leq t)\ ?$$

$\mathcal{C}_c^{open}(\mathbb{R}^2)$ s'identifie de manière évidente à l'espace :

$$\mathcal{C}_c^{open} = \{Z = X + iY\ ;\ X,Y \in \mathcal{L}_c^{open},\ d\langle X\rangle = d\langle Y\rangle \text{ et } d\langle X,Y\rangle = 0\}\quad . \text{ (cf. I).}$$

Le théorème I.5 donne le comportement en 0 des trajectoires des éléments de $\mathcal{C}_c^{open}$.

Nota bene : Soient $W = A + iB$ et $Z = X + iY$ deux martingales locales,continues, complexes ; on prend pour définition de $\langle W,Z\rangle \equiv \langle A + iB\ ,X + iY\rangle$ le processus $\langle A,X\rangle - \langle B,Y\rangle + i(\langle B,X\rangle + \langle A,Y\rangle)$. En particulier, si $Z = X + iY$ est une martingale conforme, on a :

$$<Z,Z> = <\bar{Z},\bar{Z}> = 0, \qquad <Z,\bar{Z}> = 2<X>$$

III.1.- THEOREME : Soit $Z \in \mathcal{C}_c^{open}$ tel que $\lim\limits_{t\downarrow o} |Z_t| = +\infty$. Le processus croissant continu $A_t = \frac{1}{2}\int_o^t \frac{d<Z,\bar{Z}>_s}{|Z_s|^4}$ est à valeurs finies et il existe un mouvement brownien complexe, U, issu de 0, tel que : $\frac{1}{Z_t} = U_{A_t}$.

Démonstration : D'après la formule d'Ito, $\frac{1}{Z} \in \mathcal{C}_c^{open}$; comme $\lim\limits_{t\downarrow o} \frac{1}{Z_t} = 0$, on déduit de la proposition I.2 que $\frac{1}{Z}$ est une martingale conforme, nulle en 0. Il existe donc (cf. [3]) $U \in BM_o(\mathbb{C})$ tel que : $\frac{1}{Z_t} = U_{A_t}$, avec $A_t = <\mathrm{Re}(\frac{1}{Z})>_t = \frac{1}{2}\int_o^t \frac{d<Z,\bar{Z}>_s}{|Z_s|^4}$.

Remarque : Soit $Z \in \mathcal{C}_c^{open}$ tel que $\lim\limits_{t\downarrow o} |Z_t| = +\infty$. On obtient, en appliquant la formule d'Ito à $z \to \mathrm{Log}(|z|)$, puis à $z \to |z|^{-q/2}$ $(q > 0)$, que :

$$\int_{o+}^{\cdot} \frac{d<Z,\bar{Z}>_s}{|Z_s|^{q+2}} \begin{cases} = +\infty & (q \le 0) \\ < +\infty & (q > 0) \end{cases}$$

Remarquons également que la proposition II.8 permet de montrer que les éléments de $\mathcal{H}$ ne peuvent être partie réelle d'éléments de $\mathcal{C}_c^{open}$.

Il reste à étudier le troisième cas du théorème de Walsh qui correspond à :

$$\underline{\lim}_{t\downarrow o} |Z_t| = 0 \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim}_{t\downarrow o} |Z_t| = +\infty .$$

Le théorème suivant montre que dans ce cas il n'est pas possible d'obtenir un résultat analogue au théorème III.1.

III2.- THEOREME : Il n'existe pas de loi μ de martingale de $\mathcal{C}_c^{open}$ telle que :

$$\forall V \in \mathcal{C}_c^{open}, \ \underline{\lim}_{t\downarrow o} |V_t| = 0 \text{ et } \overline{\lim}_{t\downarrow o} |V_t| = +\infty ,$$

$\exists$ A processus croissant continu nul en 0, $A_t > 0 \ \forall t > 0$, et M de loi μ tel que $V_t = M_{A_t}$.

Démonstration : Supposons l'existence d'une telle loi μ. Soit U un mouvement brownien complexe issu de 0, et posons : $V_t = \exp(\frac{1}{U_t})$, $W_t = \exp(V_t)$. De la formule d'Ito, on déduit que V et W appartiennent à $\mathcal{C}_c^{open}$; de plus on a :

$$\underline{\lim}_{t\downarrow o} |V_t| = \underline{\lim}_{t\downarrow o} |W_t| = 0 \ , \quad \overline{\lim}_{t\downarrow o} |V_t| = \overline{\lim}_{t\downarrow o} |W_t| = +\infty \ .$$

Par hypothèse, on a alors : $V_t = M_{A_t}$, $W_t = M'_{A'_t}$ où $M \in \mathscr{C}_c^{open}$, $M' \in \mathscr{C}_c^{open}$, M et M' ont pour loi μ. Ceci est impossible puisque $|\mathrm{Log}(M_{A_t})| \xrightarrow[t\downarrow o]{} +\infty$, $\underline{\lim}_{t\downarrow o} |\mathrm{Log}\, M'_{A'_t}| = 0$. □

Soit $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}^n) = \{M = (M^i)_{1\le i\le n} \ ; \ \forall\, i \in \{1,.,n\},\ M^i \in \mathscr{L}_c \ ; \ d\langle M^i\rangle = d\langle M^j\rangle$ et $d\langle M^i,M^j\rangle = 0\}$. Il est clair que $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathscr{C}_c^{open}(\mathbb{R}^n)$ pour $n \in \{1,2\}$. Pour les dimensions supérieures, on a le :

III.3.- <u>THEOREME</u> : $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}^n) = \mathscr{C}_c^{open}(\mathbb{R}^n)$, <u>pour tout</u> $n \ge 3$.

<u>Démonstration</u> : Soit $n \ge 3$. Supposons qu'il existe $M = (M^i) \in \mathscr{C}_c^{open}(\mathbb{R}^n)$, $M \notin \mathscr{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Du théorème I.3, on déduit que : $\lim_{t\downarrow o} |M_t| = +\infty$ ou $\underline{\lim}_{t\downarrow o} |M_t| < \overline{\lim}_{t\downarrow o} |M_t| = +\infty$.

a) $\lim_{t\downarrow o} |M_t| = +\infty$

Dans ce cas, on peut, quitte à arrêter $|M|$, supposer que $|M_t| > 1$, $\forall\, t > 0$. Appliquons la formule d'Ito à $(M_i)_{1\le i\le n}$ et à $(x_i)_{1\le i\le n} \longrightarrow (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{-n/2+1}$; il vient :

$$\frac{1}{|M_t|^{n-2}} = \frac{1}{|M_\varepsilon|^{n-2}} + (2-n) \sum_{i=1}^n \int_\varepsilon^t \frac{M_s^i\, dM_s^i}{|M_s|^n}$$

Comme $\frac{1}{|M_t|^{n-2}} \xrightarrow[t\downarrow o]{} 0$ $(n \ge 3)$, $\frac{1}{|M|^{n-2}}$ appartient à $\mathscr{L}_c$, est nulle en 0, positive, continue. Or c'est une surmartingale, elle est donc nulle partout, ce qui est impossible.

b) $\underline{\lim}_{t\downarrow o} |M_t| < \overline{\lim}_{t\downarrow o} |M_t| = +\infty$.

Appliquons la formule d'Ito à $(M^i)_{1\le i\le n}$ et à $(x_i)_{1\le i\le n} \longrightarrow (1 + \sum_{i=1}^n x_i^2)^{-q}$ avec $q = \frac{n}{2} - 1 > 0$. On obtient :

$$\frac{1}{(1+|M_t|^2)^q} = \frac{1}{(1+|M_\varepsilon|^2)^q} - 2q \sum_{i=1}^n \int_\varepsilon^t \frac{M_s^i\, dM_s^i}{(1+|M_t|^2)^{q+1}} - nq \int_\varepsilon^t \frac{d\langle M^1\rangle_s}{(1+|M_s|^2)^{q+2}}$$

Comme $0 < \frac{1}{(1+|M_t|^2)^q} \le 1$, $\forall\, t > 0$, on a : $E(\int_\varepsilon^t \frac{d\langle M^1\rangle_s}{(1+|M_s|^2)^{q+2}}) \le \frac{1}{nq}$

et par conséquent $\displaystyle\int_{0+}^{\cdot} \frac{d\langle M^1\rangle}{(1+|M_s|^2)^{q+2}} < \infty$.

On en déduit alors, en appliquant le théorème I.8, que

$\displaystyle\int_0^t \sum_{i=1}^n \frac{M_s^i\, dM_s^i}{(1+|M_s|^2)^{q+1}}$ appartient à $\mathcal{L}_c$ et donc que $\displaystyle\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{(1+|M_t|^2)^{q+2}}$ existe et est finie, ce qui contredit les hypothèses sur $|M|$. □

III.4. PROPOSITION : Soit $M \in \mathcal{L}_c^{open}$, $M \notin \mathcal{L}_c$. Alors $d\langle M\rangle$ n'est pas une mesure de Radon déterministe.

Démonstration : Cette proposition n'est autre que le corollaire II.9, dans le cas où $M \in \mathcal{H}$. Il nous reste donc à établir ce résultat pour $M \in \mathcal{L}_c^{open}$, $\underline{\lim}_{t\downarrow 0} M_t = -\infty$ et $\overline{\lim}_{t\downarrow 0} M_t = +\infty$.

Supposons qu'il existe $M \in \mathcal{L}_c^{open}$, $M \notin \mathcal{L}_c \cup \mathcal{H}$ vérifiant $\langle M\rangle(\cdot,]\varepsilon,t]) = \mu(]\varepsilon,t])$ $(0 < \varepsilon \le t)$ avec μ mesure de Radon positive sur $]0,\infty[$, $\mu(]\varepsilon,1]) \nearrow_{\varepsilon\downarrow 0} +\infty$. Donnons-nous deux copies M' et M" du processus précédent et sur l'espace produit convenablement complété, définissons :

$$X_t(\omega,\omega',\omega'') = M_t(\omega) \quad , \quad Y_t(\omega,\omega',\omega'') = M'_t(\omega') \quad , \quad Z_t(\omega,\omega',\omega'') = M''_t(\omega'') \quad (t>0) .$$

$X \in \mathcal{L}_c^{open}$, $Y \in \mathcal{L}_c^{open}$, $Z \in \mathcal{L}_c^{open}$, $d\langle X\rangle = d\langle Y\rangle = d\langle Z\rangle$ et par construction $d\langle X,Y\rangle = d\langle X,Z\rangle = d\langle Y,Z\rangle = 0$, donc $V = (X,Y,Z) \in \mathcal{C}_c^{open}(\mathbb{R}^3)\setminus \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^3)$, ce qui est impossible car cet ensemble est vide.□

Remarque :

a) Soit $Z = X + iY \in \mathcal{C}_c^{open}$, $Z \notin \mathcal{C}_c$; posons $U = X$. Alors

$d\langle U\rangle = d\langle X\rangle = d\langle Y\rangle$, $d\langle U,Y\rangle = d\langle X,Y\rangle = 0$.

Par contre, $d\langle U,X\rangle = d\langle X\rangle \neq 0$.

b) Soit $Z = X + iY \in \mathcal{C}_c^{open}$, $Z \notin \mathcal{C}_c$, $M \in \mathcal{L}_c^{open}$; en se plaçant sur un espace produit, on définit trois processus M', X', Y' tels que :

$d\langle X'\rangle = d\langle Y'\rangle \neq d\langle M'\rangle$ et $d\langle M',X'\rangle = d\langle M',Y'\rangle = d\langle X',Y'\rangle = 0$

Ces deux exemples montrent que l'on ne peut appauvrir les hypothèses définissant $\mathcal{C}_c^{open}(\mathbb{R}^3)$ tout en conservant un résultat analogue au théorème III,3

On déduit de la proposition III.4, le corollaire suivant :

III.5.- COROLLAIRE : Soient B un mouvement brownien issu de 0 et $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Les assertions a) et b) sont équivalentes :

a) $\exists\, M \in \mathcal{L}_c^{open}$, $\forall\, 0 < s \leq t : M_t - M_s = \int_s^t f(u)\, dB_u$

b) $\int_{0+}^{1} f^2(u)\, du < \infty$

De plus, $M \in \mathcal{L}_c$.

Démonstration: b) $\Longrightarrow$ a) d'après la proposition I.7.
Montrons que a) $\Longrightarrow$ b).

Soit $M \in \mathcal{L}^{open}$, telle que $M_t - M_s = \int_s^t f(u)\, dB_u$ $(0 < s \leq t)$. On a donc $\langle M \rangle (.,]\varepsilon,t]) = \int_\varepsilon^t f^2(u)\, du$ et $d\langle M \rangle$ est déterministe. De la proposition III.4, on déduit que $M \in \mathcal{L}_c$ et, d'après la proposition I.2, que $\int_{0+}^{1} f^2(s)\, ds < \infty$. $\square$

Ce corollaire met en évidence l'existence d'éléments de $\mathcal{L}_c^{inc}$ qui ne sont pas accroissements d'éléments de $\mathcal{L}_c^{open}$, par exemple $\int_s^t \frac{dB_u}{u}$.

Nous terminons cet article en donnant des exemples illustrant les théorèmes I.3 et I.5.

- Toute martingale locale, continue, étant un mouvement brownien changé de temps, il suffit pour illustrer I.3,i) de prendre le mouvement brownien standard.

- De même, le théorème II.4 montre que pour illustrer le cas I.3,ii), il suffit de prendre $\frac{1}{\rho}$ où ρ est un BES(3).

- Soit $U = X + iY$ un mouvement brownien complexe issu de 0,alors $\mathrm{Re}(\frac{1}{U}) = \frac{X}{X^2 + Y^2} \in \mathcal{L}_c^{open}$ et vérifie I.3,iii).

En fait, la proposition II.8 montre que si $Z \in \mathcal{C}_c^{open} \setminus \mathcal{C}_c$ alors $\mathrm{Re}(Z) \in \mathcal{L}_c^{open}$ et vérifie I.3,iii).

Soit $U = X + iY$ un mouvement brownien complexe issu de 0. U est un exemple du cas I.5,i), $\frac{1}{U}$ est un exemple du cas I.5,ii), et $\exp(\frac{1}{U})$ est un exemple du cas I.5,iii).

Remarquons que, d'une manière générale, si $Z \in \mathcal{C}_c^{open} \setminus \mathcal{C}_c$, alors $\exp(Z)$ vérifie toujours I.5,iii), car $\varliminf_{t \downarrow 0} |\exp(Z_t)| = 0$.

REFERENCES

[1] J. AZEMA et M. YOR : En guise d'introduction - Astérisque 52-53 (Temps Locaux), 3-16 (1978).

[2] C. DELLACHERIE et P.A. MEYER : Probabilités et potentiel (Théorie des martingales). Hermann - 1980.

[3] R.K. GETOOR, M.J. SHARPE : Conformal martingales. Invent. Math. - 16 - 271-308 (1972).

[4] N. IKEDA, S. WATANABE : Stochastic differential equations and diffusion processes. North Holland - Kodansha - 1981.

[5] F.B. KNIGHT : A reduction of continuous square integrable martingale to brownian motion. Lecture Notes in Math. 190, Springer-Verlag, Berlin. (1971)

[6] P.A. MEYER : Un cours sur les intégrales stochastiques. Sem. de proba. X Springer Lecture Notes. 511 (1976).

[7] P.A. MEYER, C. STRICKER : Sur les semi-martingales au sens de L. Schwarz. Mathematical analysis and application, Part B. Advances in Math. Supplementary Studies; vol. 7 B, (1981).

[8] J.W. PITMAN : One dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel process, Adv. Appl. Prob., 7 (1975), 511-526.

[9] M.J. SHARPE : Local times and singularities of continuous local martingales. Sem. de proba. XIV. Springer Lecture Notes (1980).

[10] M.J. SHARPE : Some transformations of diffusion by time reversal. Ann. proba. 8, n°6 , 1156-1163 (dec. 1980).

[11] J.B. WALSH : A property of conformal martingales. Sem. de proba. XI. Springer Lecture Notes 581 (1977).

Rectificatif à l'énoncé du théorème II.7.

Il faut ajouter, dans les hypothèses, en i) : $\lim_{t\uparrow\infty} M_t=0$, ce qui entraîne $A_\infty = \infty$ p.s., et donc : $J_t(\rho_{A_\cdot}) = J_{A_t}(\rho_\cdot)$.

Marc YOR a contribué, par les discussions fructueuses que nous avons eues ensemble, à l'élaboration de ce travail. Nous l'en remercions vivement.

Signalons également que le problème de la représentation des martingales locales continues, indexées par $]0,\infty[$, a été posé par M. Sharpe à J. Azema et M. Yor.

Laboratoire de Probabilités
Université Pierre et Marie CURIE,
4, Place Jussieu - Tour 56, 3è étage. 75005 PARIS